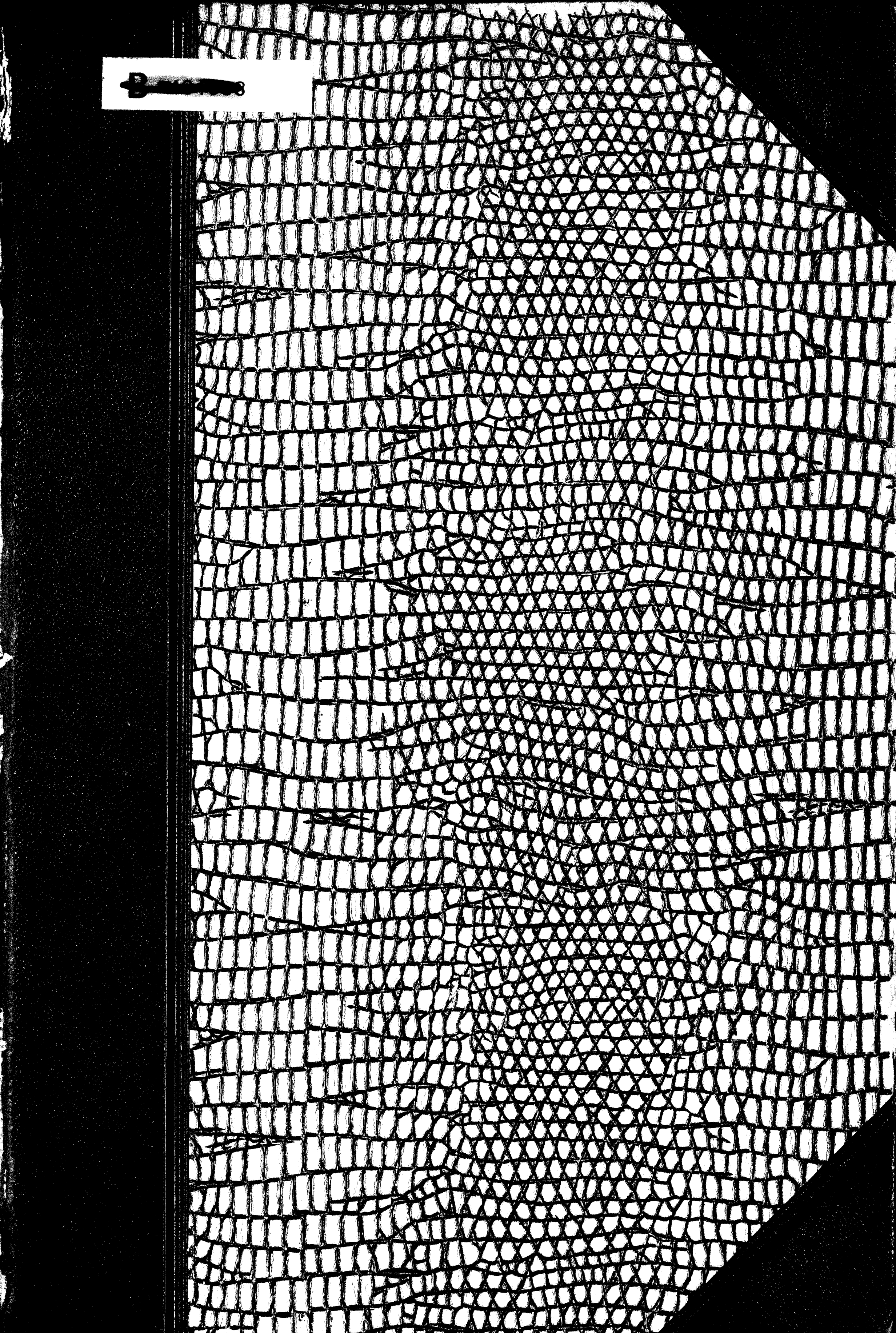


Meinen … **hematik**, der
Naturwisse… n hin weiter
auszubauen, … llwollen zahl-
reicher herv… g begleitetes
Bemühen, w… 3 bei gleicher
Unterstützun… nd Auslandes
auch meine … en in Wissen-
schaft und … **herbieten** ge-
diegener Ar… leshalb, wenn
auch schon … Gegenstand in
meinem Ver…

Unter … ganz besonders
auf die vo… gen, Leipzig,
München u… **thematischen**
Wissensch… und Algebra,
die Analysi… Geodäsie und
Geophysik … n Schlußband
Geschichte, … **französische**
Ausgabe, v… einen begonnen.

Weites … n und natur-
wissenschaf… : Die **Mathe-**
matischen … schrift für Ge-
schichte de… **r Mathematik**
und Physi… **der Deutschen**
Mathemat… **k und Physik**
(Organ für … lle des **Publi-**
cations mathématiques, die **Zeitschrift für mathematischen und natur-
wissenschaftlichen Unterricht**, die **Mathematisch-naturwissenschaft-
lichen Blätter**, ferner das **Archiv für Rassen- und Gesellschafts-Biologie**,
die **Monatshefte für den naturwissenschaftlichen Unterricht aller
Schulgattungen** (die eine unmittelbare Fortführung von Natur und Schule
bilden), die **Geographische Zeitschrift**, **Himmel und Erde** (illustrierte
naturwissenschaftliche Monatsschrift) u. a.

Seit 1868 veröffentliche ich: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“.** Diese jährlich dreimal erscheinenden „Mitteilungen“, die in 35000 Exemplaren im In- und Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, das meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags durch ausführliche Selbstanzeigen der Verfasser in Kenntnis setzen. **Die Mitteilungen werden jedem Interessenten auf Wunsch regelmäßig bei Erscheinen umsonst und postfrei von mir übersandt. Das ausführliche „Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften, Technik nebst Grenzwissenschaften“** 101. Ausgabe, mit eingehender systematischer und alphabetischer Bibliographie und einem Gedenktagebuch für Mathematiker, 10 Bildnissen sowie einem Anhange, Unterhaltungsliteratur enthaltend [CXXXI, 392 u. 92 S.] gr. 8. 1908 steht Interessenten auf Wunsch gegen Einsendung von 2 Mark (gebundene Exempl. 3 Mark) zur Verfügung.

LEIPZIG, Poststraße 3. **B. G. Teubner.**





N. Lobatschewsky



URKUNDEN

ZUR GESCHICHTE DER

NICHTEUKLIDISCHEN GEOMETRIE

HERAUSGEGEBEN

VON

FRIEDRICH ENGEL UND **PAUL STÄCKEL.**

I.

NIKOLAJ IWANOWITSCH LOBATSCHEFSKIJ.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1898.

Alexander Ziwet

2.2

NIKOLAJ IWANOWITSCH

LOBATSCHEFSKIJ.

ZWEI GEOMETRISCHE ABHANDLUNGEN

AUS DEM RUSSISCHEN UEBERSETZT, MIT ANMERKUNGEN UND MIT EINER BIOGRAPHIE DES VERFASSERS

VON

FRIEDRICH ENGEL.

ERSTER THEIL: DIE UEBERSETZUNG.

MIT EINEM BILDNISSE LOBATSCHEFSKIJS UND MIT 194 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1898.

SEINEM LEIPZIGER KOLLEGEN

PROFESSOR SCHOLVIN

WIDMET DIESE UEBERSETZUNG

EIN DANKBARER SCHUELER.



Inhalt des ersten Theils.

Ueber die Anfangsgründe der Geometrie.*) [1 [Nr. 2, 3 178

[Einleitung.]

Die Schwierigkeit der Begriffe steigert sich, wie es scheint, in demselben Masse, in dem man den ursprünglichen Wahrheiten in der Natur näher kommt, ebenso wie sie in einer anderen Richtung wächst nach der Gränze hin, der der Geist zur Erreichung neuer Kenntnisse zustrebt. Das ist der Grund, weshalb die Schwierigkeiten in der Geometrie in erster Linie nothwendig dem Gegenstande selbst eigenthümlich sind. Ferner können die Mittel, zu denen man greifen muss, um hier die äusserste Strenge zu erreichen, kaum dem Ziele und der Einfachheit dieser Wissenschaft entsprechen. Die Männer, die diesen Forderungen genügen wollten, haben sich in einen so engen Kreis eingeschlossen, dass alle ihre Anstrengungen nicht durch Erfolg belohnt werden konnten. Endlich will ich noch bemerken, dass seit den Zeiten eines Newton und Descartes die ganze Mathematik, zur Analysis geworden, mit so reissender Schnelle fortgeschritten ist, dass sie die Wissenschaft weit hinter sich zurückgelassen hat, ohne die sie nunmehr auskommen konnte, und dass diese zugleich aufhörte, die [179 Aufmerksamkeit auf sich zu ziehen, die sie früher erworben hatte. Auf diese Weise haben die von Euklid herrührenden Anfangsgründe trotz ihres hohen Alters, trotz aller unsrer glänzenden Fortschritte in der Mathematik, bis auf den heutigen Tag ihre ursprünglichen Mängel behalten.

In der That, wer wird nicht zugestehen, dass keine mathematische Wissenschaft mit so dunkeln Begriffen begonnen werden darf, wie die sind, mit denen wir, nach Euklids Vorbilde, die Geometrie beginnen, und dass nirgends in der Mathematik ein solcher Mangel an Strenge geduldet werden darf, wie man ihn in der Theorie der Parallellinien

*) Vom Verfasser selbst aus einer Abhandlung ausgezogen, die er am 12. Februar 1826 in der Sitzung der Abtheilung für die physiko-mathematischen Wissenschaften gelesen hat, und zwar unter dem Titel: „Exposition succincte des principes de la Géometrie etc.".

hat zulassen müssen? Es ist wahr, dass vor falschen Schlüssen aus den so unklaren ersten und allgemeinen Begriffen in der Geometrie uns die Vorstellung der Dinge selbst in unsrer Einbildungskraft [2 behütet; auch suchen wir uns von der Richtigkeit der angenommenen Wahrheiten ohne Beweis durch deren Einfachheit zu überreden, sowie durch die Erfahrung, zum Beispiel durch astronomische Beobachtungen; jedoch kann alles das nimmermehr einen Verstand befriedigen, der an strenges Urteilen gewöhnt ist. Ueberdies ist es auch nicht in der Ordnung, die Erledigung einer Frage geringzuschätzen, so lange sie noch unbekannt ist und so lange wir nicht wissen, ob sie nicht noch zu etwas Anderm dienen kann.

Ich beabsichtige hier auseinanderzusetzen, auf welche Weise [*180* ich diese Lücken in der Geometrie auszufüllen gedenke. Die Darstellung aller meiner Untersuchungen in gehörigem Zusammenhange würde viel zu viel Raum und eine Darstellung der ganzen Wissenschaft in vollständig neuer Gestalt erfordern. Eine ausführliche Besprechung der übrigen Mängel der Geometrie, die nach dem Masse ihrer Schwierigkeit weniger wichtig sind, halte ich nicht für nöthig. Ich will mich auf die einzige Bemerkung beschränken, dass sich diese auf die Methode des Vortrags beziehen. Niemand denkt daran, das, was ausschliesslich der Geometrie angehört, von dem zu trennen, was diese Wissenschaft bereits zu einer andern macht, nämlich zur Analysis.

[§ 1.]

Die ersten Begriffe, mit denen eine Wissenschaft, welche es auch sei, beginnt, müssen klar und auf die kleinste Zahl zurückgeführt sein. Nur dann können sie für das Lehrgebäude eine feste und genügende Grundlage bilden. Begriffe dieser Art werden durch die Sinne erworben; auf angeborene darf man sich nicht verlassen.

Nichts kann einfacher sein als der Begriff, der die Grundlage der Arithmetik bildet. Wir erkennen leicht, dass in der Natur Alles der Messung unterliegt, dass Alles gezählt werden kann. Die Sätze der [*181* Mechanik sind von andrer Art; mit Hülfe seiner alltäglichen Erfahrungen allein hätte der Mensch nicht auf sie kommen können. Die ewige Dauer und Unveränderlichkeit einer einmal ertheilten Bewegung, die gemessen wird durch die Geschwindigkeit eines Körpers und durch die Massen verschiedener Körper, das sind Wahrheiten von solcher Beschaffenheit, dass sie Zeit und die Hülfe andrer Kenntnisse erforderten und ein Genie voraussetzten.

Unter den Eigenschaften, die allen Körpern gemeinsam sind, muss eine als geometrisch bezeichnet werden, die Berührung. Mit Worten

vollständig wiederzugeben, was wir darunter verstehen, ist unmöglich: der Begriff ist durch die Sinne erworben, wir verstehen ihn. Die Berührung bildet die unterscheidende Eigenschaft der Körper: weder bei den Kräften noch bei der Zeit noch irgendwo sonst in der Natur finden wir sie. Wenn man bei einem Körper alle übrigen Eigenschaften wegnimmt, bezeichnet man ihn als einen geometrischen.

Die Berührung vereinigt zwei Körper zu einem einzigen. So stellen wir uns alle Körper als Theile eines einzigen vor, des Raumes. Ein Körper ist begränzt, wenn ihn ein zweiter — ein umgebender — berührt und durch seine Berührung die Berührung jedes dritten unmöglich macht. Dieser zweite wird der umgebende Raum sein, wenn er mit dem ersten zusammen den ganzen Raum bildet. Die [*182* Leere, die ein Körper im Innern des Raumes einnimmt, heisst sein Ort. Zwei Körper sind kongruent, wenn jeder, ohne irgend eine [3 Veränderung, diesen Ort ausfüllt, das heisst, den Raum vollständig macht. Blos gleich sind sie, wenn man, um den Ort des einen anzufüllen, den andern in Theile zerlegen und diese Theile in neuer Anordnung vereinigen muss.

[§ 2.]

Die gedachte Zerlegung eines Körpers in zwei Theile werden wir einen Schnitt nennen. Jeder der beiden Theile dient zur Bestimmung einer Seite des Schnittes.

Die geometrischen Eigenschaften der Körper erkennen wir, indem wir diese auf verschiedene Weise in Theile zerlegen. Sie dienen der Geometrie als Grundlage und sind in Folgendem enthalten:

I. Jeder Körper kann in Theile zerlegt werden, die einander nicht über einen hinaus berühren. Derartige Schnitte werden wir als Reihenschnitte bezeichnen; ihre Zahl ist unbegränzt.

II. Jeder Körper kann in Theile zerlegt werden, die alle [*183* paarweise einander berühren und deren Zahl bei jedem neuen Schnitte um zwei wächst. Derartige Schnitte werden wir als Wendeschnitte bezeichnen: ihre Zahl ist unbegränzt.

III. Jeder Körper kann durch drei Schnitte in acht Theile zerlegt werden, die alle paarweise einander berühren; aber alsdann ist es nicht mehr möglich durch einen neuen Schnitt die Zahl der Theile zu verdoppeln. Derartige Schnitte werden wir als drei Hauptschnitte bezeichnen.

Wendeschnitte können die Zahl der Theile auch blos um je einen vermehren. Das wird dann eintreten, wenn die fehlende Zahl der Theile durch Hinzufügung eines neuen Körpers und durch Fortsetzung

der Schnitte in diesen hinein ergänzt wird; demnach ist das Merkmal der Wendeschnitte eigentlich nicht die Zahl der Theile, sondern deren paarweise Berührung mit einander. Jedoch ist das allein nicht genügend, sondern es ist noch Folgendes erforderlich. Wenn man zu jedem der beiden Wendeschnitte in den beiden Theilen des Körpers, die sich auf gegenüberliegenden Seiten befinden, Reihenschnitte führt, so müssen die immer in dem einen Theile solche Stücke abschneiden, die den andern nicht berühren.

Eine ähnliche Bemerkung bezieht sich auch auf die drei Hauptschnitte, von denen je zwei zugleich Wendeschnitte sind, und das ist schon hinreichend, damit sie Hauptschnitte seien.

Die den drei Hauptschnitten entsprechenden Reihenschnitte bestimmen in dem Körper dessen drei Ausdehnungen.

Einen Körper messen heisst die kongruenten Theile zählen, in [*184* die dieser Körper und ein andrer als Mass genommener durch Reihenschnitte nach drei Ausdehnungen zerlegt werden.

[§ 3.]

Die Vereinigung zweier Körper zu einem wird zugleich ein Schnitt in diesem einen sein. Jenachdem die Berührung nur zu einem Schnitte oder zu einigen Wendeschnitten oder zu drei Hauptschnitten gehört, wird sie flächenhaft, linienhaft, punkthaft sein. Wir denken uns einen Körper durch drei Hauptschnitte in acht Theile zerlegt, die [4 durch andre Schnitte nicht würden entstehen können. In diesem Falle erhalten wir mit dem ersten Schnitte eine flächenhafte Berührung zweier Theile. Durch den zweiten Schnitt erzeugen wir zwei Theile, die sich auf gegenüberliegenden Seiten jedes der beiden Schnitte befinden und einander linienhaft berühren. Mit dem dritten Schnitte entstehen zwei Theile, die sich auf gegenüberliegenden Seiten jedes der drei Schnitte befinden und daher einander punkthaft berühren.

Ein Körper bekommt den Namen Fläche, wenn er einen andern flächenhaft berührt und wenn man nur die gegenseitige Berührung dieser beiden Körper in Betracht zieht; deshalb gestattet man auch, alle Theile des einen wegzuwerfen, die den andern nicht berühren. So wird die eine der drei Ausdehnungen vernichtet und so ge- [*185* langen wir durch Beseitigung unnöthiger Theile der Fläche zur Dünne eines Papierblattes oder so weit, wie die Einbildungskraft gehen kann.

Die beiden Körper, deren Berührung hier betrachtet wird, sind die beiden Seiten der Fläche.

Linie heisst ein Körper, der einen andern linienhaft berührt und von dem man die Theile wegzuwerfen gestattet, die diesen andern

nicht berühren. Wir gelangen so zur Dünne eines Haares, eines Federstriches auf dem Papier und dergleichen. Bei der Verwandlung des Körpers in eine Linie werden zwei Ausdehnungen vernichtet, denn zwei Schnitte bilden im Raume eine Linie, wenn Reihenschnitte, die man zu jedem von ihnen führt, nur überflüssige Theile abschneiden.

Ein Körper bekommt den Namen Punkt, wenn man seine punkthafte Berührung mit einem andern betrachtet und deshalb die Theile des ersten wegzuwerfen gestattet, die den andern nicht berühren. So kann man zur Kleinheit eines Sandkörnchens oder eines mit der Federspitze auf dem Papier gemachten Punktes gelangen.

Ein Punkt wird im Raume durch drei Hauptschnitte gebildet, und Reihenschnitte, die man zu jedem von diesen führt, schneiden [*186* nur überflüssige Theile ab: folglich ist bei dem Punkte überhaupt keine Ausdehnung mehr vorhanden.

Bei Fläche, Linie und Punkt richtet man seine Aufmerksamkeit nur auf die Berührung zweier Körper. Das bedeutet, dass man bei dem einen Körper alle solchen Veränderungen zulässt, die keine Theile des andern ihrer Berührung berauben und auch keine neuen Theile hinzufügen, die den andern berühren. Das ist der Grund, weshalb es bei der Messung der Flächen und Linien erlaubt ist, alle Reihenschnitte, vermöge deren man die Ausdehnungen bestimmt, durch zugehörige Wendeschnitte zu ersetzen. Hieraus folgt, dass eine Linie die Grösse einer Fläche nicht verändert und ein Punkt nicht die einer Linie. Hieraus ist auch ersichtlich, dass eine Linie einer ganzen Schaar von Wendeschnitten angehören muss, und deshalb sind zur Bildung einer Linie zwei Flächen nöthig, von denen man sagt, dass sie einander in der Linie schneiden; jede dieser Flächen wird durch [5 die Linie in zwei Theile zerlegt, die die beiden Seiten der Linie sind.

Ein Punkt gehört nicht nur drei Hauptschnitten an, sondern allen Wendeschnitten, die diesen entsprechen, und deshalb sind zur Bildung eines Punktes zwei Linien nöthig, von denen man sagt, dass sie einander in dem Punkte schneiden. Jede Linie wird durch den Punkt in zwei Theile zerlegt, die zur Bestimmung der beiden Seiten [*187* des Punktes dienen.

Der Punkt hat keine Grösse, da er ohne Ausdehnung ist und deshalb keine Messung zulässt.

Wenn zwei Körper A und B einen dritten C in je einem Punkte berühren, so wird die gegenseitige Lage der beiden Punkte oder ihr sogenannter Abstand von einander jedesmal bestimmt sein, sobald A und B durch einen Körper D verbunden sind, der C nicht berührt, auch wenn dabei an A, B und D Veränderungen vorgehen sollten,

indem neue Theile, die C nicht berühren, weggenommen oder hinzugefügt werden, oder solche Umgestaltungen von A und B, die bei dieser Art der Berührung von A und B mit C zulässig sind. So dient der Zirkel zur Bestimmung von Abständen.

[§ 4.] [*Nr. 4* / *228*]

Mit diesen Begriffen vom Raume und von dem Verfahren zur Messung seiner Ausdehnung kann die Geometrie unter voller Strenge der Beweise in der Ordnung durchgeführt werden, in der sie hier nachher auseinandergesetzt wird, wobei dann, wenn keine neuen Erklärungen gegeben werden, die von jedermann angenommenen Benennungen gemeint sind.

Kugelfläche heisst eine Fläche, deren sämmtliche Punkte sich von einem, dem Mittelpunkte, in gleichem Abstande befinden. Dieser Abstand ist der Halbmesser der Kugelfläche. Die innere Seite der Kugelfläche ist die, wo ihr Mittelpunkt liegt; die andre ist die äussere.

Der Körper, der von der Kugelfläche begränzt wird, heisst Kugel und hat denselben Mittelpunkt und denselben Halbmesser wie die Kugelfläche.

Kugeln und Kugelflächen sind kongruent, wenn ihre Halbmesser gleich sind. [*229*

Kongruente Kugeln fallen zusammen, das heisst, sie decken einander, wenn sie die Mittelpunkte gemein haben, welches ihre Lage auch sonst sein mag.

Dagegen können koncentrische Kugelflächen mit verschiedenen Halbmessern keinen einzigen Punkt gemein haben. Derartige Kugelflächen stellen im Raume Reihenschnitte dar. Der Halbmesser einer solchen, die im Innern einer andern enthalten ist, wird als der kleinere betrachtet. Das dient zur ersten Vergleichung von Abständen unter einander.

Eine Kugelfläche begränzt den Raum von allen Seiten, weil eine andre, koncentrische Kugelfläche, die sich ausserhalb der ersten befindet, eine solche Schicht hinzufügt, die es überhaupt für jeden Körper unmöglich macht, die zur ersten gehörige Kugel zu berühren.

Zwei Kugelflächen um verschiedene Mittelpunkte, die in einander hinein und wieder heraus treten, zerlegen den Raum in vier Theile: der eine A gehört der inneren Seite der einen und der andern Kugelfläche an, der andre B der äusseren Seite beider, der dritte C der äusseren Seite der einen und der inneren der andern und beim vierten D ist es umgekehrt. Neue Kugelflächen um dieselben Mittelpunkte schneiden entweder von A Theile ab, die B nicht berühren [6 [*230*

oder umgekehrt, und ebenso von C solche Theile, die D nicht berühren oder umgekehrt. Demnach ergiebt der Schnitt zweier Kugelflächen eine Linie, die man Kreis nennt.

Hiernach stellen zwei Kugelflächen, die einander schneiden, im Raume zwei Hauptschnitte dar, oder, was ganz dasselbe ist, zwei Wendeschnitte. Aus demselben Grunde stellen drei Kugelflächen, wenn sie einander schneiden, drei Hauptschnitte dar.

Ebene heisst die Fläche, in der alle Kreise liegen, die als Schnitte kongruenter Kugelflächen um zwei Punkte — die Erzeugungsmittelpunkte — entstehen. Die Ebene kann folglich unbegränzt fortgesetzt werden, indem man die Halbmesser der kongruenten Kugelflächen vergrössert.

Der Kreis, der durch den Schnitt kongruenter Kugelflächen entsteht, deckt sich selber, mit welcher Seite und in welcher Lage [*231* er auch auf sich gelegt werden mag, solange nur die Mittelpunkte der Kugelflächen ihren Ort beibehalten oder der eine an den Ort des andern verlegt wird.

Im Innern jedes Kreises befindet sich auf der Ebene ein Punkt, der Mittelpunkt des Kreises, dessen Abstände — die Halbmesser — von allen Punkten des Kreises kongruent sind. Zu allen diesen Kreisen, die die Ebene erzeugen, kann nur ein einziger Punkt als Mittelpunkt gehören.

Gerade Linie heisst die Linie, die zwischen zwei Punkten sich selbst in allen Lagen deckt. Von dieser Beschaffenheit ist in der Ebene des Kreises die Linie, deren Punkte an ihren Plätzen bleiben, wenn der Kreis sich selbst von der andern Seite deckt.

Der Abstand zweier Punkte kann durch eine gerade Linie bestimmt werden, und deren Beschaffenheit gemäss entsteht jeder Abstand aus einem andern und dessen Theilen durch Vervielfachung.

Eine gerade Linie liegt ganz in einer Ebene, sobald sich zwei ihrer Punkte in der Ebene befinden.

Durch drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, [*232* kann man nur eine Ebene legen.

Jeder Punkt ausserhalb einer Ebene kann als Erzeugungsmittelpunkt für die Ebene genommen werden, und auf der gegenüberliegenden Seite befindet sich dann ein andrer entsprechender Mittelpunkt.

Zwei Ebenen schneiden einander in einer geraden Linie.

[§ 5.]

Die Grösse einer geraden Linie wird durch deren Vergleichung mit einer andern bestimmt.

Auf ähnliche Weise wird auch die Grösse eines Kreisbogens durch dessen Vergleichung mit dem Umfange bestimmt, von dem der Bogen ein Theil ist. Dieses Verhältniss hängt nicht von der Grösse des Halbmessers ab, sondern von der gegenseitigen Lage der beiden [7 Halbmesser, die durch die Enden des Bogens gehen. Um willkürlich zu lassen, welcher Bogen als Einheit benutzt wird, werden wir den Umfang mit 2π bezeichnen. Ein so dargestellter Bogen heisst geradliniger Winkel, oder Winkel der beiden Geraden, die durch die Enden des Bogens gehen und im Mittelpunkte des Kreises zusammentreffen.

Ebenso werden wir mit 2π auch die Kugelfläche bezeichnen, [233 wenn wir die Ausschnitte auf dieser im Vergleich mit ihr bestimmen. Wenn der Ausschnitt durch zwei Ebenen entsteht, die durch den Mittelpunkt gehen, so ist seine Grösse ein Ebenenwinkel, bei andern Ausschnitten ein körperlicher Winkel.

Ebenenwinkel und körperliche Winkel hängen nicht von dem Halbmesser der Kugelfläche ab, sondern von der gegenseitigen Lage der Ebenen, die von dem Mittelpunkte der Kugelfläche ausgehen. Der Ebenenwinkel hängt auch nicht von dem Orte ab, an dem sich der Kugelmittelpunkt auf der Schnittlinie der beiden Ebenen befindet.

Der Ebenenwinkel ist gleich dem geradlinigen Winkel zwischen den Lothen, die in den Ebenen auf deren Schnittlinie und zwar in demselben Punkte errichtet sind.

Damit eine Gerade auf einer Ebene senkrecht sei, genügt es, dass sie auf zwei Geraden in der Ebene senkrecht sei.

Die Winkelsumme des geradlinigen Dreiecks kann nicht grösser als π sein, dagegen ist die Winkelsumme des sphärischen Dreiecks immer grösser als π.

Die Summe zweier Winkel eines sphärischen Dreiecks ist [234 jedesmal zugleich mit der Summe der gegenüberliegenden Seiten $> \pi$, $= \pi$, $< \pi$ [,vorausgesetzt, dass die dritte Seite kleiner als π ist].

Wenn in einem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke die eine Kathete $< \pi$ ist, so ist die andre zugleich mit dem gegenüberliegenden Winkel

$$> \frac{\pi}{2}, \quad = \frac{\pi}{2}, \quad < \frac{\pi}{2}.$$

Im geradlinigen Dreiecke liegt der grösseren Seite der grössere Winkel gegenüber und umgekehrt.

Die Summe zweier Seiten des geradlinigen Dreiecks ist grösser als die dritte.

Im sphärischen Dreiecke ist der Winkel gegenüber der grösseren von zwei Seiten der grössere oder der kleinere, jenachdem die dritte Seite $< \pi$ oder $> \pi$ ist.

Die Summe zweier Seiten eines sphärischen Dreiecks ist grösser als die dritte, wenn diese dritte $< \pi$ ist.

[§ 6.]

Die Grösse eines körperlichen Winkels ist gleich

$$\frac{S-(n-2)\pi}{2},$$

wo S die Winkelsumme des sphärischen Vielecks ist und n dessen Seitenzahl.

Wir setzen die Zahl der Flächen oder Figuren, die einen [235 regelmässigen Körper begränzen, gleich n, die Zahl der Seiten einer Figur gleich m, die Zahl der Flächen, die sich zu einem körperlichen Winkel zusammenschliessen, gleich t. Jeder Fläche des Körpers [8 entspricht beim Mittelpunkte der Winkel $2\pi : n$, zu dem gerade m Ebenenwinkel, jeder von der Grösse $2\pi : t$, gehören; vergleichen wir hiernach die beiden Ausdrücke für den körperlichen Winkel, so finden wir:

$$n = \frac{4t}{2m-(m-2)t}.$$

Hier können m und t nicht grösser als fünf sein, sonst wird n negativ; folglich sind alle möglichen Annahmen diese:

$m=3,\ t=3,\ n=4$; der Körper heisst: Tetraeder;
$m=3,\ t=4,\ n=8$; „ „ „ : Oktaeder;
$m=3,\ t=5,\ n=20$; „ „ „ : Ikosaeder;
$m=4,\ t=3,\ n=6$; „ „ „ : Würfel;
$m=5,\ t=3,\ n=12$; „ „ „ : Dodekaeder.

Die Zahl der Ecken oder Spitzen des regelmässigen Körpers ist gleich $nm : t$, folglich:

beim Tetraeder . . . 4, [236
„ Oktaeder . . . 6,
„ Ikosaeder . . . 12,
„ Würfel . . . 8,
„ Dodekaeder . . . 20.

Es verdient Beachtung, dass man den vorhin angegebenen Werth für n finden kann, ohne zu berücksichtigen, auf welche Weise der körperliche Winkel aus seinen Ebenenwinkeln gefunden wird. In der That, die Zahl der Kanten, in denen die Flächen zusammenhängen, muss offenbar $\frac{1}{2}nm$ sein, während sie nach der bekannten Regel

Eulers*) $(nm:t)+n-2$ sein wird; indem wir den einen Ausdruck mit dem andern vergleichen, erhalten wir dasselbe n wie schon vorhin.

[§ 7.]

Alle Fälle der Kongruenz von Dreiecken können nunmehr ohne Benutzung der Theorie der Parallellinien bewiesen werden. —

Geradlinige Dreiecke sind jedesmal kongruent, wenn bei ihnen [237 gleich sind:

1) eine Seite und zwei Winkel;

2) zwei Seiten und der Winkel zwischen diesen;

3) zwei Seiten und der Winkel gegenüber der grösseren; [9

4) die drei Seiten;

sphärische Dreiecke sind kongruent, wenn bei ihnen gleich sind:

1) die drei Seiten;

2) zwei Seiten und der Winkel zwischen ihnen;

3) zwei Seiten und der Winkel gegenüber der einen, aber die Winkel, die in den beiden Dreiecken der andern Seite gegenüberliegen, dürfen nicht π zur Summe haben;

4) eine Seite und die zwei Winkel an ihr;

5) zwei Winkel und die Seite gegenüber dem einen, aber die Seiten, die in den beiden Dreiecken dem andern Winkel gegenüberliegen, dürfen zusammen nicht die Summe π ergeben;

6) die drei Winkel.

Zwei geradlinige Dreiecke, in denen die drei Winkel gleich sind, brauchen nicht kongruent zu sein, wenn man die Summe der Winkel in jedem gleich π annehmen will. Dagegen müssen sie kongruent [238 sein, wenn sich bei ihnen, ähnlich wie bei den sphärischen, die Winkelsumme von π unterscheidet.

[§ 8.]

Wir haben gesehen, dass die Winkelsumme des geradlinigen Dreiecks nicht grösser als π sein kann. Es bleibt daher übrig, diese Summe gleich π oder kleiner als π anzunehmen. Das eine und das andre kann ohne jeden Widerspruch in der Folge angenommen werden, und daraus gehen nun zwei Geometrien hervor: die eine, die gewöhnliche, sie ist es bis jetzt ihrer Einfachheit wegen, stimmt mit allen thatsächlichen Messungen überein; die andre, die imaginäre, allgemeinere und deshalb in ihren Rechnungen schwierigere, lässt eine Abhängigkeit der Linien von den Winkeln als möglich zu.

*) Den einfachsten Beweis dieses Satzes hat Grunert geliefert (s. Journal für die Mathematik, von Crelle, Bd. 2, [1827,] S. 367).

Will man in einem geradlinigen Dreiecke die Winkelsumme gleich π annehmen, so wird sie überhaupt in allen diesen Werth haben. Wenn man sie dagegen in einem einzigen kleiner als π zulässt, so ist leicht zu zeigen, dass sie mit wachsenden Seiten des Dreiecks abnimmt.

Unter allen Umständen können daher zwei Gerade in einer Ebene niemals zusammentreffen, wenn sie mit einer dritten Winkel bilden, deren Summe π ist. Sie schneiden einander möglicherweise auch [*239* in dem Falle nicht, wenn diese Summe kleiner als π ist, wofern man überdies die Winkelsumme im Dreiecke kleiner als π annehmen will.

In ihrer Beziehung zu einer Geraden können daher alle Geraden einer Ebene in schneidende und nichtschneidende eingetheilt werden. Die letzteren sollen parallel heissen, wenn sie unter allen von einem Punkte ausgehenden Geraden die Gränze zwischen den beiden Arten bilden oder, anders ausgedrückt, den Uebergang von der einen Art zur andern.

Wir denken uns von einem Punkte aus das Loth a auf eine gegebene Gerade gefällt und zu dieser von demselben Punkte aus eine Parallele gezogen; wir bezeichnen mit $F(a)$ den Winkel zwischen a und der Parallelen. Es ist leicht zu zeigen, dass der Winkel $F(a)$ [10 für jede Gerade a gleich $\frac{1}{2}\pi$ ist, sobald die Winkelsumme im Dreiecke gleich π ist; aber bei der andern Voraussetzung ändert sich der Winkel $F(a)$ mit a, indem er mit wachsendem a bis zur Null abnimmt und beständig kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ bleibt. Um bei dieser letzteren Voraussetzung die Bedeutung von $F(a)$ auf alle Geraden a auszudehnen, werden wir annehmen:

$$F(0) = \frac{\pi}{2}, \quad F(-a) = \pi - F(a).$$

Man kann sich dann für jeden spitzen Winkel A eine positive [*240* und für jeden stumpfen Winkel A eine negative Linie a denken von solcher Beschaffenheit, dass: $A = F(a)$ ist.

Uebrigens besitzen die Parallellinien sowohl bei der einen als bei der andern Voraussetzung folgende Eigenschaften:

Wenn zwei Gerade parallel sind, so liefert der Schnitt durch sie gelegter Ebenen auch eine zu beiden parallele Gerade.

Zwei Gerade, die einer dritten parallel sind, sind unter einander parallel.

Wenn drei Ebenen einander in parallelen Geraden schneiden, so ist die Summe der inneren Ebenenwinkel gleich π.

[§ 9.]

Die Annahme, dass die Winkelsumme im Dreiecke kleiner als π ist, bringt es mit sich, dass sich der Kreis mit wachsendem Halbmesser nicht einer geraden Linie nähert, sondern einer krummen Linie von besonderer Art, die wir Gränzkreis nennen werden. Auch die Kugelfläche wird sich in diesem Falle einer krummen Fläche nähern, die wir in ähnlicher Weise Gränzkugel nennen werden. Diese [*240* Fläche ergiebt als Schnitt mit einer Ebene entweder einen Kreis oder einen Gränzkreis.

Die Geometrie auf der Gränzkugel ist der Form nach vollständig dieselbe, wie wir sie auf der Ebene kennen. Der Gränzkreis ersetzt bei ihr die gerade Linie, und die Winkel zwischen den Ebenen, in denen die Gränzkreise liegen, vertreten die Stelle der Winkel zwischen geraden Linien.

Die Gränzkreise kommen geraden Linien um so näher, je kleiner ihre Bögen sind, so dass man den Unterschied im Verhältnisse zur Länge des Bogens so klein machen kann, wie man will. Deshalb gilt auch Alles, was von den einen gilt, zugleich von den andern, wenn man nur beide ausserordentlich klein nimmt.

Wenn daher die in der Natur bestehende Geometrie so beschaffen ist, dass zwei parallele Linien zu einer dritten Linie unter Winkeln geneigt sein müssen, deren Summe kleiner ist als π, so wird die gewöhnliche Geometrie eine Geometrie von Linien sein, die ausser- [*241* / 11] ordentlich klein sind im Vergleiche mit solchen, bei denen die Winkelsumme im Dreiecke als von π verschieden angenommen werden kann.

[*Nr. 11, 12* / *227*]

Es ist gesagt worden, dass die Geometrie auf der Gränzkugel genau dieselbe ist, wie auf der Ebene. In der ersten ersetzt der Gränzkreis die Gerade; die Winkel zwischen den Ebenen, in denen die Gränzkreise liegen, nehmen die Stelle der Winkel zwischen geraden Linien ein. Der Messung von Dreiecken auf der Gränzkugel muss jedoch die Lehre von den trigonometrischen Funktionen vorhergehen; und wenn es sich um die geometrische Konstruktion handelt, so muss man mit den Dreiecken auf der Gränzkugel verfahren, wie man [*228* es mit sphärischen thun würde. Die Ebenen, in denen die Gränzkreise liegen und die man Normalebenen nennen kann, werden die Ebenen grösster Kreise einer Kugelfläche darstellen; die Schnittlinien aber dieser Ebenen unter einander, also die Normalen oder Axen der Gränzkugel werden dasselbe sein, was die Halbmesser der gewöhnlichen Kugel sind.

Wir werden hiernach, ohne einen Unterschied zu machen, von geradlinigen Dreiecken sprechen, indem wir darunter zugleich auch Dreiecke auf der Gränzkugel verstehen, die aus Bogen von Gränzkreisen gebildet sind.

[§ 10.]

Wir bezeichnen in einem geradlinigen [rechtwinkligen] Dreiecke die Katheten mit a und b, die gegenüberliegenden Winkel mit A und B, die Hypotenuse mit c.

Das Verhältniss $a:c$ verändert sich in einem solchen Dreiecke überhaupt nur mit dem Winkel A. Diese Abhängigkeit des Verhältnisses $a:c$ von A bezeichnet man mit

$$\frac{a}{c} = \sin A$$

und nennt $a:c$ den Sinus von A. Die Erklärung von $\sin A$ erweitert man auf andre Winkel, die nicht wie A spitz und positiv sind, [229 indem man annimmt:

$$\sin 0 = 0, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\sin (n\pi + A) = (-1)^n \sin A; \quad \sin (\pi - A) = \sin A,$$

wo A ein Winkel von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ ist, n eine positive ganze Zahl. Endlich setzt man für jedes positive A:

$$\sin (-A) = -\sin A;$$

folglich auch für negatives A und für $A = 0$.

So kann man den Sinus jedes Winkels auf den Sinus von Null oder von $\frac{1}{2}\pi$ oder auf den eines spitzen positiven Winkels zu- [12 rückführen. Die Werthe der beiden ersten sind gegeben; die Werthe der letzteren stellen das Verhältniss zweier Seiten im rechtwinkligen Dreiecke dar.

Nunmehr ist, wie leicht einzusehen, stets, was auch A für ein Winkel sein mag:

$$\sin (\pi + A) = -\sin A.$$

Ausser der trigonometrischen Funktion, die Sinus genannt wird, sind noch andre gebräuchlich: Cosinus, Tangente und Cotangente, deren Erklärung und Bezeichnung die folgenden Gleichungen lehren: [230

$$\cos A = \sin \left(\frac{\pi}{2} - A\right), \quad \operatorname{tang} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \quad \operatorname{cotang} A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

Die Werthe aller dieser trigonometrischen Funktionen ändern sich nicht, wenn wir zu dem Winkel 2π hinzufügen.

Im rechtwinkligen Dreiecke finden wir:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1,$$

was überhaupt für jeden Winkel A richtig ist.

In jedem geradlinigen Dreiecke mit den Seiten a, b, c und den gegenüberliegenden Winkeln A, B, C ist:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}; \quad c = a \cos B + b \cos A.$$

Die letzte Gleichung ergiebt mit Hülfe der ersten und wegen $\sin C = \sin (A + B)$:

$$\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

für alle positiven Winkel A, B, deren Summe kleiner ist als π. Man sieht leicht ein, dass hier die Winkel A und B beide Null sein können und auch $A + B = \pi$. Es sei ferner: $A = n\pi + \alpha$, $B = m\pi + \beta$, [231 wo n und m ganze positive Zahlen sind und α, β positive Winkel > 0 und $< \pi$; dann finden wir, indem wir die Gleichung durch $(-1)^{n+m}$ dividiren, dieselbe Gleichung, nur dass A in α, B in β übergegangen ist, wobei demnach $\alpha + \beta < \pi$ sein muss. Aber, da sich die Gleichung nicht ändert, wenn wir $\pi - \alpha$ und $\pi - \beta$ an die Stelle von α und β setzen, so können wir $\alpha + \beta$ auch $> \pi$ annehmen. So ist die Gleichung für alle positiven Winkel A, B bewiesen; die negativen wiederum kann man sich dadurch entstanden denken, dass 2π von positiven abgezogen wird, aber dieses Abziehen verändert die Gestalt der Gleichung nicht.

Indem wir $\frac{\pi}{2} - A$ und $- B$ an Stelle von A und B einsetzen, finden wir:

$$\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

Setzen wir $A = B$, sodann $A = \frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{8}\pi$ und so weiter, so finden wir die Werthe der trigonometrischen Funktionen für alle Winkel $m\pi : 2^n$, wo m und n ganze Zahlen sind.

Jeder andre Winkel A kann durch eine Summe $B + 2\omega$ [13 dargestellt werden, wo $B = m\pi : 2^n$ mit ganzen Zahlen m und n, ω dagegen ein beliebig kleiner Winkel ist. [232

Dann wird:

$$\sin A = \sin B + 2 \sin \omega \cos (B + \omega),$$

$$\cos A = \cos B - 2 \sin \omega \sin (B + \omega).$$

Wenn in einem rechtwinkligen Dreiecke ein spitzer Winkel abnimmt, so nimmt zugleich die gegenüberliegende Kathete ab und zwar so, dass das Verhältniss dieser Kathete zu der andern so klein gemacht

werden kann, wie man will. Nachdem wir so $\operatorname{tang}\omega$ beliebig klein gemacht haben, finden wir $\sin\omega$ noch kleiner, während $\sin(B+\omega)$ und $\cos(B+\omega)$ die Einheit nicht überschreiten. Demnach können die Unterschiede: $\sin A - \sin B$ und $\cos A - \cos B$ so klein sein, dass man $\sin B$ und $\cos B$ für $\sin A$ und $\cos A$ nehmen kann. So ist es möglich zu verstehen, dass die Werthe der trigonometrischen Funktionen für alle Winkel in Zahlen bestimmt sind. —

[§ 11.]

Jetzt wollen wir uns mit der Messung der Dreiecke und mit der Lösung der Aufgabe über die Parallelen beschäftigen.

Wir nehmen nur die Voraussetzung als richtig an, dass das Loth auf einer parallelen Linie die andre unter einem spitzen Winkel trifft. Für diesen spitzen Winkel haben wir die Bezeichnung $F(a)$ ver- [233 abredet, wenn a das Loth ist. Die andre und bis auf den heutigen Tag allein von den Geometern zugelassene Annahme ist ebenfalls in dieser allgemeinen enthalten, mit der Beschränkung, dass man die Linien als unendlich klein betrachten und daher bei der Rechnung deren Produkte sowie die zweiten und höheren Potenzen im Vergleich mit den ersten vernachlässigen muss.

Demnach müssen in einem rechtwinkligen Dreiecke die spitzen Winkel gegenüber den Katheten a und b gleich $F(a')$ und $F(b')$ sein, wo a' und b' gerade Linien sind mit dem Zeichen $+$ vor den Zahlen, die ihren Masswerth ausdrücken.

Wir verlängern die Kathete b und die Hypotenuse c über beider Schnittpunkt A hinaus (Fig. 1). AD, die Verlängerung von c, machen wir gleich a' und in dem Endpunkte D errichten wir das Loth DE nach der Seite von AG, der Verlängerung von b. Von dem Punkte B aus, dem Scheitel des Winkels $F(b')$, ziehen wir zu AG die Parallele BH nach derselben Seite. Die drei Linien BH, AG und DE werden parallel sein, auch zu b, dessen Schnittpunkt mit a wir mit C bezeichnen wollen.

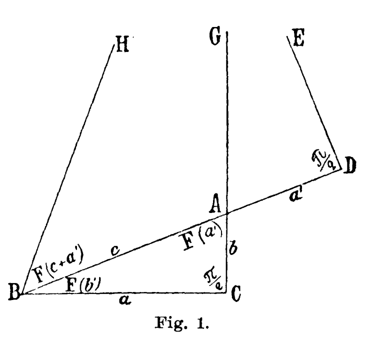


Fig. 1.

Hier ist:

$$\angle HBA + \angle ABC = \angle HBC,$$

das heisst:

$$F(c+a') + F(b') = F(a). \tag{1}$$

Wenn wir in demselben Dreiecke ABC a' von A nach B [234 hin auf der Linie c abtrügen, im Endpunkte D das Loth DE errichteten und zu diesem vom Punkte B aus die Parallele zögen, folglich zugleich auch die Parallele zu b, so würden wir eine neue Beziehung zwischen den Linien c, a, a' und b' finden. Wir müssen jedoch drei Fälle unterscheiden: Wenn $c > a'$ ist (Fig. 2), so finden wir: [14

$$\angle DBH = \angle DBC + \angle CBH$$

oder:

$$F(c - a') = F(b') + F(a). \tag{2}$$

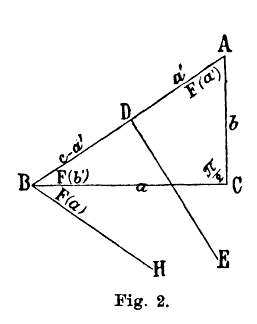


Fig. 2.

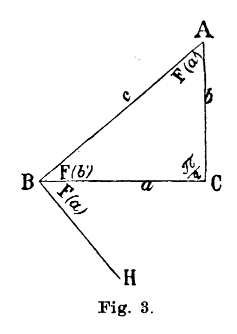


Fig. 3.

Wenn $c = a'$ (Fig. 3), so ist:

$$\frac{\pi}{2} = F(b') + F(a).$$

Wenn $c < a'$ (Fig. 4), so ist:

$$\pi - F(a' - c) = F(b') + F(a).$$

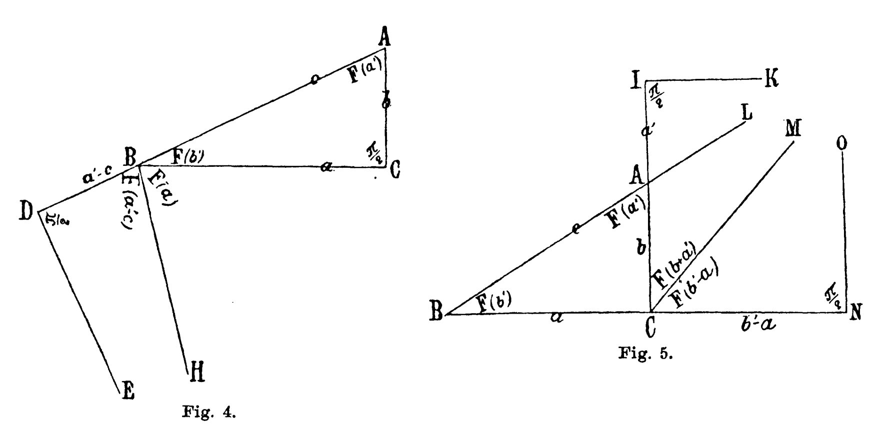


Fig. 4.

Fig. 5.

Aber im zweiten Falle ist: $\frac{1}{2}\pi = F(0) = F(c - a')$ und im letzten: $\pi - F(a' - c) = F(c - a')$, folglich ist die Gleichung (2) in allen drei Fällen richtig.

Die Verbindung der Gleichungen (1), (2) ergiebt:

$$(3)\qquad 2F(a) = F(c-a') + F(c+a'),$$

$$(4)\qquad 2F(b') = F(c-a') - F(c+a').$$

Wir verlängern ferner b und c über den Punkt A (Fig. 5), a über den Punkt C hinaus, machen $AI = a'$, $CN = b' - a$ und er- [235 richten die Lothe IK und NO auf CI und CN, dann werden IK, AL und NO parallel sein. Wenn wir noch CM parallel dazu ziehen, so ist:

$$\angle MCN + \angle MCI = \frac{\pi}{2},$$

das heisst:

$$(5)\qquad F(b'-a) + F(a'+b) = \frac{\pi}{2}.$$

Wir bezeichnen jetzt mit α die Linie, die durch die Gleichung

$$F(\alpha) + F(a) = \frac{\pi}{2}$$

bestimmt ist. Mit β, γ, α', β' bezeichnen wir ähnliche Linien in Bezug auf b, c, a', b'. Dann kann die Gleichung (4) anders dargestellt werden:

$$2F(\beta') = F(a'-c) + F(a'+c),$$

was voraussetzt, dass es ein rechtwinkliges Dreieck giebt, in dem a' die Hypotenuse ist, β' eine Kathete und $F(c)$ der dieser gegenüberliegende Winkel (Fig. 6).

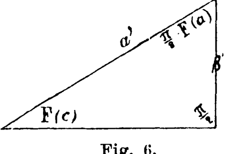


Fig. 6.

Hiernach muss man schliessen, dass man in den Gleichungen (3), (4) und (5), wie überhaupt bei jeder angenommenen Abhängigkeit zwischen den Winkeln und Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, nicht nur a in b verwandeln [236 darf, wenn man zugleich a' in b' verwandelt, sondern auch

a in β'	α in b'
c in a'	γ in α'
a' in c	α' in γ
b' in α	β' in a,

während man zu gleicher Zeit b und β ungeändert lässt. Auf diese Weise ergeben die Gleichungen (3) und (4):

$$(6)\qquad \begin{cases} 2F(a) = F(c-a') + F(c+a') \\ 2F(b) = F(c-b') + F(c+b') \\ 2F(b) = F(a'-\alpha) + F(a'+\alpha) \\ 2F(a) = F(b'-\beta) + F(b'+\beta), \end{cases}$$

[15

$$(7)\quad \begin{cases} 2F(b') = F(c - a') - F(c + a') \\ 2F(a') = F(c - b') - F(c + b') \\ 2F(c) \ = F(a' - \alpha) - F(a' + \alpha) \\ 2F(c) \ = F(b' - \beta) - F(b' + \beta), \end{cases}$$

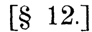
$$(8)\quad \begin{cases} 2F(a') = F(\alpha - \beta) - F(\alpha + \beta) \\ 2F(b') = F(\beta - \alpha) - F(\alpha + \beta), \end{cases}$$

und die Gleichung (5): [237

$$(9)\quad \begin{cases} F(b' - a) + F(a' + b) = \frac{\pi}{2} \\ F(c - a) + F(\beta + \alpha') = \frac{\pi}{2} \\ F(a' - \beta') + F(\beta + \gamma) = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} F(b' + a) + F(a' - b) = \frac{\pi}{2} \\ F(c + a) + F(\beta - \alpha') = \frac{\pi}{2} \\ F(a' + \beta') + F(\beta - \gamma) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Alle diese Gleichungen stellen die Abhängigkeit zwischen den Seiten und Winkeln eines rechtwinkligen Dreiecks unter verschiedenen Gestalten dar und dienen zusammengenommen zur Bestimmung der Abhängigkeit einer jeden Linie a von dem Winkel $F(a)$; zur Beantwortung dieser letzteren Frage kann man aber auf die folgende Weise gelangen.



[§ 12.]

Auf der Ebene ABC desselben rechtwinkligen Dreiecks errichten wir im Punkte B das Loth BB' (Fig. 7); zu diesem ziehen wir von den Punkten A und C aus die Parallelen AA' und CC'. Die Summe der inneren Winkel zwischen den Ebenen, in denen die drei Parallelen liegen, ergiebt $\frac{1}{2}\pi - F(b')$ für den Winkel an der Kante AA'. Wir denken uns um A, als Mittelpunkt, eine Kugelfläche, deren Schnitt mit den Linien AA', AB und AC ein sphärisches, rechtwinkliges Dreieck $A'BC$ erzeugt (Fig. 8), in dem $A'C = F(b)$ die [238 Hypotenuse ist, $A'B = F(c)$ und $BC = F(a')$ die Katheten und $F(a)$, $\frac{1}{2}\pi - F(b')$ die gegenüberliegenden Winkel. Man kann hier im Vorbeigehen bemerken, dass das Vorhandensein

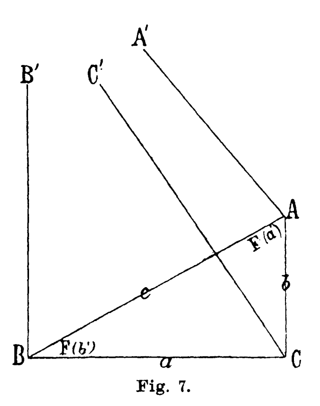


Fig. 7.

eines solchen Dreiecks ein rechtwinkliges geradliniges Dreieck (Fig. 6) voraussetzt, in dem a' die Hypotenuse ist, β' und b die Katheten und $F(c)$ und $\frac{1}{2}\pi - F(a)$ die diesen gegenüberliegenden Winkel, folglich genau dasselbe Dreieck, dessen Konstruktion wir vorhin gezeigt haben. Es ist nöthig, die Schlüsse in dieser Weise zu prüfen, so lange ungewiss bleibt, welche der beiden Annahmen wahr ist.

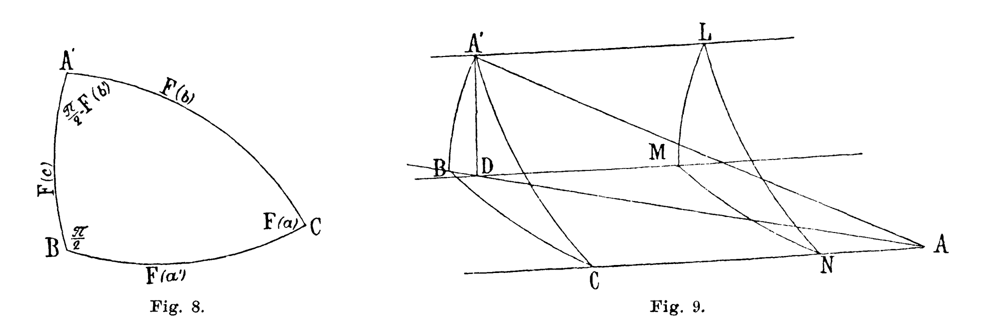


Fig. 8. Fig. 9.

Wir denken uns wiederum das sphärische Dreieck $A'BC$ und den Mittelpunkt A der zugehörigen Kugelfläche (Fig. 9). Von A' aus fällen wir auf AB das Loth $A'D$. Wir ziehen zu CA die Parallelen: DM durch den Punkt D in der Ebene ABC und $A'L$ durch den Punkt A' in der Ebene $A'AC$. Es sei LMN ein Dreieck auf einer Gränzkugel, die $A'L$, DM und CA zu Axen hat.

Man kann zeigen, dass sich die Verhältnisse der Seiten des [16 Dreiecks $A'BC$ von denen der Seiten des Dreiecks LMN um so weniger unterscheiden, je grösser der Halbmesser AC oder, was ganz dasselbe ist, die Linie a' in der Gleichung $BC = F(a')$ ist, und dass dieser Unterschied so klein gemacht werden kann, wie man will. [239 Die Gränze, der sich das Verhältniss zweier Linien nähert, werden wir durch Vorsetzung von Lim. bezeichnen. So schreiben wir:

$$\text{Lim.}\,\frac{A'C}{BC} = \frac{LN}{NM}, \quad \text{Lim.}\,\frac{A'B}{BC} = \frac{LM}{NM},$$

das heisst:

$$\text{Lim.}\,\frac{F(b)}{F(a')} = \frac{1}{\cos F(a)}; \quad \text{Lim.}\,\frac{F(c)}{F(a')} = \operatorname{tang} F(a).$$

Hieraus folgt:

$$\text{Lim.}\,\frac{F(b)+F(c)}{F(a')} = \frac{1}{\cos F(a)} + \operatorname{tang} F(a),$$

$$\text{Lim.}\,\frac{F(b)-F(c)}{F(a')} = \frac{1}{\cos F(a)} - \operatorname{tang} F(a).$$

Aus den Gleichungen (6) und (7) ergiebt sich:

$$F(b) + F(c) = F(a' - \alpha),$$
$$F(b) - F(c) = F(a' + \alpha),$$

folglich ist:

$$\text{Lim.} \frac{F(a' - \alpha)}{F(a')} = \cot \frac{1}{2} F(\alpha),$$

$$\text{Lim.} \frac{F(a' + \alpha)}{F(a')} = \text{tang} \frac{1}{2} F(\alpha).$$

Die erste Gleichung zeigt, dass die zweite auch für alle [240 negativen Linien α richtig ist. Indem wir uns auf diese letztere stützen, schliessen wir, dass für je zwei Linien α und β:

$$\text{Lim.} \frac{F(a' + \alpha)}{F(a' + \beta)} \cdot \text{Lim.} \frac{F(a' + \beta)}{F(a')} = \text{tang} \frac{1}{2} F(\alpha)$$

ist, das heisst:

$$(11) \qquad \text{tang} \frac{1}{2} F(\alpha - \beta) \,.\, \text{tang} \frac{1}{2} F(\beta) = \text{tang} \frac{1}{2} F(\alpha).$$

Dies erfordert:

$$(12) \qquad \text{tang} \frac{1}{2} F(\alpha) = e^{-\alpha},$$

wo e eine unbestimmte konstante Zahl ist, unter der wir aber [17 die Grundzahl der Neperschen Logarithmen verstehen können, weil es unbekannt ist, welche Linie bei der Messung der Geraden als Einheit genommen wird.

[§ 13.]

Mit Hülfe der Gleichung (11) ergeben die vorhin gefundenen Gleichungen (6), (7) und (8):

$$(13) \qquad \begin{cases} \sin F(c) = \sin F(a) \,.\, \sin F(b) \\ \text{tang}\, F(c) = \text{tang}\, F(a) \,.\, \sin F(a') \\ \cos F(b) = \cos F(c) \,.\, \cos F(a') \\ \sin F(c) = \text{tang}\, F(a') \,.\, \text{tang}\, F(b') \\ \text{tang}\, F(a') = \cos F(a) \,.\, \text{tang}\, F(b) \\ \sin F(b') = \sin F(a) \,.\, \cos F(a') \end{cases}$$

und andre, die unmittelbar hieraus folgen. [241

In einem rechtwinkligen Dreiecke mit den Katheten a und b, den gegenüberliegenden Winkeln A und B und der Hypotenuse c wird demnach sein, wenn es geradlinig ist:

$$(14) \qquad \begin{cases} \sin F(c) = \sin F(a) \,.\, \sin F(b) \\ \text{tang}\, F(c) = \text{tang}\, F(a) \,.\, \sin A \\ \cos F(b) = \cos F(c) \,.\, \cos A \\ \sin F(c) = \text{tang}\, A \,.\, \text{tang}\, B \\ \text{tang}\, A = \cos F(a) \,.\, \text{tang}\, F(b) \\ \sin B = \sin F(a) \,.\, \cos A, \end{cases}$$

wenn es sphärisch ist:

$$(15)\quad \begin{cases} \cos\ c = \cos\ a \,.\, \cos b \\ \sin\ a = \sin\ A \,.\, \sin c \\ \operatorname{tang}\ a = \operatorname{tang}\ c \,.\, \cos B \\ \cos\ c = \cot\ A \,.\, \cot B \\ \operatorname{tang}\ a = \operatorname{tang} A \,.\, \sin b \\ \cos\ A = \cos\ a \,.\, \sin B, \end{cases}$$

die bekannten Gleichungen der sphärischen Trigonometrie, mit deren Hülfe man auch leicht für jedes sphärische Dreieck mit den Seiten [242 a, b, c und den gegenüberliegenden Winkeln A, B, C findet:

$$(16)\quad \begin{cases} \cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c = \cos a \\ \sin a \sin B = \sin b \sin A \\ \cot A \sin C + \cos C \cos b - \cot a \sin b = 0 \\ \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C = \cos A. \end{cases}$$

Die Messung der sphärischen Dreiecke hängt folglich nicht von der Annahme über die Parallelen ab. Mit der Messung der geradlinigen verhält es sich anders. Aehnlich wie die Gleichungen (15) uns (16) liefern, so finden wir mit Hülfe der Gleichungen (14) für jedes [18 geradlinige Dreieck mit den Seiten a, b, c und den gegenüberliegenden Winkeln A, B, C:

$$(17)^{*)}\quad \begin{cases} \operatorname{tang} F(a) \sin A = \operatorname{tang} F(b) \sin B \\ \cos A \cos F(b) \cos F(c) + \dfrac{\sin F(b) \,.\, \sin F(c)}{\sin F(a)} - 1 = 0 \\ \cot A \sin B \sin F(c) + \cos B - \dfrac{\cos F(c)}{\cos F(a)} = 0 \\ \cos C + \cos A \cos B - \dfrac{\sin A \,.\, \sin B}{\sin F(c)} = 0\,. \end{cases}$$

[§ 14.]

Wenn a, b, c sehr klein angenommen werden, so dass es gestattet ist, Potenzen und Produkte von höherer Dimension zu vernach- [243 lässigen, so kann man setzen:

$$\sin F(a) = 1 - \frac{1}{2} a^2; \quad \cos F(a) = a\left(1 - \frac{1}{3} a^2\right),$$

wodurch die Gleichungen (17) übergehen in:

---

*) Die Gleichungen (17) und Alles, was nach diesen folgt, hatte der Verfasser bereits hinter der Abhandlung beigefügt, die er 1826 in der Abtheilung für die physiko-mathematischen Wissenschaften vorlegte.

$$b \sin A = a \sin B$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$\sin (A + B) = \frac{c}{a} \sin A$$
$$\cos C + \cos (A + B) = 0,$$

von denen die zwei ersten bekannte Gleichungen der geradlinigen Trigonometrie sind, während die zwei letzten zeigen, dass $A + B + C = \pi$ ist.

[§ 15.]

Die von uns entwickelte Parallelentheorie bedingt zwischen [Nr. 3, 4 251] Linien und Winkeln eine gewisse Abhängigkeit, von der, wie wir nachher sehen werden, niemand zeigen kann, ob sie in der Natur vorhanden ist oder nicht. Wenigstens überzeugen uns die astronomischen Beobachtungen davon, dass alle Linien, die unsrer Messung unterliegen, sogar die Abstände zwischen den Himmelskörpern, sehr klein sind im Vergleich mit der Linie, die in unsrer Theorie zur Einheit genommen ist, so dass die bis heutzutage gebräuchlichen Gleichungen der geradlinigen Trigonometrie ohne merklichen Fehler richtig sein müssen.

Wir nennen a den Durchmesser der Bahn der Erde um die Sonne, $2p$ die grösste jährliche Parallaxe eines Fixsterns: das heisst, [252] $\frac{1}{2}\pi - 2p$ ist der Winkel zwischen a und der Geraden von dem einen Endpunkte von a nach dem Sterne hin, während die Gerade von dem Sterne nach dem andern Endpunkte hin auf a senkrecht steht. Es ist nothwendig:

$$F(a) > \frac{\pi}{2} - 2p,$$

woraus folgt: [19

$$e^a < \frac{1 + \operatorname{tang} p}{1 - \operatorname{tang} p},$$

$$\frac{1}{2} a < \operatorname{tang} p + \frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 p + \frac{1}{5} \operatorname{tang}^5 p + \cdots$$

und um so mehr:

$$a < \operatorname{tang} 2p.$$

Der Abstand des Sterns wird auf a senkrecht, wenn der Längenunterschied zwischen dem Sterne und der Sonne einen rechten Winkel beträgt. Gerade diese Bedingung muss man erfüllen, damit die wirklichen Beobachtungen über die Parallaxe möglichst günstig werden.

Wie es scheint, kann man sich auf die von Herrn d'Assas-Montdardier ersonnene Methode am Meisten verlassen (Connaiss. des tems de 1831). Dieser findet die jährliche Parallaxe des Sternes

Keid (29 im Eridanus) 2″, die des Rigel 1″, 43, die des Sirius 1″, 24. Die letzte ergiebt:

$$a < 0{,}000\,006\,012,$$

die grösste:

$$a < 0{,}000\,009\,696.$$

Da wir auf diese Weise a und folglich auch überhaupt alle [*253* Linien, die unsrer Messung unterliegen, als sehr klein betrachten müssen, so können wir uns in den Gleichungen (17) um so mehr mit den niedrigsten Potenzen der Dreieckseiten begnügen, da hier in die Funktionen entweder nur gerade oder nur ungerade Potenzen eingehen.

Die Winkelsumme unterscheidet sich sogar in solchen Dreiecken, wie wir sie jetzt betrachten, ausserordentlich wenig von zwei Rechten. Wenn wir diesen Unterschied mit 2ω bezeichnen, so finden wir aus der letzten Gleichung (17), indem wir

$$B = \frac{\pi}{2}, \quad C = \frac{\pi}{2} - 2p, \quad A = 2p - 2\omega$$

setzen, leicht:

$$\cos F\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\operatorname{tang}\omega \,.\, \operatorname{tang}(2p - \omega)}$$

und daraus:

$$\sin^2(p - \omega) = \sin^2 p - \cos 2p \,.\, \cot^2 F\left(\frac{a}{2}\right).$$

Ist p' eine andre Parallaxe, kleiner als p, so ist:

$$\cot^2 F\left(\frac{a}{2}\right) < \frac{\sin^2 p'}{\cos 2p'}.$$

Demnach kann man mit der Genauigkeit, die hier eingehalten werden muss, setzen:

$$\omega < 2p \sin^2\left(\frac{x}{2}\right),$$

wo:

$$\sin x = \frac{\sin p'}{\sin p}\sqrt{\frac{\cos 2p}{\cos 2p'}}.$$

Zum Beispiel ist für den Sirius: $p' = 0''$, 62, für Keid: $p = 1''$, folglich ist in dem Dreiecke, das sich bis zu dem zweiten dieser Sterne [*254* erstreckt:

$$2\omega < 0'', 43.$$

Wäre der Abstand bis zu dem Sterne ebenfalls gleich a, dann [20 wäre:

$$\operatorname{tang}\omega = \cos^2 F\left(\frac{a}{2}\right) < \operatorname{tang}^2 p,$$

wo $2p$ die kleinste bekannte Parallaxe für a ist. Setzen wir zum Beispiele: $p = 0''$, 62, so finden wir, dass sich in einem solchen Drei-

ecke die Winkelsumme von zwei Rechten um weniger unterscheidet als um:

$$0'',000\,003\,727.$$

Allgemein ist in einem rechtwinkligen Dreiecke mit den Katheten a, b und der Winkelsumme $\pi - 2\omega$:

$$\operatorname{tang} \omega = \left(\frac{e^a - 1}{e^a + 1}\right) \cdot \left(\frac{e^b - 1}{e^b + 1}\right).$$

Je kleiner daher das Dreieck ist, um so weniger unterscheidet sich seine Winkelsumme von zwei Rechten. Demnach kann man sich vorstellen, wie sehr dieser Unterschied, auf den unsre Parallelentheorie begründet ist, die Genauigkeit aller Rechnungen der gewöhnlichen Geometrie rechtfertigt und gestattet, die in dieser letzteren angenommenen Grundlagen so anzusehen, als wären sie streng bewiesen.

Indessen kann man nicht umhin, sich von der Ansicht des [255 Laplace hinreissen zu lassen, dass die uns sichtbaren Sterne und die Milchstrasse nur einer einzelnen Versammlung von Himmelskörpern angehören, die denen ähnlich ist, die wir in den Sternbildern des Orion, der Andromeda, des Steinbocks und in andern als schwach schimmernde Flecken wahrnehmen. Daher zeigt uns die Natur selbst solche Abstände, im Vergleich mit denen sogar die Abstände unsrer Erde von Fixsternen wegen ihrer Kleinheit verschwinden, dessen zu geschweigen, dass in der Vorstellung der Raum unbegränzt fortgesetzt werden kann.

Hiernach kann man ferner unmöglich behaupten, dass die Annahme, das Mass der Linien sei von den Winkeln unabhängig, eine Annahme, die viele Geometer als eine unbedingte Wahrheit haben annehmen wollen, die keines Beweises bedürfe, dass diese Annahme sich [nicht], möglicherweise noch bevor wir die Gränzen der uns sichtbaren Welt überschreiten, als merklich falsch herausstellen könnte.

Andrerseits sind wir ausser Stande zu begreifen, was für eine Verbindung von Dingen in der Natur bestehen könne, die in dieser so verschiedenartige Grössen wie Linien und Winkel verknüpfte. [256 Daher ist es sehr wahrscheinlich, dass die Euklidischen Sätze ganz allein wahr sind, obgleich sie für immer unbewiesen bleiben werden.

Wie das auch sein mag, die neue Geometrie, für die hier nunmehr der Grund gelegt ist, kann, wenn sie auch in der Natur nicht besteht, nichtsdestoweniger in unsrer Vorstellung bestehen, und wenn sie auch bei wirklichen Messungen ausser Gebrauch bleibt, so eröffnet sie doch ein neues, weites Feld für die Anwendungen von Geometrie und Analysis auf einander.

[§ 16.]

Jetzt wollen wir zusehen, auf welche Weise in dieser imagi- [21 nären Geometrie die Grösse von krummen Linien, ebenen Flächenräumen, krummen Oberflächen und Körperräumen bestimmt wird.

Zunächst werden wir uns mit der Untersuchung der Gleichungen der gebräuchlichsten Linien beschäftigen.

In einem rechtwinkligen Dreiecke mit den Katheten x und y und dem Winkel A gegenüber y ist (s. die fünfte Gl. (14)):

$$\tag{18} \operatorname{tang} A = \operatorname{tang} F(x) \,.\, \cos F(y).$$

Das ist die Gleichung einer Geraden, die die Axe der x unter [257 dem Winkel A schneidet.

Setzen wir hierin r an die Stelle von x und sodann $r + x$ an die Stelle von x, b an die von y. Durch Vergleichung der Ausdrücke für A erhalten wir:

$$\operatorname{tang} F(r) \,.\, \cos F(y) = \operatorname{tang} F(r + x) \,.\, \cos F(b)$$

oder:

$$\cos F(y) = \cos F(b) \cdot \frac{\sin F(x) \cos F(r)}{\cos F(x) + \cos F(r)}.$$

Indem wir $r = \infty$ setzen, finden wir:

$$\tag{19} \cos F(y) = e^{-x} \,.\, \cos F(b),$$

die Gleichung der Geraden, die mit der x-Axe parallel ist auf der Seite, wohin die x gerechnet werden, und die durch den Endpunkt des im Anfangspunkte dieser Koordinaten auf der x-Axe errichteten Lothes b geht.

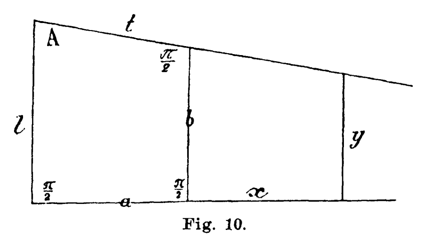


Fig. 10.

Es sei jetzt die Gerade (Fig. 10) im Abstande l von der x-Axe unter dem Winkel $A < \frac{1}{2}\pi$ aber $> F(l)$ gegen die y-Axe geneigt. Diese Linie trifft mit der x-Axe nicht zusammen, wie weit sie auch verlängert werden möge.

Wir suchen eine Linie a so, dass:

$$\tag{20} \operatorname{tang} F(l) = \operatorname{tang} A \,.\, \cos F(a),$$

folglich:

$$a = \frac{1}{2} \log \frac{\sin (A + F(l))}{\sin (A - F(l))}.$$

In einem rechtwinkligen Dreiecke mit den Katheten a und l [258 nennen wir die Hypotenuse c, den Winkel α gegenüber A' und den l gegenüber L. Indem wir die Gleichungen (14) anwenden, finden wir:

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} L &= \cos F(l) \,.\, \operatorname{tang} F(a)\\ \operatorname{tang} A' &= \cos F(a) \,.\, \operatorname{tang} F(l)\\ \sin F(c) &= \sin F(a) \,.\, \sin F(l).\end{aligned}$$

Wir tragen jetzt a von l aus auf der x-Axe nach der Seite ab, wo sich der Winkel A befindet. Von dem andern Endpunkte aus fällen wir auf die gegebene Linie das Loth b, das in irgend einem Abstande t von dem Endpunkte von l auftreffen wird. So entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c, den Katheten b und t [22 und mit dem Winkel $A - A'$ gegenüber der ersten; den gegenüber der zweiten werden wir L' nennen. Wir erhalten:

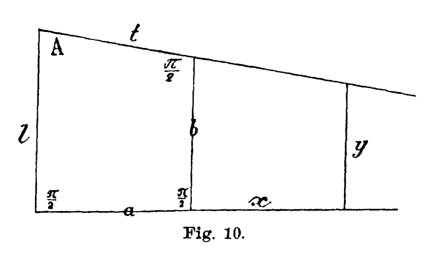


Fig. 10.

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} L' &= \sin F(c) \,.\, \cot (A - A')\\ \cos F(b) &= \cos L' \,.\, \cos F(c)\\ \operatorname{tang} F(t) &= \frac{\operatorname{tang} (A - A')}{\cos F(b)}\\ &= \frac{\sin F(c) \,.\, \cot L'}{\cos F(b)}.\end{aligned}$$

Indem wir in die erste Gleichung die Werthe von $\operatorname{tang} A$ und $\operatorname{tang} A'$ einsetzen, die wir vorhin mit Hülfe von a und l ausgedrückt haben, entdecken wir, dass $L' = \frac{1}{2}\pi - L$ ist und dass folglich b auf a senkrecht steht.

Daher müssen in der Ebene zwei gerade Linien entweder zusammentreffen oder parallel sein oder auf einer dritten senkrecht stehen. [259

Endlich ergeben die beiden letzten Gleichungen:

(21) $$\cos F(b) = \sin F(a) \,.\, \cos F(l)$$

(22) $$\operatorname{tang} F(t) = \sin F(l) \,.\, \operatorname{tang} F(a).$$

Es ist bemerkenswerth, dass die Gleichungen (20), (21) und (22), wenn wir überdies $A = F(a')$ setzen, zu einem rechtwinkligen Dreiecke (Fig. 11) gehören, in dem a und a' die Katheten sind, $F(l)$ und $\frac{1}{2}\pi - F(b)$ die diesen gegenüberliegenden Winkel und t die Hypotenuse.

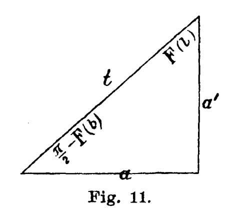


Fig. 11.

Die Gleichung der geraden Linie lässt sich jetzt sehr einfach darstellen, wenn wir die Koordinaten x von b ab rechnen, sie wird nämlich:

$$\cos F(b) = \sin F(x) \,.\, \cos F(y)$$

oder:

(23) $$\sin F(a) \,.\, \cos F(l) = \sin F(x) \,.\, \cos F(y),$$

wo die Linie a durch die Gleichung (20) bestimmt wird. Indem wir den Werth von a einsetzen und die Koordinaten x von l ab rechnen, erhalten wir hieraus:

$$(24) \qquad \cos F(y) = \frac{\cos F(l)}{\sin F(x)} - \sin F(l) \,.\, \cot A \,.\, \cot F(x),$$

was sich noch so darstellen lässt:

$$(25) \quad 2 \sin A \,.\, \cos F(y) = e^x \,.\, \sin (A - F(l)) + e^{-x} \,.\, \sin (A + F(l)).$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist das die allgemeine Gleichung [260 aller geraden Linien und zwar kann A jeder Winkel sein; jedoch ist x auf der Seite des Winkels A positiv und auf der gegenüberliegenden Seite negativ zu nehmen.

[§ 17.]

Wenn wir beim Kreise die Koordinaten x vom Mittelpunkte aus rechnen und den Halbmesser r nennen, so ist:

$$(26) \qquad \sin F(r) = \sin F(x) \,.\, \sin F(y);$$

wenn wir dagegen die x vom Umfange aus rechnen:

$$\sin F(r) = \sin F(y) \,.\, \sin F(r - x),$$

eine Gleichung, die sich anders darstellen lässt: [23

$$\sin F(x) \,.\, \sin F(y) = 1 - \cos F(r) \,.\, \cos F(x).$$

Setzen wir hier $r = \infty$, so bekommen wir die Gleichung des Gränzkreises:

$$(27) \qquad \sin F(y) = e^{-x}.$$

Man kann zu dieser Gleichung auf andre Weise gelangen, indem man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten x und y und der Hypotenuse z betrachtet, in dem $F(\frac{1}{2}z) - F(y)$ und $F(\frac{1}{2}z)$ die x und y gegenüberliegenden Winkel sind. Hier finden wir:

$$\cot F(y) = 2 \cot F\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$\operatorname{tang} F\left(\frac{z}{2}\right) = \cos F(y) \,.\, \operatorname{tang} F(x),$$

woraus nur noch z wegzuschaffen ist.

[§ 18.]

Eine krumme Linie kann nicht aus Geraden zusammengesetzt werden und deshalb ergiebt die Messung einer Kurve mit Hülfe einer Geraden nur eine verabredete Grösse, als die man gewöhnlich [261 die Gränze annimmt, der man sich nähert, wenn man auf der Kurve Punkte, die immer näher aneinander genommen werden, durch Gerade verbindet. Es ist leicht einzusehen, welchen Zweck man bei dieser Rechnung verfolgt. Die krummen Linien werden wirklich ausgemessen, mit Hülfe einer Kette, die, wie man annimmt, die Grösse einer Kurve

um so richtiger bestimmt, je kleiner ihre Glieder sind, so dass also ein biegsamer Faden diese Grösse ohne merklichen Fehler ergiebt.

Man braucht folglich nur zu beweisen, dass eine Gränze der Annäherung vorhanden ist, und sodann zu zeigen, auf welche Weise man diese findet.

Es sei AB (Fig. 12) ein Kreisbogen, AC und BD seien die Linien, die von den Enden des Bogens nach dem Mittelpunkte gerichtet sind; BE und FA seien Lothe auf AC, das eine von dem Endpunkte B des Kreisbogens aus gefällt, das andre in dem Endpunkte A errichtet und in F durch die Verlängerung von BD begränzt.

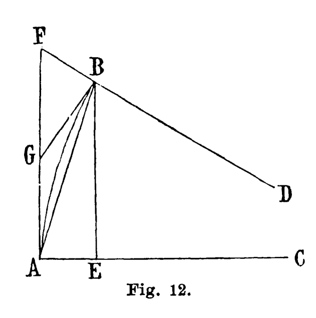


Fig. 12.

Es möge BG vom Punkte B aus senkrecht zu BD gezogen sein und die Linie AF in G treffen. Hier ist:

$$AB > BE, \quad AF > AG + GB.$$

Hieraus ist leicht zu ersehen, sowohl für den Kreis als auch für jede Kurve, dass Theilung der Bogen die Summe der Sehnen vergrössert und die Summe der Tangenten verkleinert. Zwischen diesen [262 beiden Summen muss sich folglich eine Gränze befinden, die nunmehr die Grösse der krummen Linie sein wird.

[§ 19.]

Es hindert nichts, sich unter den geraden Linien in Figur 12 Gränzkreise vorzustellen, die auf einer Gränzkugel gezogen sind. Der Bogen AB möge einem Kreise angehören, dessen Halbmesser s ist, gemessen durch den Bogen eines Gränzkreises, der vom Umfange aus bis zum Mittelpunkte auf einer Gränzkugel angenommen ist. Den Winkel beim Mittelpunkte nennen wir α. Es wird sein:

$$BE = s \, . \sin \alpha, \quad AF = s \, . \operatorname{tang} \alpha.$$

Ist $\alpha = \pi : 2^n$, wo n eine ganze Zahl, so nähern sich $2^n . BE$ und [24 $2^n . AF$ mit wachsendem n einer Gränze, die die Hälfte des Kreisumfanges darstellt, $2^n \, . \sin \alpha$ und $2^n \, . \operatorname{tang} \alpha$ dagegen der Zahl:

$$\pi = 3{,}141592 \cdots;$$

folglich ist der Kreisumfang gleich:

$$2\pi \, . \, s$$

und der Bogen für einen unbestimmten Winkel α gleich:

$$\alpha s.$$

Ist AB ein Kreisbogen und sind die übrigen Linien sämmtlich gerade, so nennen wir α den Centriwinkel des Kreisbogens AB [263

mit dem Halbmesser r; die Sehne AB bezeichnen wir mit c, die Tangente AF mit t. Es wird sein:

$$2 \cot F\left(\frac{c}{2}\right) = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cot F(r)$$

$$\cos F(t) = \operatorname{tang} \alpha \,.\, \cot F(r).$$

Ist $\alpha = 2\pi : n$, wo n irgend eine ganze Zahl, und multipliciren wir die Gleichungen mit n, so erhalten wir die Gränze:

$$2\pi \,.\, \cot F(r),$$

der sich $2n \,.\, \cot F(\frac{1}{2}c)$ und $n \,.\, \cos F(t)$ mit wachsender Zahl n nähern, während zugleich das Kleinerwerden von c die Gränzen:

$$2n \,.\, \cot F\left(\frac{c}{2}\right) = nc, \quad n \,.\, \cos F(t) = nt$$

ergiebt, die beide den Kreisumfang darstellen müssen. Für einen unbestimmten Winkel α wird folglich die Grösse des Bogens sein:

$$\alpha \cot F(r) = \frac{1}{2}\alpha(e^r - e^{-r}). \tag{28}$$

Wenn r sehr klein ist, so finden wir den Bogen gleich $\alpha \,.\, r$, richtig bis auf r^3.

[§ 20.]

Wir denken uns nunmehr den Kreis zu gleicher Zeit sowohl auf einer Ebene, wo er den Halbmesser y hat, als auf einer Gränzkugel, wo sein durch einen Gränzkreis gemessener Halbmesser s ist. Der Umfang des Kreises muss durch $2\pi s$ und durch $2\pi \,.\, \cot F(y)$ dargestellt werden, folglich ist:

$$s = \cot F(y) \tag{29}$$ [264

der Bogen eines Gränzkreises, ausgedrückt mit Hülfe des Lothes, das von dem einen Ende des Bogens auf die durch das andre Ende gezogene Axe gefällt ist.

Dasselbe kann man finden, wenn man α in dem Ausdrucke (28) mit Hülfe des Halbmessers r und mit Hülfe des Lothes darstellt, das von dem einen Endpunkte des Kreisbogens aus auf den Durchmesser durch den andern gefällt ist, und wenn man sodann, blos r als veränderlich betrachtend, das Verhältniss:

$$\frac{d\alpha}{d \operatorname{tang} F(r)}$$

[für $r = \infty$] bestimmt.

In einem Dreiecke endlich, dessen Ecken sämmtlich auf einem [25 Gränzkreise so liegen, dass die Seiten a und b die Sehnen zweier Bogen darstellen und die Seite c die Sehne des aus diesen zusammengesetzten Bogens, müssen die gegenüberliegenden Winkel sein:

$$A = F\left(\frac{b}{2}\right) - F\left(\frac{c}{2}\right)$$

$$B = F\left(\frac{a}{2}\right) - F\left(\frac{c}{2}\right)$$

$$C = F\left(\frac{a}{2}\right) + F\left(\frac{b}{2}\right).$$

Die Gleichungen (17) ergeben in diesem Falle:

$$\cot F\left(\frac{c}{2}\right) = \cot F\left(\frac{a}{2}\right) + \cot F\left(\frac{b}{2}\right).$$

Hieraus folgt, dass $\cot F(\frac{1}{2}c)$ dem Gränzkreisbogen, zu dem die Sehne c gehört, proportional ist; da aber die Sehne, wenn sie kleiner [265 wird, mit ihrem Bogen zusammenfällt, so muss $2 \cot F(\frac{1}{2}c)$ eben den Bogen darstellen, dessen Sehne c ist. So wird wiederum die Richtigkeit der Gleichung (29) bewiesen.

Indem wir die Gleichungen (19), (27) und (29) verbinden, erhalten wir:

$$s = \cos F(t), \tag{30}$$

wo t die Tangente des Gränzkreisbogens s ist, die in dem einen Endpunkte berührt und von der Axe durch den andern abgeschnitten wird.

[§ 21.]

Um zu finden, auf welche Weise eine unendlich kleine Sehne oder ein Bogenelement einer Kurve mit Hülfe der rechtwinkligen Koordinaten x, y dargestellt wird, betrachten wir ein geradliniges Viereck (Fig. 13), in dem y' und y auf a senkrecht stehen und $y' > y$ ist. Wir tragen auf y' eine Linie gleich y ab, verbinden die Endpunkte der beiden y durch die Linie $2q$, die Endpunkte von y und y' durch die Linie t und nennen T den Winkel zwischen $2q$ und $y'-y$, ω den zwischen t und y, ω' den zwischen t und y'. Die Linie durch die Mitten von a und $2q$ muss auf a und $2q$ senkrecht stehen, folglich (s. die Gl. (20), (22) und (17)) ist:

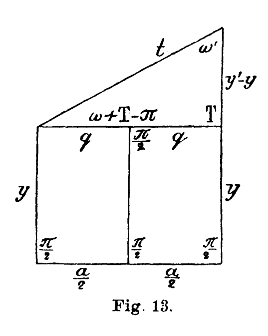


Fig. 13.

$$\operatorname{tang} F(y) = -\operatorname{tang} T \,.\, \cos F\left(\frac{a}{2}\right),$$

$$\operatorname{tang} F(q) = \sin F(y) \,.\, \operatorname{tang} F\left(\frac{a}{2}\right),$$

$$\sin F(t) = \frac{\sin F(2q) \,.\, \sin F(y'-y)}{1 - \cos T \,.\, \cos F(2q) \,.\, \cos F(y'-y)},$$

$$\cot \omega' \,.\, \operatorname{tang} T \,.\, \sin F(y'-y) + 1 = \frac{\cos F(y'-y)}{\cos T \,.\, \cos F(2q)},$$ [26

und daraus: [266

$$\cos T \,.\, \cos F(2q) = -\frac{2 \cos F(y)}{2 + \sin^2 F(y) \,.\, \operatorname{tang}^2 F\left(\frac{a}{2}\right)},$$

was wir einsetzen und finden:

$$(31) \qquad \sin F(t) = \frac{\sin F(a) \,.\, \sin F(y) \,.\, \sin F(y')}{1 - \sin F(a) \,.\, \cos F(y) \,.\, \cos F(y')},$$

$$\cot \omega' \,.\, \cos F(a) \,.\, \sin F(y') + \sin F(a) \,.\, \cos F(y) = \cos F(y').$$

Auf ähnliche Weise wird:

$$\cot \omega \,.\, \cos F(a) \,.\, \sin F(y) + \sin F(a) \,.\, \cos F(y') = \cos F(y).$$

Die beiden letzten Gleichungen sind dieselben, wie die (24), sie sind aber hier ohne jede Voraussetzung darüber abgeleitet, ob die Linien t und a zusammentreffen oder nicht.

Ferner finden wir noch:

$$(32) \qquad \operatorname{tang}(\omega + \omega') = \frac{\cos F(a) \,.\, \sin (F(y') + F(y))}{\cos (F(y') + F(y)) - \sin F(a)},$$

eine Gleichung, die wir in der Folge brauchen werden.

Bemerken wir noch, dass die Gleichung (31) für parallele t und a übergeht in:

$$(33) \qquad \frac{e^{2a} - 1}{e^{2t} - 1} = \sin^2 F(y).$$

Wenn wir jetzt $y' = y + dy$, $a = dx$ und $t = ds$ setzen, indem wir unter x und y die rechtwinkligen Koordinaten einer Kurve mit dem Bogen s verstehen, so wird:

$$1 - \sin F(t) = \frac{1}{2} ds^2; \quad F(y) - F(y') = dy \,.\, \sin F(y).$$ [267

Die Gleichung (31) und der Ausdruck für $\cot \omega'$ verwandeln sich in:

$$(34) \qquad ds = \sqrt{dy^2 + \frac{dx^2}{\sin^2 F(y)}},$$

$$(35) \qquad \cot \omega' = \frac{dy}{dx} \cdot \sin F(y).$$

Die erste liefert das Element der krummen Linie, die zweite bestimmt den Winkel der Tangente mit der Koordinate y.

Man kann die Gleichungen (34) und (35) leichter finden, wenn man beachtet, dass in dem unendlich kleinen Dreiecke $T = \frac{1}{2}\pi$ ist, ferner:

$$2q = \frac{a}{\sin F(y)}; \quad t^2 = (y' - y)^2 + 4q^2$$

$$\cot \omega' = \frac{y' - y}{2q}.$$ [27

[§ 22.]

Für einen Kreis, bei dem x vom Mittelpunkte aus gerechnet wird und r der Halbmesser ist (s. Gl. (26)), wird:

$$dy = - dx \cdot \frac{\cos F(x)}{\cos F(y)}$$

und die Integration ergiebt:

$$s = \cot F(r) \,.\, \arcsin \frac{\cos F(x)}{\cos F(r)} .$$

Hier stellt $\cos F(x) : \cos F(r)$ den Cosinus des y gegenüberliegenden Centriwinkels dar; demnach ist dieser Ausdruck für s vollständig derselbe wie (28). [268

Aus der Gleichung (27) für den Gränzkreis erhalten wir:

$$dx = dy \,.\, \cos F(y); \quad ds = \frac{dy}{\sin F(y)} .$$

Durch Integration finden wir:

$$s = \cot F(y),$$

wie schon früher (s. Gl. (29)).

Aus der Gleichung (25) für die Gerade erhalten wir:

$$dy \,.\, \sin^2 F(y) = \frac{e^x \,.\, \sin(A - F(l)) - e^{-x} \,.\, \sin(A + F(l))}{2 \sin A} \cdot dx,$$

ferner:

$$ds = \frac{4\, dx \,.\, \sin F(l) \,.\, \sin A}{4 \sin^2 A - \left\{ \sin(A - F(l)) e^x + \sin(A + F(l)) e^{-x} \right\}^2};$$

durch Integration von $x = 0$ ab wird:

$$s = \frac{1}{2} \log \frac{e^{2x} \cos^2 \left(\frac{A - F(l)}{2}\right) - \cos^2 \left(\frac{A + F(l)}{2}\right)}{\sin^2 \left(\frac{A + F(l)}{2}\right) - e^{2x} \sin^2 \left(\frac{A - F(l)}{2}\right)}$$

und hieraus:

$$\cos F(s) = \frac{\cos F(x)}{\sin A \,.\, \sin F(l) + \cos A \,.\, \cos F(l) \,.\, \cos F(x)} .$$

Dasselbe hätten wir auch unmittelbar aus der Auflösung von Dreiecken erhalten können.

Indem wir hier $A = F(l)$ setzen, finden wir für ein mit x paralleles s:

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2s} - 1} = \sin^2 F(l),$$ [269

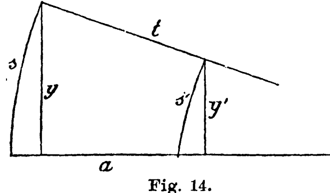


Fig. 14.

dieselbe Gleichung wie (33). Wir können diese unmittelbar und sehr leicht finden, wenn wir die Lothe y und y' (Fig. 14) betrachten, die von den Enden der Linie t auf eine zu dieser parallele Linie gefällt sind, wobei a den Abstand zwischen y und y' misst; ferner

denken wir uns noch von den Endpunkten von t aus zwei Gränz- [28
kreisbögen s und s', die t zur gemeinsamen Axe haben und die durch die andre Axe a und durch deren Verlängerung abgeschnitten werden. Es wird sein (s. Gl. (29), (19)):

$$s = \cot F(y), \quad s' = \cot F(y'), \quad \cos F(y') = e^{-a} . \cos F(y)$$

und hieraus:

$$s = s' . \frac{\sqrt{e^{2a} - \cos^2 F(y)}}{\sin F(y)} .$$

Wir denken uns ferner an die Bögen s und s' die Tangenten q und q' gezogen, die in den Endpunkten auf der mit a zusammenfallenden Axe senkrecht stehen und die von der andern Axe t und deren Verlängerung abgeschnitten werden. Es wird sein (s. Gl. (30)):

$$s = \cos F(q), \quad s' = \cos F(q'), \quad \cos F(q) = e^t \cos F(q'),$$

folglich:

$$s = s' . e^t. \tag{36}$$

eine Gleichung, die man auch unmittelbar erhalten kann, indem man sich auf die Eigenschaften des Gränzkreises stützt.

Indem wir hierin den früher gefundenen Werth von s ein- [270
setzen, erhalten wir:

$$\frac{e^{2a} - 1}{e^{2t} - 1} = \sin^2 F(y)$$

oder:

$$\frac{e^{-2a} - 1}{e^{-2t} - 1} = \sin^2 F(y') .$$

[§ 23.]

Wenn wir den Abstand eines Punktes vom Mittelpunkte der Koordinaten r nennen und φ den Winkel zwischen r und x, so ist:

$$dy = \frac{d\varphi . \cos\varphi . \cos F(r) + dr . \sin\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2\varphi . \cos^2 F(r)}},$$

$$\frac{dx}{\sin F(y)} = \frac{dr . \cos\varphi . \sin F(r) - d\varphi . \sin\varphi . \cot F(r)}{\sqrt{1 - \cos^2\varphi . \cos^2 F(r)}};$$

indem wir das in den Ausdruck (34) für ds einsetzen, erhalten wir:

$$ds = \sqrt{dr^2 + d\varphi^2 . \cot^2 F(r)} . \tag{37}$$

Beim Kreise ist r konstant, folglich ist: $dr = 0$, $s = \varphi . \cot F(c)$, wie schon vorhin.

[§ 24.]

Die Messung von Flächenräumen ist in der Geometrie auf die Sätze gegründet:

1. Flächenräume sind gleich, sobald sie aus kongruenten Theilen zusammengesetzt werden können, wenn auch in verschiedener Ordnung.

2. Ein Flächenraum ist kleiner als ein andrer, wenn er in diesem zweiten Platz hat und dabei einen Theil unbedeckt lässt.

3. Der Flächenraum [eines Dreiecks] nimmt unbegränzt ab, wenn eine seiner Seiten in dieser Weise abnimmt, während die andern eine bekannte Gränze nicht überschreiten. [271 / 29]

Beginnen wir mit Dreiecken, als den Figuren, aus denen alle übrigen geradlinigen Figuren zusammengesetzt werden.

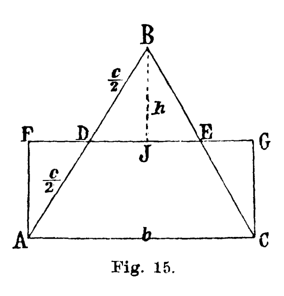


Fig. 15.

In dem Dreiecke ABC (Fig. 15) halbiren wir die beiden Seiten AB und BC. Durch die Halbirungspunkte ziehen wir die Linie DE und fällen auf diese von den Ecken des Dreiecks ABC aus die Lothe AF, CG und BJ. So entstehen kongruente Dreiecke: AFD kongruent mit DBJ, und CGE mit BJE. Hieraus folgt, dass der Flächenraum des Dreiecks ABC dem Flächenraume des Vierecks $AFGC$ gleich ist und dass die Flächenräume aller der Dreiecke über AC einander gleich sind, bei denen die Spitzen gleichweit von DE abstehen, das heisst, von der Geraden durch die Mitten der beiden Seiten, die die Spitze B mit der Grundlinie AC verbinden. Wir setzen $BJ = h$, $\angle BAC = A$, $AB = c$ und finden in dem Dreiecke AFD:

$$\sin A = \frac{\cos F(h)}{\cos F\left(\frac{c}{2}\right)},$$

eine Gleichung, die möglich ist, sobald c nicht kleiner als $2h$ ist, und die den Winkel A bestimmt, wenn h und c gegeben sind. Umgekehrt finden wir c, wenn A und h gegeben sind. Auf diese Weise wird jedes Dreieck ABC in ein rechtwinkliges verwandelt, dessen Katheten sind: AC und die durch die Gleichung: [272]

$$\cos F\left(\frac{c'}{2}\right) = \sin A \,.\, \cos F\left(\frac{c}{2}\right)$$

bestimmte Linie c'.

Es seien jetzt in irgend zwei Dreiecken die Seiten nicht gleich, zum Beispiel $c > c'$, und in dem einen von ihnen sei A' ein Winkel an c'; dann ist aus dem Vorhergehenden leicht zu ersehen, dass man, ohne den Flächenraum dieses letzteren Dreiecks zu verändern, c an die

Stelle der Seite c' setzen kann, sobald an die Stelle von A' der Winkel A'' aus der Gleichung:

$$\sin A'' = \sin A' \cdot \frac{\cos F\left(\frac{c'}{2}\right)}{\cos F\left(\frac{c}{2}\right)}$$

gesetzt wird.

Demnach kann man bei der Vergleichung der Flächeninhalte zweier Dreiecke immer annehmen, dass sie je eine gleiche Seite haben, die wir wieder Grundlinie nennen werden. Ferner kann jedes dieser Dreiecke, während es auf eben dieser Grundlinie bleibt, in ein rechtwinkliges verwandelt werden. In dieser Gestalt sind zwei Dreiecke nothwendig kongruent, sobald ihre Winkelsummen gleich sind, sonst erzeugten die Unterschiede ihrer Flächenräume ein Dreieck, bei dem die Winkelsumme π wäre. Folglich sind überhaupt die Flächenräume zweier Dreiecke gleich, wenn ihre Winkelsummen gleich sind. [273 30

[§ 25.]

Wenn dagegen der Flächeninhalt A eines Dreiecks grösser ist als der Flächeninhalt A' eines andern, so ist die Winkelsumme des ersten, die wir mit $\pi - s$ bezeichnen werden, kleiner als die Winkelsumme $\pi - s'$ des zweiten, folglich $s > s'$. Man kann sich davon auch überzeugen, indem man die Dreiecke mit den gleichen Grundlinien und den rechten Winkeln auf einander legt. Der Unterschied der beiden Dreiecke wird ebenfalls ein Dreieck sein, dessen Winkelsumme $\pi - (s - s') < \pi$ ist.

Es sei $s' = (n:m)s$, wo n und m ganze Zahlen sind und $n < m$. In dem Dreiecke A nennen wir die Katheten a, b; überdies bezeichnen wir mit α und β solche Linien, dass:

$$F(a) + F(\alpha) = \frac{\pi}{2}, \quad F(b) + F(\beta) = \frac{\pi}{2}$$

wird. Indem wir die Gleichungen (8) zuziehen, finden wir:

$$s = F(\alpha + \beta).$$

Wenn wir mit c und γ solche Linien bezeichnen, dass

$$F(c) + F(\gamma) = \frac{\pi}{2}, \quad F(\alpha + \gamma) = \frac{n}{m} s$$

wird, so ist der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und c gleich A'. Wenn wir ferner in der letzten Gleichung an die Stelle von n der Reihe nach alle Zahlen von 1 bis m setzten, so zerlegten die verschiedenen so entstehenden Werthe [274 von c das Dreieck A in m gleiche Theile, von denen n gerade A' ergeben müssten, folglich ist: $A' = (s' : s)A$.

Zu bemerken ist, dass bei der Zerlegung des Dreiecks A in m gleiche Theile, auch die Kathete b in m Theile zerlegt wird; wenn daher das Verhältniss $s : s'$ nicht genau durch das Verhältniss ganzer Zahlen dargestellt wird, so kann man wenigstens durch Vergrösserung der Zahlen m und n erreichen, dass ein Dreieck zu vernachlässigen ist, bei dem die eine Seite so klein gemacht werden kann wie man will.

Demnach verhalten sich die Flächeninhalte zweier Dreiecke wie die Beträge, die ihren Winkelsummen an zwei Rechten fehlen. Wir werden diesen Betrag, der der Winkelsumme an π fehlt, geradezu als den Flächeninhalt des Dreiecks annehmen, indem wir einstweilen das Dreieck, dessen Flächeninhalt die Einheit ist, unbestimmt lassen.

[§ 26.]

Indem wir die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit a [31 und b bezeichnen und seinen Flächeninhalt mit $\triangle$, finden wir:

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \triangle = \cos F\left(\frac{a}{2}\right) . \cos F\left(\frac{b}{2}\right) .$$

Sind a und b ausserordentlich klein, so dass man die dritten und [*275* höheren Potenzen vernachlässigen kann, so ist:

$$\triangle = \frac{ab}{2},$$

wie es in der gewöhnlichen Geometrie erhalten wird.

Der Flächeninhalt eines Vielecks mit n Seiten wird gleich dem Betrage sein, der dessen Winkelsumme an $(n-2)\pi$ fehlt.

In einem Vierecke, dessen Seiten a und a' auf b senkrecht stehen, dessen vierte Seite c und bei dem A der Winkel zwischen a und c und A' der zwischen a' und c ist, finden wir (s. Gl. (32)):

$$\operatorname{tang}(A + A') = \frac{\cos F(b) . \sin (F(a') + F(a))}{\cos (F(a') + F(a)) - \sin F(b)} .$$

Indem wir hier:

$$F(b) = \frac{\pi}{2} - F(\beta), \quad F(a) + F(a') = F(\alpha)$$

setzen, erhalten wir den Flächeninhalt des Vierecks gleich:

$$\pi - A - A' = F(\beta - \alpha) .$$

[§ 27.]

Der von einer krummen Linie begränzte Flächenraum ist grösser als der Flächeninhalt eines Vielecks, das anstatt von der Kurve, von deren Sehnen begränzt wird, und er ist kleiner als der eines Vielecks, das anstatt von der Kurve, von Tangenten an diese begränzt wird. Es lässt sich zeigen, dass bei Verkleinerung der Seiten der [*276*

Unterschied zwischen den Flächeninhalten beider Vielecke so klein gemacht werden kann wie man will. Die Gränze, der sich die Flächeninhalte der Vielecke auf diese Weise nähern, betrachtet man als die Grösse der Fläche, die von der krummen Linie eingeschlossen wird. Wirkliche Messungen werden auf ähnliche Weise ausgeführt.

Nehmen wir zum Beispiel den Kreis. Wenn wir von dem Ende eines Halbmessers aus auf einen zweiten ein Loth fällen und in dem Ende des zweiten ein Loth errichten und dieses verlängern, bis es den ersten Halbmesser trifft, so entstehen zwei Dreiecke, von denen das eine kleiner, das andre aber grösser ist als der Kreisausschnitt zwischen den beiden Halbmessern. Wir nennen α den Centriwinkel, A und A' die Beträge, die der Winkelsumme des kleinen und der des grossen Dreiecks an π fehlen, r sei der Halbmesser. Dann ist:

$$\operatorname{tang} A = \frac{1 - \sin F(r)}{\operatorname{tang}^2 \alpha + \sin F(r)} \cdot \operatorname{tang} \alpha,$$

$$\sin A' = \frac{\cos \alpha - \sqrt{\sin^2 F(r) - \sin^2 \alpha}}{\sin F(r)} \cdot \sin \alpha. \qquad [32$$

Wenn das Verhältniss: $2\pi : \alpha$ wächst, so wird sich: $(2\pi : \alpha) \operatorname{tang} A$ und ebenso: $(2\pi : \alpha) \sin A'$ einer bestimmten Gränze: [277

$$(38) \qquad \pi\left(e^{\frac{r}{2}} - e^{-\frac{r}{2}}\right)^2 = 4\pi \cot^2 F\left(\frac{r}{2}\right)$$

nähern, die den Flächeninhalt des Kreises darstellt. Ist r ausserordentlich klein, so wird dieser Ausdruck bei Vernachlässigung von r^4 und so weiter gleich πr^2.

[§ 28.]

Allgemein wird für eine krumme Linie mit den rechtwinkligen Koordinaten x und y der Flächeninhalt ds des Vierecks zwischen y, $y' = y + dy$ und dx gleich

$$F(\beta - \alpha),$$

wie wir gesehen haben, wobei:

$$F(\beta) = \frac{\pi}{2} - F(dx), \quad F(\alpha) = F(y) + F(y')$$

ist; folglich wird:

$$2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}\, ds = 2\, \frac{e^{dx} - 1}{e^{dx} + 1} \cdot \cot\left(\frac{F(y) + F(y')}{2}\right),$$

das heisst:

$$(39) \qquad ds = dx \,.\, \cot F(y).$$

Wenn wir statt des Vierecks aus y und y', das kleiner ist als das Element des von der Kurve begränzten Flächenraumes, das Viereck

betrachten, das von dx, y und z gebildet wird, wo z die Verlängerung von y' ist bis zum Zusammentreffen mit der durch den Endpunkt von y an die Kurve gezogenen Tangente, so wird sich das Element ds dem Gränzwerthe des Ausdruckes

$$F(\beta - \alpha')$$

nähern, unter dem es beständig bleibt, und wo [278

$$F(\alpha') = F(y) + F(z)$$

ist. Der Werth von z wird durch die Gleichung (s. Gl. (24) und (35)):

$$\cos F(z) = \frac{e^{dx} + e^{-dx}}{2} \cdot \cos F(y) + \frac{e^{dx} - e^{-dx}}{2dx} \cdot dy \,.\, \sin^2 F(y)$$

bestimmt, folglich ist: $z = y'$.

[§ 29.]

Für den Kreis wird:

$$ds = dx \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 F(x)}{\sin^2 F(r)} - 1}\,,$$

wobei r der Halbmesser ist und die Koordinaten x vom Mittel- [33 punkte aus gerechnet werden. Durch Integration finden wir:

$$s = \frac{1}{\sin F(r)} \cdot \arcsin \frac{\cos F(x)}{\cos F(r)} - \arcsin \frac{\cot F(x)}{\cot F(r)}\,.$$

Dieser Ausdruck lässt sich folgendermassen prüfen. Wenn wir den Centriwinkel φ nennen, so ist der Flächeninhalt des Kreisausschnittes mit dem Centriwinkel $\frac{1}{2}\pi - \varphi$ gleich:

$$\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\left(\frac{1}{\sin F(r)} - 1\right)$$

(s. den Ausdruck (38)). Der Flächeninhalt des von x, y und r gebildeten rechtwinkligen Dreiecks ist:

$$\arccos \frac{\cot F(x)}{\cot F(r)} - \varphi\,;$$

die Summe dieser beiden Flächenräume ergiebt s von Neuem und [279 es ist dabei:

$$\cos \varphi = \frac{\cos F(x)}{\cos F(r)}\,.$$

Wird x vom Umfange nach dem Mittelpunkte hin gerechnet, so ist:

$$s = \frac{1}{\sin F(r)} \cdot \arccos \frac{\cos F(r-x)}{\cos F(r)} - \arccos \frac{\cot F(r-x)}{\cot F(r)}$$

oder:

$$s = \frac{1}{\sin F(r)} \cdot \arcsin \frac{\operatorname{tang} F(r)}{\operatorname{tang} F(y)} - \arcsin \frac{\cos F(y)}{\cos F(r)}\,.$$

Indem wir hier $r = \infty$ setzen, finden wir den Flächenraum zwischen den Koordinaten und einem Gränzkreisbogen:

$$s = \cot F(y) - \frac{\pi}{2} + F(y).$$

Genau dasselbe würden wir finden, wenn wir in den allgemeinen Ausdruck (39) den Werth von x aus der Gleichung (27) einsetzten und dann integrirten. Wir wollen bemerken, dass $\frac{1}{2}\pi - F(y)$ einen Flächenraum darstellt, der sich nach der einen Seite hin unendlich weit erstreckt und der auf den andern Seiten von zwei Gränzkreisaxen und von der Koordinate y begränzt wird; folglich ist der Flächenraum zwischen dem Bogen der Kurve und deren beiden Axen gleich:

$$\cot F(y),$$

also eben so gross wie der Bogen selbst (s. Gl. (29)).

Endlich hat der Flächenraum zwischen zwei Axen und zwei [280 Gränzkreisbögen, die den Abstand t von einander besitzen und [34 von denen wir den grösseren s nennen, den Werth (s. Gl. (36)):

$$s(1 - e^{-t}) \tag{39a}$$

oder:

$$s'(e^t - 1),$$

wo s' der kleinere von beiden Bögen ist.

Man kann diese beiden Ausdrücke für den Flächeninhalt, ähnlich wie die Gleichung (36), finden, ohne die Gleichungen (12) und (17) als bekannt vorauszusetzen. Man braucht sich zu diesem Zwecke blos den Flächeninhalt durch Axen und durch Bögen von Gränzkreisen in gleiche Theile zerlegt zu denken.

[§ 30.]

Bedeutet r den Abstand eines Kurvenpunktes von dem Koordinatenanfange, φ den Winkel zwischen r und einer durch eben diesen Koordinatenanfang gezogenen festen Axe, so kann das Element des Flächenraumes so dargestellt werden (s. Formel (38)):

$$ds = d\varphi\left(\frac{1}{\sin F(r)} - 1\right).$$

Die Integration ergiebt:

$$s = -\varphi + \int_0 \frac{d\varphi}{\sin F(r)}; \tag{40}$$

Für den Gränzkreis zum Beispiel ist: [281

$$F\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

folglich;

$$\frac{1}{2} s = -\varphi + \operatorname{tang} \varphi .$$

Hier wird der Abstand r von einem Punkte auf der Kurve aus genommen und der Winkel φ wird von der Tangente in diesem Punkte an gerechnet.

[§ 31.]

Ein Flächenraum kann ferner durch parallele Linien in Elemente zerlegt werden. Die vom Ende der Koordinate x ausgehende Parallele zur y-Axe möge die Kurve in dem Abstande u treffen (Fig. 16). Der Flächenraum, der sich zwischen den beiden durch die Enden von x und von $x + dx$ gezogenen Parallelen bis ins Unendliche erstreckt, ist gleich

$$-dF(x),$$

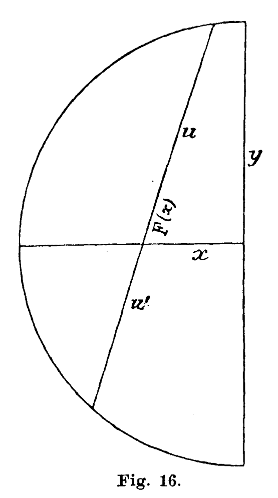


Fig. 16.

und der durch die Kurve begränzte Theil dieses Flächenraumes (s. Formel (39a)):

$$ds = -dF(x) \, . \, [1 - e^{-u}],$$

woraus sich durch Integration ergiebt:

$$(41) \qquad s = \frac{\pi}{2} - F(x) - \int_0 dx \, . \, e^{-u} \, . \sin F(x) .$$

Nennen wir u' den Abstand, in dem die Parallele zur y-Axe die Kurve auf der andern Seite der x-Axe trifft, so kann das Element des Flächenraumes auch so ausgedrückt werden:

$$ds = -dF(x) \, . \, [e^{u'} - 1],$$

folglich ist der Flächeninhalt: [35 / 282]

$$(42) \qquad s = \int_0 dx \, . \, (e^{u'} - e^{-u}) \, . \sin F(x) .$$

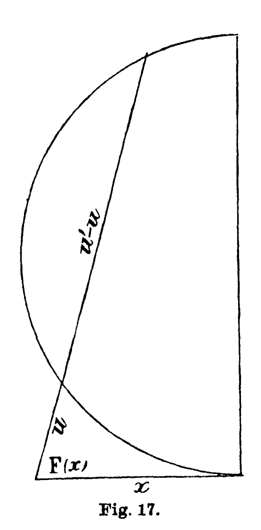


Fig. 17.

Sind u und u' die Abstände (Fig. 17), in denen eine Parallele zur y-Axe eine Kurve zweimal auf derselben Seite der x-Axe trifft, wobei diese ausserhalb des Flächenraumes der Kurve gezogen ist, so wird:

$$(43) \qquad s = \int_0 dx \, . \, (e^{-u} - e^{-u'}) \, . \sin F(x) .$$

Rechnet man beim Kreise x vom Mittelpunkte aus, durch den die Koordinatenaxen der x und

der y gehen, so ergiebt das Dreieck aus x, u und dem Halbmesser r, dem der Winkel $F(x)$ gegenüberliegt:

$$\cos^2 F(x) \, . \cos F(u) + \frac{\sin F(u) \, . \sin F(x)}{\sin F(r)} = 1$$

und hieraus:

$$e^u \, . \sin F(x) = \frac{1 + \sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) \, . \cos^2 F(x)}}{\sin F(r)}$$

$$e^{u'} = \frac{\sin F(x)}{\sin F(r)} \cdot \frac{1 + \sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) \, . \cos^2 F(x)}}{1 + \cos^2 F(x)} .$$

Die Gleichung (41) ergiebt nach der Integration: [283

$$s = \varphi - \arcsin (\sin \varphi \, . \operatorname{tang} F(r)) +$$

$$+ \frac{1}{\sin F(r)} \left\{ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctang} (\sin \varphi) - \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) \sin^2 \varphi}}{\sin \varphi} \right\},$$

wo $\varphi = \frac{1}{2}\pi - F(x)$. Dasselbe hätten wir erhalten, hätten wir uns s aus einem Kreisausschnitte und aus dem Dreiecke mit den Seiten x und r und dem Winkel $F(x)$ gegenüber r zusammengesetzt gedacht.

[§ 32.]

[Nr. 7, 8 571

Krumme Oberflächen werden durch die ebenen Flächen zusammenhängender Dreiecke gemessen, deren Ecken auf der Oberfläche liegen und deren Abmessungen um so kleiner sein müssen, je grössere Genauigkeit bei der Berechnung erforderlich ist. Die Gränze der Annäherung wird man sich zugleich als die mathematische Grösse der Oberfläche vorstellen, welche die Differentialrechnung unter der Annahme unendlich kleiner ebener Flächen unmittelbar liefert.

Es mögen die Koordinaten: x, senkrecht darauf y und z senkrecht auf y [und auf der Ebene von x und y] den Ort eines Punktes bestimmen. Für $F(x)$, $F(y)$, $F(z)$ schreiben wir der Kürze wegen: X, Y, Z. Ausser dem Punkte (x, y, z) betrachten wir noch zwei [36 mit den Koordinaten:

$$x, \quad y + dy, \; z + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy,$$

$$x + dx, \quad y, \quad z + \left(\frac{dz}{dx}\right) dx.$$

Wir erhalten für die Quadrate der Abstände (s. Gl. (34)) [572 des ersten vom zweiten:

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 dy^2 + \frac{dy^2}{\sin^2 Z},$$

des ersten vom dritten:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 dx^2 + \frac{dx^2}{\sin^2 Y \, . \sin^2 Z},$$

des zweiten vom dritten:

$$\left(\left(\frac{dz}{dy}\right) dy - \left(\frac{dz}{dx}\right) dx\right)^2 + \frac{dy^2}{\sin^2 Z} + \frac{dx^2}{\sin^2 Y . \sin^2 Z}.$$

Der Flächeninhalt des unendlich kleinen Dreiecks aus diesen drei Abständen, in dem man die Winkelsumme schon gleich π annehmen muss, wird sein:

$$\frac{dx\,dy}{2 \sin Z} \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 Y}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 Y \sin^2 Z}}.$$

Hätten wir noch statt des ersten Punktes den Punkt genommen, dessen Koordinaten durch Veränderung von x in $x + dx$ und von y in $y + dy$ hervorgehen, so wären die Abstände und folglich auch der Flächeninhalt des Dreiecks dieselben geblieben. Die Summe dieser beiden Flächenräume ergiebt den Zuwachs der Oberfläche, wenn x um dx und y um dy vermehrt wird. Nennen wir die Oberfläche S, so finden [573 wir:

$$(44) \qquad \left(\frac{d^2 S}{dx\,dy}\right) = \frac{1}{\sin Z} \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 Y}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 Y . \sin^2 Z}}.$$

[§ 33.]

Für eine Kugelfläche mit dem Halbmesser r wird, wenn wir die Koordinaten x, y, z vom Mittelpunkte aus rechnen und $F(r) = R$ setzen:

$$\sin X . \sin Y . \sin Z = \sin R,$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{\cos X}{\cos Z}, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{\cos Y}{\cos Z},$$

$$\left(\frac{d^2 S}{dx\,dy}\right) = \frac{1}{\sin Z} \sqrt{\frac{\cos^2 X}{\cos^2 Z} + \frac{\cot^2 Y}{\cos^2 Z} + \frac{1}{\sin^2 Y . \sin^2 Z}}.$$

Indem wir den Werth von Z einsetzen, erhalten wir: [37

$$\left(\frac{d^2 S}{dX\,dY}\right) = \frac{\cos R}{\sin^2 R} \cdot \frac{\sin Y . \sin^2 X}{\sqrt{\sin^2 X . \sin^2 Y - \sin^2 R}}.$$

Durch Multiplikation mit $4dY$ und durch Integration von

$$\sin Y = \sin R : \sin X \quad \text{bis} \quad Y = \frac{1}{2}\pi$$

finden wir für den ganzen Umfang:

$$\left(\frac{dS}{dX}\right) = 2\pi . \sin X \cdot \frac{\cos R}{\sin^2 R}.$$

Durch Multiplikation mit dX und durch Integration von X bis $X = \frac{1}{2}\pi$, erhalten wir:

$$S = 2\pi \cdot \frac{\cos R . \cos X}{\sin^2 R},$$ [574

den Ausschnitt der Kugelfläche zwischen zwei auf einem Halbmesser senkrechten Ebenen, von denen die eine durch den Mittelpunkt geht, die andre aber vom Mittelpunkte den Abstand x hat.

Die ganze Kugelfläche wird:

$$(45) \qquad 4\pi \,.\, \cot^2 R = \pi(e^r - e^{-r})^2.$$

Der Abschnitt im Abstande x vom Mittelpunkte ist gleich:

$$2\pi \frac{\cos R}{\sin^2 R}(\cos R - \cos X),$$

oder gleich:

$$\frac{2\pi \cos X \cos R}{1 - \cos X \,.\, \cos R}$$

im Abstande x von der Oberfläche. Dieser letzte Ausdruck ergiebt für $r = \infty$ den Abschnitt der Fläche der Gränzkugel:

$$\pi(e^{2x} - 1).$$

[§ 34.]

Indem wir für jede Kugelfläche:

$$\cos\psi = \operatorname{tang} R \,.\, \cot Y, \quad \cos X = \cos R \,.\, \sin\psi \,.\, \sin\varphi$$

setzen, erhalten wir:

$$\left(\frac{d^2 S}{d\psi\, d\varphi}\right) = -\frac{\cos^2 R}{\sin R} \cdot \frac{\sin\psi \sqrt{1 - \cos^2 R \,.\, \sin^2\psi \,.\, \sin^2\varphi}}{1 - \cos^2 R \,.\, \sin^2\psi}.$$

Durch Multiplikation mit $8 d\psi\, d\varphi$ und durch Integration von $\psi = 0$ bis $\psi = \frac{1}{2}\pi$ und von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ müssen wir von Neuem die Grösse der ganzen Kugelfläche finden; folglich ist: [38 / 575]

$$(46) \qquad \frac{\pi}{2\sin R} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi\, d\varphi \sin\psi \sqrt{1 - \cos^2 R \,.\, \sin^2\psi \,.\, \sin^2\varphi}}{1 - \cos^2 R \,.\, \sin^2\psi},$$

ein Integral, an dem eine Eigenschaft der elliptischen Funktion:

$$E(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - a^2 \sin^2\varphi}$$

sichtbar ist, nämlich:

$$\frac{\pi a}{2\sqrt{1 - a^2}} = \int_0^a \frac{x\, dx\, E(x)}{(1 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Wenn wir die andre vollständige elliptische Funktion:

$$H(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2\varphi}}$$

zu Hülfe nehmen, und beachten, dass

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi \,.\, d\varphi \,.\, \cos\psi \,.\, \sqrt{1-\sin^2 R \sin^2\psi \sin^2\varphi}}{1-\sin^2 R \,.\, \sin^2\psi} = H(\sin R)$$ [576

ist, oder, was ganz dasselbe:

$$xH(x) = \int_0 \frac{dx\, E(x)}{1-x^2},$$

so ergiebt die Gleichung (46), wenn wir darin $\frac{1}{2}\pi - R$ an die Stelle von R setzen, mit $\cos R \,.\, dR$ multipliciren und von $R = 0$ an integriren:

$$\frac{\pi R}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi \,.\, d\varphi \,.\, \sin R \,.\, \sin\psi}{\sqrt{1-\sin^2 R \,.\, \sin^2\psi \,.\, \sin^2\varphi}}.$$

Indem wir ferner in Bezug auf ψ zwischen den bezeichneten Gränzen integriren, erhalten wir:

$$\pi R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} \cdot \log\left\{\frac{1+\sin R \sin\varphi}{1-\sin R \sin\varphi}\right\},$$

was man noch anders darstellen kann, indem man $\varphi = F(x)$ setzt: [39

$$\pi R = \int_0^\infty dx \log\left\{\frac{e^{2x}+1+2e^x \sin R}{e^{2x}+1-2e^x \sin R}\right\},$$

oder bei theilweiser Integration: [577

$$(47) \qquad \frac{\pi R}{4\sin R} = \int_0^\infty \frac{(e^{2x}-1)e^x x\, dx}{e^{4x}+2e^{2x} \,.\, \cos 2R + 1},$$

ein Integral, das nur für $R = \frac{\pi}{2}$ bekannt ist, nämlich:

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^\infty \frac{x\, dx\, e^x}{e^{2x}-1}.$$

[§ 35.]

Die Richtigkeit des Integrals (47) kann man auch noch in dem Falle zeigen, wo an der Stelle von $\cos 2R$ eine Zahl grösser als Eins steht.

Wir beginnen mit:

$$\int_0^\pi d\psi \,.\, \log\cot\frac{1}{2}\psi = 0$$

oder:

$$\int_0^{\pi} d\psi \,.\, \log\left(e^a \,.\, \cot\frac{1}{2}\psi\right) = \pi a.$$

Hierin setzen wir $e^x = e^a \cot\frac{1}{2}\psi$ und das Integral verwandelt sich in:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^{x-a} + e^{-x+a}} = \frac{\pi}{2}\,a. \qquad [578$$

Wir zerlegen es in zwei Theile, den einen von $x = 0$ bis $x = \infty$, den andern von $x = -\infty$ bis $x = 0$. Der letzte kann anders dargestellt werden:

$$-\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{e^{-x-a} + e^{x+a}}.$$

Beide zusammen ergeben:

$$\int_0^{\infty} \frac{(e^x - e^{-x})\,x\,dx}{e^{2x} + (e^{2a} + e^{-2a}) + e^{-2x}} = \frac{\pi a}{2(e^a - e^{-a})}.$$

Wenn wir hier $a\sqrt{-1}$ an die Stelle von a setzen, so finden wir wieder (47).

[§ 36.]

Für eine Umdrehungsfläche um die x-Axe muss man in der Gleichung (44) setzen:

$$\sin Y \,.\, \sin Z = \sin R;$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{\cot R}{\cos Z} \cdot \left(\frac{dR}{dx}\right); \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{\cos Y}{\cos Z},$$

wo $R = F(r)$ ist, und x und r die Koordinaten der Punkte der [40 erzeugenden Linie sind. Hiernach erhalten wir:

$$\left(\frac{d^2 S}{dX\,dY}\right) = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dR}{dx}\right)^2}}{\sin X \,.\, \sin^2 R \,.\, \sqrt{1 - \operatorname{tang}^2 R \,.\, \cot^2 Y}}. \qquad [579$$

Durch Multiplikation mit $4dY$ und Integration von $Y = \frac{1}{2}\pi$ bis $Y = R$ finden wir:

$$(48) \qquad \left(\frac{dS}{dx}\right) = \frac{2\pi \cos R}{\sin^2 R} \sqrt{1 + \left(\frac{dR}{dx}\right)^2}.$$

Für den geraden Kegel (s. Gl. (18)) ist:

$$\operatorname{tang} A = \operatorname{tang} X \,.\, \cos R,$$

folglich:

$$dS = -\frac{2\pi \cos R \,.\, dX}{\sin^3 R \,.\, \sin X \,.\, \cos A}.$$

Wenn wir die Seite des Kegels mit l bezeichnen und $F(l) = L$ setzen, so ist (s. Gl. (14)):

$$\cos L \, . \cos A = \cos X; \quad \text{tang}\, L = \sin A \, . \, \text{tang}\, R;$$

demnach:

$$dS = -\frac{2\pi \sin A \, . \cos L \, . \, dL}{\sin^2 L}$$

und die Integration ergiebt:

$$S = 2\pi \sin A \, . \left(\frac{1}{\sin L} - 1\right).$$

Für den Gränzkreis ist: $\sin R = e^{-x}$; indem wir das in die [580 Gleichung (48) einsetzen, erhalten wir dasselbe wie schon vorhin.

Diese Beispiele genügen, um einen Begriff von der Berechnung der Grösse krummer Oberflächen zu geben. Jetzt wollen wir uns mit der Bestimmung des Inhalts von Körpern beschäftigen.

[§ 37.]

Ein Körper sei begränzt von zwei Gränzkugeln, die nach derselben Seite gekrümmt sind und deren gegenseitiger Abstand c als gemeinsame Axe dient, ferner von einer kegelförmigen Oberfläche, deren Erzeugende c immer der Axe der beiden Kugelflächen parallel bleibt. Der Inhalt dieses Körpers muss dem Ausschnitte S auf einer der beiden Gränzkugeln proportional sein und ausserdem von c abhängen; folglich wird er gleich $S \, . \, C$ sein, wo C eine Funktion von c ist. Wenn S der grössere der beiden Ausschnitte ist, das heisst der, auf dessen innerer Seite c liegt, und wenn er ein Rechteck aus den Gränzkreisbogen a und b bildet, so ist $S = ab$ und der kleinere Ausschnitt gleich $ab \, . \, e^{-2c}$ (s. Gl. (36)). Ueberhaupt muss, wie auch der Ausschnitt S beschaffen sein mag, der andre, der kleiner ist [581 als dieser, gleich $e^{-2c}S$ sein. Indem wir jetzt die kegelförmige Oberfläche über den kleineren Ausschnitt hinaus verlängern und sie [41 jedesmal im Abstande c durch eine zu c senkrechte Gränzkugel schneiden, erhalten wir Körper, deren Rauminhalte sind:

$$S \, . \, C; \quad e^{-2c} S \, . \, C; \quad e^{-4c} S \, . \, C; \ldots$$

und deren Summe sich folglich dem Werthe:

$$\frac{S \, . \, C}{1 - e^{-2c}}$$

um so mehr nähert, je weiter sich der kegelförmige Körper erstreckt, so dass diese Gränze nunmehr den Inhalt des Körpers mit unendlich verlängerter Oberfläche darstellt. In diesem Falle kann der Faktor von S nicht mehr von c abhängen, und demnach müssen wir den

Rauminhalt des abgestumpften Kegels von der Höhe c, den wir zuerst betrachteten, gleich

$$\frac{1}{2} S(1 - e^{-2c}) \tag{49}$$

annehmen, womit wir zugleich erreichen, dass er für ein sehr kleines c gleich $c \,.\, S$ wird, wie in der gewöhnlichen Geometrie. [582

Nunmehr kann die Berechnung des Rauminhaltes eines jeden Körpers dadurch ausgeführt werden, dass man ihn mit Hülfe von Kegelflächen, deren Erzeugende irgend einer willkürlich angenommenen Axe parallel sind, in Elemente zerlegt.

[§ 38.]

Zum Beispiel mögen vier Ebenen, die der Reihe nach auf einander senkrecht stehen, einander in parallelen Linien schneiden; endlich möge der Körper noch von einer Cylinderfläche begränzt sein, deren Leitlinie ein Gränzkreisbogen b auf einer der vier senkrechten Ebenen sein möge, und zwar seien die beiden parallelen Schnittlinien dieser Ebene mit den beiden andern zugleich Axen des Bogens b; die Erzeugende der Cylinderfläche aber sei das Loth a auf b, das durch die gegenüberliegende Ebene abgeschnitten wird. Wir denken uns durch b eine Gränzkugel und bezeichnen mit s den Bogen, der auf dieser als Schnitt mit der seitlichen Ebene durch a entsteht und der von der gegenüberliegenden Ebene abgeschnitten wird. Es sei y der Abstand zwischen den Endpunkten von a und s. Lassen wir diese beiden letzten [583 Linien sich ändern, so wird der Rauminhalt des Körpers P durch parallele Ebenen in Elemente

$$dP = \frac{1}{2} b e^{2y} ds$$

zerlegt.

Wir setzen hierin (s. Gl. (29), (30) und (36)):

$$s = \cos F(a); \quad e^{-y} = \sin F(a)$$

und finden durch Integration von $a = 0$ an:

$$P = \frac{1}{2} ab. \tag{50}$$

Hier kann man unter b zugleich auch den Flächenraum verstehen, [42 der durch den Bogen b und durch die beiden von dessen Enden aus unendlich verlängerten Axen begränzt wird. Wenn daher x der Abstand von einer Geraden ist und dx ein unendlich kleines Stück von x zwischen zwei Parallelen zu dieser Geraden, so ist: $b = - dF(x)$.

[§ 39.]

Es seien nunmehr a und b die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks und a liege der Winkel A gegenüber. Wir betrachten eine Pyramide, deren Grundfläche dieses Dreieck ist, und die sich bis ins Unendliche erstreckt, indem sie derart von drei Ebenen begränzt wird, dass alle drei Schnittlinien oder die Kanten der Pyramide zu [584 einander parallel sind und die eine auf der Grundfläche im Scheitel des Winkels A senkrecht steht. Wir nehmen a und b als veränderlich an, A als fest. Durch zu dem Lothe parallele Ebenen wird die Pyramide P in Elemente zerlegt, so dass (50):

(51) $$dP = -\frac{1}{2}\, a\,.\, dF(b)$$

ist; indem wir hierin:

$$B = F(b);\quad \cot B = \cot A\,.\,\cos F(a)$$

setzen, erhalten wir:

(52) $$dP = -\frac{1}{4}\, dB\,.\,\log\frac{\sin(B+A)}{\sin(B-A)}.$$

Wenn wir nur die erste Potenz von $\operatorname{tang} A$ beibehalten, an deren Stelle 2π setzen und dann von $B = \frac{1}{2}\pi$ an integriren, so finden wir:

(53) $$P = -\pi \log \sin B = \pi \log\left(\frac{e^b + e^{-b}}{2}\right)$$

als Rauminhalt des geraden Kegels, der sich bis ins Unendliche erstreckt, dessen Grundfläche ein Kreis mit dem Halbmesser b und dessen Axe zur Seite parallel ist.

Durch Differentiation der letzten Gleichung nach b finden wir: [585

(54) $$dP = \pi\, db\,.\,\cos F(b),$$

die Grösse der Kegelschale, die in der Richtung des Halbmessers b des Grundkreises die Dicke db besitzt und die sich unendlich weit erstreckt, indem sie zur Axe des Kegels parallel verläuft.

[§ 40.]

Um die Grösse eines geraden Kegels von endlicher Höhe zu finden, muss man dessen Oberfläche durch zur Höhe senkrechte Ebenen in Elemente zerlegen, sodann, von der Spitze beginnend, alle die Kegelschalen addiren, die, zur Höhe des Kegels parallel, von diesen Elementen ausgehen, und die Summe von dem Rauminhalte des Kegels, der von der letzten Kegelschale begränzt wird, abziehen. Demgemäss sei x die Höhe des Kegels, y der Halbmesser der Grundfläche, c die Seite, A der Winkel an der Spitze zwischen x und c. Der Kürze halber [43

bezeichnen wir die Winkel $F(x)$, $F(y)$, $F(c)$ mit X, Y, C. In dem rechtwinkligen Dreiecke mit den Katheten x, y und der Hypotenuse c ist:

$$\cos X = \cos A \,.\, \cos C; \quad \operatorname{tang} A = \cos Y \,.\, \operatorname{tang} X; \qquad [586$$
$$\operatorname{tang} C = \sin A \,.\, \operatorname{tang} Y.$$

Indem wir hier A als fest, alle übrigen Grössen als veränderlich betrachten, finden wir:

$$dy = dx \frac{\cos Y}{\sin^2 Y \,.\, \cos X}.$$

In dieser Weise ändert sich y bei einem Kegel mit der Höhe x; wäre aber x unendlich, so wäre der Zuwachs von y (19) gleich:

$$dx \frac{\cos Y}{\sin^2 Y}.$$

Der Unterschied zwischen beiden ergiebt:

$$\frac{2\,dx \,.\, \sin^2 \frac{1}{2} X \,.\, \cos Y}{\cos X \,.\, \sin^2 Y},$$

das Stück der auf y folgenden Ordinate, das eine durch den Endpunkt von y zu x gezogene Parallele abschneidet. Hiernach ist der Rauminhalt des Kegels (54):

$$\begin{aligned} P &= \pi \int dy \,.\, \cos Y - 2\pi \int \frac{dx \,.\, \sin^2 \frac{1}{2} X \,.\, \cos^2 Y}{\cos X \,.\, \sin^2 Y} \\ &= \pi \int dy \cos Y \,.\, \cos X = \pi \int dx \cot^2 Y \\ &= \pi \int \frac{dx}{\sin^2 Y} - \pi x, \end{aligned} \qquad [587$$

wo die Integrale mit $x = 0$, $y = 0$ beginnen. Ferner ergiebt die Gleichung für C und X:

$$dx \,.\, \sin^2 X = dc \,.\, \cos A \,.\, \sin^2 C;$$

indem wir das mit $\sin^2 Y$ multipliciren und darin: $\sin X \,.\, \sin Y = \sin C$ einsetzen, erhalten wir:

$$dx = dc \,.\, \cos A \,.\, \sin^2 Y,$$

folglich:

$$(55) \qquad P = \pi(c \cos A - x).$$

Um hierin die Buchstaben c und A allein einzuführen, muss man an Stelle von x setzen:

$$\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{1 + \cos^2 \frac{1}{2} A \,(e^{2c} - 1)}{1 + \sin^2 \frac{1}{2} A \,(e^{2c} - 1)} \right\}$$

oder in Gestalt einer Reihe:

$$x = \frac{1}{2} \cos A \,.\, \left[(e^{2c} - 1) - \frac{1}{2}(e^{2c} - 1)^2 + \frac{1}{3}(e^{2c} - 1)^3 \,.\, \frac{3 + \cos^2 A}{4} - \cdots \right],$$

oder, wenn man die Annäherung bis auf c^3 treibt: [44

$$x = \cos A\left(c - \frac{1}{3}c^3 . \sin^2 A\right),$$

demnach wird: [588

$$P = \frac{1}{3}\pi c^3 . \cos A . \sin^2 A = \frac{1}{3}\pi y^2 x,$$

wie es in der gewöhnlichen Geometrie erhalten wird.

Ist y so klein, dass man sich mit seinen zweiten Potenzen begnügen kann, so wird:

$$\cos A = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 C . \cot^2 Y,$$

$$x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + \cos A . \cos C}{1 - \cos A . \cos C}\right) = c - \frac{\cot^2 Y}{2\cos C}.$$

Indem wir diese Werthe in die Gleichung (55) einsetzen, hierauf durch die Grösse der Grundfläche des Kegels dividiren und mit der Oberfläche der Kugel vom Halbmesser c multipliciren ((38) und (45)), finden wir den Rauminhalt der Kugel:

$$\frac{\pi}{2}(e^{2c} - e^{-2c} - 4c). \tag{56}$$

[§ 41.]

Mit Hülfe von Kegelschalen, die sich bis ins Unendliche erstrecken, können wir überhaupt den Rauminhalt jedes Körpers finden, der von einer Umdrehungsfläche begränzt wird. Die rechtwinkligen Koordinaten der erzeugenden Linie seien x, y und mögen von dem Punkte aus gerechnet werden, in dem die Oberfläche des Körpers die x-Axe, die zugleich auch als Drehungsaxe dient, schneidet. Wenn beim [589 Uebergange von x in $x + dx$ die Koordinate y in $y + dy$ übergeht, so wird die zu x durch den Endpunkt von y gelegte Parallele, wie wir vorhin gesehen haben, von $y + dy$ die Linie:

$$dy + dx\frac{\cos Y}{\sin^2 Y}$$

abschneiden. Indem wir mit $\pi \cos Y$ multipliciren, erhalten wir eine Kegelschale wie die, deren Werth durch die Gleichung (54) gegeben ist. Indem wir hierauf von $x = 0$ an integriren und:

$$\pi\int dy \cos Y,$$

das heisst, einen Kegel über einem Kreise vom Halbmesser y (53), wegwerfen, erhalten wir den Rauminhalt des Körpers:

$$\pi\int dx \cot^2 Y, \tag{57}$$

wo die Gränzen des Integrals beliebig sind und wo x nach der einen oder nach der andern Seite gerechnet werden kann.

Zum Beispiel ist für die Kugel:

$$\sin X \,.\, \sin Y = \sin R,$$

wo $R = F(r)$ ist, r der Halbmesser, $X = F(x)$ und wo die [45 Koordinate x vom Mittelpunkte aus gerechnet wird. Wir finden den Rauminhalt der Kugel gleich:

$$\pi \int dx \left(\frac{\sin^2 X}{\sin^2 R} - 1\right), \qquad [590$$

nach der Integration von $x = 0$ ab wird der Kugelausschnitt

$$(58) \qquad \pi\left(\frac{\cos X}{\sin^2 R} - x\right).$$

Wenn wir mit 2 multipliciren und $X = R$ setzen, so erhalten wir die ganze Kugel, wie vorhin (56).

Indem wir den Winkel zwischen x und r mit A bezeichnen und sodann die Grösse der ganzen Kugel mit $\sin^2 \frac{1}{2} A$ multipliciren, erhalten wir einen kegelförmigen Kugelausschnitt:

$$2\pi\left(\frac{\cos R}{\sin^2 R} - r\right) \sin^2 \frac{1}{2} A.$$

Wenn wir dagegen von der halben Kugel den Ausschnitt (58) wegnehmen, so erhalten wir den Kugelabschnitt im Abstande x vom Mittelpunkte:

$$\pi\left(\frac{2 \cos R \,.\, \sin^2 \frac{1}{2} A}{\sin^2 R} - (r - x)\right).$$

Der Unterschied dieser beiden letzten Ausdrücke liefert den Rauminhalt des Kegels, wie er vorhin (55) gefunden worden ist.

Wenn wir x von der Kugeloberfläche aus rechnen, so wird [591 der durch eine Ebene im Abstande x bestimmte Abschnitt gleich:

$$\pi\left(\frac{\cos X}{1 - \cos X \,.\, \cos R} - x\right)$$

sein. Für $r = \infty$ finden wir den Abschnitt des Körpers, der von einer Gränzkugel begränzt wird:

$$\pi\left(\frac{e^{2x} - 1}{2} - x\right).$$

[§ 42.]

Der allgemeine Differentialausdruck zur Berechnung des Rauminhaltes jedes Körpers kann durch Elemente gegeben werden, in die der Körper zerlegt wird mit Hülfe von Gränzkugeln und von zwei Reihen paralleler Ebenen, die Normalebenen der Gränzkugeln sind

und bei denen jede Reihe auf der andern senkrecht steht. In diesem Falle bezeichnen wir mit ξ den vom Koordinatenanfange aus gerechneten Abstand auf einer der Axen der Gränzkugeln und wählen daher diese Axe zugleich zur Axe der Koordinaten ξ. Mit η bezeichnen wir einen auf ξ senkrecht stehenden Bogen auf einer Gränzkugel, und ζ sei ein ebensolcher Bogen, der von dem andern Endpunkte von η aus [592 in einer zur Ebene von ξ und η senkrechten Ebene gezogen ist. Es ist klar, dass das Element des Körpers ((49) und (50)) durch das Produkt

$$d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

dargestellt werden kann.

Wir denken uns Lothe gefällt: z von dem Endpunkte von ζ [46 aus auf die Ebene der Linien ξ und η, y von dem Endpunkte von z aus auf ξ, und wir nennen x den Theil, den dieses letzte Loth vom Koordinatenanfange aus abschneidet. Indem wir die Winkel $F(x)$, $F(y)$, $F(z)$ mit X, Y, Z bezeichnen, erhalten wir ((27), (29) und (36)):

$$\zeta = \cot Z; \quad \eta = \frac{\cot Y}{\sin Z}.$$

Nehmen wir zuerst blos z als veränderlich an, dann blos y, endlich blos z, so wird:

$$d\zeta = \frac{dz}{\sin Z}; \quad d\eta = \frac{dy}{\sin Y \,.\, \sin Z}; \quad d\xi = dx.$$

Demnach ist das Element des Körpers:

$$d^3 P = \frac{dx\, dy\, dz}{\sin Y \,.\, \sin^2 Z}. \tag{59}$$

Dasselbe hätten wir gefunden, wenn wir den Körper durch auf einander senkrecht stehende Ebenen zerlegt und als Rauminhalt eines [593 unendlich kleinen Elementes das Produkt der drei Seiten genommen hätten.

Indem wir (59) von $x = 0$, von $y = 0$, von $z = 0$ an integriren, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 P}{dy\, dz}\right) &= \frac{x}{\sin Y \,.\, \sin^2 Z}, \\ \left(\frac{d^2 P}{dx\, dz}\right) &= \frac{\cot Y}{\sin^2 Z}, \\ \left(\frac{d^2 P}{dx\, dy}\right) &= \frac{1}{8 \sin Y}(e^{2z} - e^{-2z} + 4z), \end{aligned} \tag{60}$$

wo sich x, y, z nunmehr auf die Oberfläche des Körpers beziehen.

Wenn wir bei der Kugel die Koordinaten vom Mittelpunkte aus rechnen, so wird die Gleichung (60):

$$\left(\frac{d^2 P}{dX\, dZ}\right) = \frac{1}{\sin^2 Z}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 R} - \frac{1}{\sin^2 X \,.\, \sin^2 Z}},$$

wo $R = F(r)$ ist und r der Halbmesser. Indem wir mit dZ multipliciren und von $Z = \frac{1}{2}\pi$ bis $\sin R = \sin X \,.\, \sin Z$ integriren, finden wir von Neuem den Ausdruck (56).

Ist r der Abstand eines Punktes vom Koordinatenanfange, θ der Winkel zwischen r und der x, y-Ebene, ω der Winkel zwischen der x-Axe und der Projektion von r auf die x, y-Ebene, so ergiebt [594 der Ausdruck (59) als Element des Körpers in Polarkoordinaten:

$$d^3 P = \frac{1}{4}\, d\omega \,.\, d\theta \,.\, dr \,.\, \cos\theta \,.\, (e^r - e^{-r})^2, \tag{61}$$

einen Ausdruck, der noch leichter zur Berechnung des Rauminhaltes der Kugel und des geraden Kegels dient.

[§ 43.]

Suchen wir jetzt die Grösse einer Pyramide, deren Grundfläche [47 ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c ist und deren Höhe h in dem Schnittpunkte von a und c auf der Grundfläche senkrecht steht. Den Winkel zwischen a und c nennen wir ψ, r die Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreiecke mit den Katheten c und h; in demselben Dreiecke sei φ der Winkel gegenüber c. Die Pyramide, die wir P nennen werden, wird in die Elemente (55) zerlegt:

$$dP = \frac{1}{2}\, d\psi\, (r \cos\varphi - h), \tag{62}$$

woraus durch Integration:

$$P = \frac{1}{2}\int_0 d\psi \,.\, r\cos\varphi - \frac{1}{2}\,\psi h. \tag{63}$$

Sicher ist auch, wenn wir in dem Dreiecke aus a und h den Winkel gegenüber h mit ω bezeichnen und mit θ den Winkel zwischen b und r:

$$P = \frac{1}{2}\int_0 d\omega \,.\, r\cos\theta - \frac{1}{2}\, b\,\omega.$$ [595

Die Abhängigkeit der Linien und Winkel a, h, r, φ, ψ, ω untereinander wird durch die Gleichungen:

$$\begin{cases} \operatorname{tang}\varphi \,.\, \cos\psi = \cos A \,.\, \operatorname{tang} H, \\ \operatorname{tang}\omega = \cos H \,.\, \operatorname{tang} A, \\ \cos H = \cos\varphi \,.\, \cos R \end{cases} \tag{64}$$

bestimmt, wo: $A = F(a)$, $H = F(h)$, $R = F(r)$ ist. Hier können wir H, φ, ψ, ω durch B, θ, ω, ψ ersetzen, wenn wir unter B den Winkel $F(b)$ verstehen; folglich ist:

$$(65)\quad\begin{cases}\operatorname{tang}\theta\,.\,\cos\omega=\cos A\,.\,\operatorname{tang}B,\\ \operatorname{tang}\psi=\cos B\,.\,\operatorname{tang}A,\\ \cos B=\cos\theta\,.\,\cos R,\end{cases}$$

woraus wir finden:

$$(66)\quad\begin{cases}\cos\psi=\dfrac{\cos A\,.\,\sin H}{\sqrt{\sin^2 H-\sin^2 R}}\\ \cos\varphi=\dfrac{\cos\psi\,\sin\omega}{\sqrt{\sin^2 A-\sin^2\omega\,.\,\sin^2\psi}}\\ \cos R=\dfrac{\cot A\sqrt{\sin^2 A-\sin^2\omega\,.\,\sin^2\psi}}{\cos\omega\,.\,\cos\psi}.\end{cases}$$

[§ 44.]

Der Ausdruck (63) kann in verschiedener Form dargestellt [596 werden. Führen wir die Grössen A, H, R ein, so wird

[48

$$(67)\quad\begin{cases}2P=\frac{1}{2}\cos A\,.\,\sin 2H\displaystyle\int_R\frac{dR\,.\,\sin R\,.\,\log\cot\frac{1}{2}R}{(\sin^2 H-\sin^2 R)\sqrt{\sin^2 A\,.\,\sin^2 H-\sin^2 R}}-\\ \qquad-\arccos\left(\dfrac{\cos A\,.\,\sin H}{\sqrt{\sin^2 H-\sin^2 R}}\right)\cdot\log\cot\frac{1}{2}H,\end{cases}$$

wo das Integral bei: $\sin R=\sin A\,.\,\sin H$ endigt, wie man an den Gleichungen (64) sehen kann.

Indem wir die Buchstaben ändern und die beiden Ausdrücke für P einander gleich setzen, erhalten wir:

$$\cos A\,.\,\sin 2H\int\frac{dR\,.\,\sin R\,.\,\log\cot\frac{1}{2}R}{(\sin^2 H-\sin^2 R)\sqrt{\sin^2 A\,.\,\sin^2 H-\sin^2 R}}-$$

$$-\cos A\,.\,\sin 2B\int\frac{dR\,.\,\sin R\,.\,\log\cot\frac{1}{2}R}{(\sin^2 B-\sin^2 R)\sqrt{\sin^2 A\,.\,\sin^2 B-\sin^2 R}}=$$

$$=2\operatorname{arctang}(\operatorname{tang}A\,.\,\cos B)\,.\,\log\cot\frac{1}{2}H-$$

$$-2\operatorname{arctang}(\operatorname{tang}A\,.\,\cos H)\,.\,\log\cot\frac{1}{2}B,$$

wo die Integrale, wie man aus (64) und (65) schliessen kann, bei:

$$\sin R=\sin A\,.\,\sin B\,.\,\sin H$$

beginnen und endigen, wenn der Ausdruck unter der Quadrat- [597 wurzel in dem Integrale null wird.

Wenn wir:

$$(68)\qquad\sin\alpha=\frac{\sin\omega\,.\,\sin\psi}{\sin A}$$

setzen, so finden wir:

$$2P = \alpha r - \psi h - \int \alpha dr,$$

worin wir setzen müssen:

$$(69) \qquad r = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\cos\omega \cos\psi + \cos A \cos\alpha}{\cos\omega \cos\psi - \cos A \cos\alpha} \right),$$

demnach wird:

$$(70) \quad 4P = 2\alpha r - 2\psi h - \cos A . \sin 2\omega \int_0 \frac{\alpha \, d\alpha \sin\alpha}{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)\sqrt{\sin^2\omega - \sin^2\alpha . \sin^2 A}},$$

und indem wir die beiden Ausdrücke für P vergleichen, erhalten wir:

$$\cos A \sin 2\omega \int_0 \frac{\alpha \, d\alpha \sin\alpha}{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)\sqrt{\sin^2\omega - \sin^2\alpha . \sin^2 A}} -$$

$$- \cos A \sin 2\psi \int_0 \frac{\alpha \, d\alpha \sin\alpha}{(\sin^2\psi - \sin^2\alpha)\sqrt{\sin^2\psi - \sin^2\alpha . \sin^2 A}} =$$

$$= \omega \log \frac{\sin(A+\psi)}{\sin(A-\psi)} - \psi \log \frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)}, \qquad [598$$

wo die Winkel A, ψ und ω nicht von einander abhängig sind, [49 und wo die Integrale bei:

$$\sin\alpha = \frac{\sin\omega \sin\psi}{\sin A}$$

endigen, wo aber $A > \psi$ und $> \omega$ sein muss.

Endlich haben wir gesehen, dass

$$\int_0 d\psi . r \cos\varphi = \int_0 r \, d\alpha$$

ist. Wenn wir hierin den Werth von r (69) einsetzen und dann A und α als unabhängig von einander, ψ als Funktion von A und α und die übrigen Grössen als fest betrachten, so können wir das letzte Integral so darstellen:

$$2\cos\omega \int_0 d\alpha \cos\alpha \int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin A . dA}{(\sin^2 A - \sin^2\omega)\cos\psi} =$$

$$= 2\cos\omega \int_0 \frac{\sin A}{\cos\psi} \cos\alpha \, d\alpha \int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{dA}{\sin^2 A - \sin^2\omega} +$$

$$+ \frac{1}{\sin\omega} \int_0 d\alpha \cos\alpha \int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{dA \cos A}{\cos^3\psi} \cdot \log \frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)}; \qquad [599$$

indem wir in dem letzten Doppelintegrale die Reihenfolge der Integrationen ändern, erhalten wir:

$$2\int r\,d\alpha = \psi \log \frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)} + \frac{\sin\alpha}{\sin\omega}\int\limits_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{dA \cos A}{\cos\psi} \cdot \log \frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)},$$

und indem wir das in die Gleichung (63) einsetzen, bekommen wir:

(71) $$4P = \sin 2\omega \int\limits_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi\,dA}{\sin(A+\omega)\,.\,\sin(A-\omega)} - 2\psi h,$$

wobei wir jedoch an die Stelle von ψ den Ausdruck (68) einsetzen müssen und sodann nur A als veränderlich betrachten dürfen; folglich ist:

$$P = -\frac{1}{2}\psi h + \frac{1}{2}\cos\omega\,.\,\sin^2\alpha \int \frac{\psi\,d\psi \cos\psi}{(\sin^2\psi - \sin^2\alpha)\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\omega\,.\,\sin^2\psi}},$$

wo nur ψ als veränderlich betrachtet wird und das Integral von ψ bis

$$\sin\psi = \frac{\sin\alpha}{\sin\omega}$$

genommen wird.

[§ 45.]

Für $\psi = A$ wird $b = \infty$ und die Pyramide P erstreckt sich ins Unendliche. Dann ergiebt die Gleichung (63): [50 / 600]

(72) $$2P = \int\limits_0^A d\psi\,.\,r\cos\varphi - Ah.$$

Wir können aber den Werth von P noch anders finden, indem wir den Ausdruck (51) heranziehen, nämlich:

$$2P = \int\limits_A^{\frac{\pi}{2}} h\,dA,$$

oder, indem wir den Werth von h aus den Gleichungen (64) einsetzen:

(73) $$4P = \int\limits_A^{\frac{\pi}{2}} dA \log \frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)}.$$

Endlich können wir noch, uns auf die Gleichung (53) stützend, schreiben:

$$2P = -\int\limits_0 d\omega \log(\sin A\,.\,\sin H),$$

wo H als Funktion von ω betrachtet wird; indem wir nun den Werth von H aus den Gleichungen (64) einsetzen, erhalten wir:

(74) $$4P = -\int\limits_0 d\omega \log\left(1 - \frac{\cos^2 A}{\cos^2\omega}\right);$$ [601

beide Ausdrücke für P sind identisch, wie man sich durch Differentiation überzeugen kann.

Aehnlich finden wir, indem wir in (71) die Winkel ψ und A einander gleich setzen, folglich auch $\alpha = \omega$:

$$4P = \sin 2\omega \int_{A}^{\frac{\pi}{2}} \frac{A\,dA}{\sin(A+\omega)\,.\,\sin(A-\omega)} - A\,.\,\log\frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)},$$

denselben Ausdruck wie (73). Diesen Werth des bestimmten Integrals:

$$\int_0^A d\psi\,.\,r\cos\varphi$$

können wir folglich als geometrisch und analytisch erwiesen ansehen.

Die Gleichung (73) kann, wenn man darin aus (64) den Werth von A einsetzt, noch so dargestellt werden:

$$(75)\qquad P = \sin 2\omega \int_0 \frac{h\,dh}{e^{2h} + e^{-2h} - 2\cos 2\omega}\,. \qquad [602$$

[§ 46.]

Durch Addition und Subtraktion solcher Pyramiden, die paral- [51 lele Kanten haben und deren Grösse wir durch die Gleichungen (73) und (75) bestimmt haben, kann man überhaupt jede Pyramide herstellen. So kann P in der Gleichung (63) durch:

$$(76)\qquad P = P' - P'' + P_1 - P_2$$

dargestellt werden, wo P', P'', P_1 und P_2 dreiseitige Pyramiden sind, deren Kanten zur Höhe b der Pyramide P parallel sind.

Von diesen Pyramiden hat P' die Grundfläche mit P gemein, nämlich das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten a, h und dem Winkel ω gegenüber h. Um zu zeigen, welche Dreiecke den übrigen drei Pyramiden als Grundflächen dienen und wie deren Lage ist, wollen wir zuvor die folgenden Linien und Winkel anmerken: In dem rechtwinkligen Dreiecke mit den Katheten a und b, in dem b der Winkel ψ gegenüberliegt, nennen wir die Hypotenuse c. In dem rechtwinkligen Dreiecke mit den Katheten h und c, nennen wir, wie schon vorhin, die Hypotenuse r und φ den Winkel gegenüber c (s. Gl. (63)), γ den Winkel gegenüber h. Die von dem rechten Winkel zwischen a und h aus gezogene Parallele zu b bildet mit c einen Winkel:

$$(77)\qquad A - \psi = F(c + d). \qquad [603$$

Die Linie d entsteht durch Verlängerung von c über die Spitze der Pyramide P hinaus und wird dadurch bestimmt, dass die von ihrem

Endpunkte aus gezogene Parallele zu b auf d und folglich auf der Ebene des Dreiecks aus h, c, r senkrecht steht. Wir fällen jetzt von diesem Ende von d aus das Loth g auf die Verlängerung von r über die Spitze der Pyramide P und nennen l den Abschnitt auf der Verlängerung von r. So entstehen rechtwinklige Dreiecke: eines mit den Katheten h und $c + d$, das die Grundfläche der Pyramide P'' ist und in dem λ der Winkel gegenüber h sein möge, eins mit den Katheten g und $r + l$, die Grundfläche der Pyramide P_1, endlich die Grundfläche der Pyramide P_2 mit den Katheten g und l, wo μ der Winkel gegenüber l sein möge.

Die Abhängigkeit zwischen den Winkeln und den Seiten in diesen Dreiecken wird ausser durch die Gleichungen (64) und (65) auch noch durch die folgenden Gleichungen bestimmt, bei denen ähnlich wie früher die Bezeichnung:

$$C = F(c), \quad D = F(d), \quad G = F(g), \quad L = F(l)$$

angewendet wird, nämlich durch:

[604

$$(78) \quad \begin{cases} \cos C \,.\, \cos \psi = \cos A, \quad \cos D \,.\, \cos \mu = \cos G \\ \sin C = \sin A \,.\, \sin B \\ \operatorname{tang} \mu = \cos L \,.\, \operatorname{tang} G, \quad \operatorname{tang} \lambda = \cos H \,.\, \operatorname{tang} (A - \psi) \\ \sin R = \sin H \,.\, \sin C, \quad \operatorname{tang} \gamma = \cos H \,.\, \operatorname{tang} C \\ \sin D = \operatorname{tang} \gamma \,.\, \operatorname{tang} \mu. \end{cases}$$

Aus den beiden letzten finden wir: [52

$$\sin D = \operatorname{tang} \mu \,.\, \cos H \,.\, \operatorname{tang} C.$$

Bemerken wir ferner, dass (77) ergiebt:

$$\sin D = \frac{\sin (A - \psi) \,.\, \sin C}{1 - \cos (A - \psi) \,.\, \cos C}, \qquad \cos D = \frac{\cos (A - \psi) - \cos C}{1 - \cos (A - \psi) \,.\, \cos C},$$

und, indem wir darin $\cos C$ aus der ersten der Gleichungen (78) einsetzen:

$$\sin D = \frac{\sin C \,.\, \cos \psi}{\sin A}; \quad \cos D = \frac{\sin \psi}{\sin A}.$$

Demnach ist:

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{\cot A}{\cos H}$$

und durch Vergleichung mit dem Ausdrucke für $\operatorname{tang} \omega$ in den [605 Gleichungen (64) schliessen wir:

$$\mu = \frac{\pi}{2} - \omega.$$

Die Gleichung (68) und die zweite von (78) ergeben:

$$\sin \alpha = \cos G,$$

folglich:

$$G = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Indem wir diese Werthe in die Gleichungen (78) einsetzen, erhalten wir:

$$(79)\quad \begin{cases} \cos C \,.\, \cos \psi = \cos A, \quad \sin C = \sin A \,.\, \sin B \\ \cos L = \cot \omega \,.\, \operatorname{tang} \alpha, \quad \operatorname{tang} \lambda = \cos H \,.\, \operatorname{tang} (A - \psi) \\ \sin R = \sin H \,.\, \sin A \,.\, \sin B; \end{cases}$$

wenn wir hierzu:

$$h' = r + l$$

fügen, so finden wir durch Heranziehung der Gleichung (75): [53

[606

$$(80)\quad \begin{cases} P' = \sin 2\omega \displaystyle\int \frac{h\,dh}{e^{2h} + e^{-2h} - 2\cos 2\omega} \\ P'' = \sin 2\lambda \displaystyle\int \frac{h\,dh}{e^{2h} + e^{-2h} - 2\cos 2\lambda} \\ P_1 = \sin (2\omega - 2\lambda) \displaystyle\int \frac{h'\,dh'}{e^{2h'} + e^{-2h'} + 2\cos (2\omega - 2\lambda)} \\ P_2 = \sin 2\omega \displaystyle\int \frac{l\,dl}{e^{2l} + e^{-2l} + 2\cos 2\omega}, \end{cases}$$

wo alle Integrale von Null anfangen. Oder, indem wir den Ausdruck (73) für derartige Pyramiden anwenden:

$$(81)\quad \begin{cases} 4P' = \displaystyle\int_A^{\frac{\pi}{2}} dA \log \frac{\sin (A + \omega)}{\sin (A - \omega)} \\ 4P'' = \displaystyle\int_{A-\psi}^{\frac{\pi}{2}} dA \log \frac{\sin (A + \lambda)}{\sin (A - \lambda)} \\ 4P_1 = \displaystyle\int_0^{\alpha} d\alpha \log \frac{\sin (\alpha + \omega - \lambda)}{\sin (\omega - \alpha - \lambda)} \\ 4P_2 = \displaystyle\int_0^{\alpha} d\alpha \log \frac{\sin (\omega + \alpha)}{\sin (\omega - \alpha)}. \end{cases}$$

In diesen Werthen (80) und (81) der Pyramiden kann man [607 h und ω durch b und ψ ersetzen und umgekehrt, während man A und α ungeändert lässt, und kann so den Werth (76) der Pyramide P zusammensetzen.

[§ 47.]

Wir betrachten noch eine Pyramide, die zur Grundfläche ein Viereck hat aus den der Reihe nach auf einander senkrechten Linien h, a, a', h' und deren eine Kante auf der Grundfläche im Schnittpunkte von a und a' senkrecht steht, während die andern zu dieser parallel sind. Wenn wir fortwährend die Bezeichnungen:

$$A = F(a), \quad H = F(h), \quad A' = F(a'), \quad H' = F(h')$$

anwenden, so finden wir die Grösse dieser Pyramide (51):

$$-\frac{1}{2}\int h\,dA,$$

wo das Integral mit $a = 0$ beginnt, und wo wir, nach (21):

$$\sin A \,.\, \cos H = \cos A'$$

setzen und dann A und H als veränderlich betrachten müssen. [54 Wenn wir diese Pyramide in zwei dreiseitige zerlegen und zwar vermittelst einer Ebene durch die zur Grundfläche senkrechte Kante und durch die gegenüberliegende Kante im Treffpunkte von h und h', wenn wir ferner den Winkel, der in dem rechtwinkligen Dreiecke aus [*608* a und h der Seite h gegenüberliegt, ω nennen und die Grösse der vierseitigen Pyramide mit der Summe der beiden dreiseitigen (75) vergleichen, so erhalten wir:

$$\int_0 \frac{h\,dh}{e^{2h} + e^{-2h} - 2\cos 2\omega} + \int_0 \frac{h'\,dh'}{e^{2h'} + e^{-2h'} + 2\cos 2\omega} =$$

$$= \frac{1}{4\sin 2\omega}\int_A^{\frac{\pi}{2}} dA \log \frac{\sin A + \cos A'}{\sin A - \cos A'}.$$

Hier setzt sich das letzte Integral aus den beiden:

$$2\int dx \log \operatorname{tang} x - 2\int dy \log \operatorname{tang} y$$

$$\text{von} \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{A - A'}{2} \quad \text{bis} \quad x = \frac{\pi - A'}{2}$$

und

$$\text{von} \quad y = \frac{A + A'}{2} - \frac{\pi}{4} \quad \text{bis} \quad y = \frac{A'}{2}$$

zusammen, aber wegen der Beschaffenheit dieser Integrale kann man noch ein ebensolches zwischen den Gränzen: $\frac{1}{2}(\pi - A')$ und $\frac{1}{2}A'$ hinzufügen, so dass sich nunmehr alle drei zu einem einzigen zwischen den Gränzen:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{A - A'}{2} \quad \text{und} \quad \frac{A + A'}{2} - \frac{\pi}{4}$$

vereinigen. Daher ist:

$$(82)\quad \begin{cases} \int \frac{h\,dh}{e^{2h}+e^{-2h}-2\cos 2\omega} + \int \frac{h'\,dh'}{e^{2h'}+e^{-2h'}+2\cos 2\omega} = \\ \qquad = \frac{1}{2\sin 2\omega} \int \frac{z\,dz}{e^z+e^{-z}} \end{cases} \qquad [609$$

von $h=0$ und $h'=0$ an und von:

$$z = \log\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-A'}{2}\right)$$

bis:

$$z = \log\cot\left(\frac{A+A'}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

Die Beziehungen zwischen h, h', A, A' werden durch die Gleichungen:

$$\operatorname{tang}\omega = \cos H \,.\, \operatorname{tang} A, \quad \cot\omega = \cos H' \,.\, \operatorname{tang} A'$$

bestimmt und ausserdem durch die Gleichung (s. (22)):

$$\operatorname{tang} H' = \sin H \,.\, \operatorname{tang} A,$$

folglich ist: [55

$$\operatorname{tang} H' = \operatorname{tang}\omega \,.\, \operatorname{tang} H$$

und daraus:

$$(83)\qquad \cos A' = \cos A \,.\, \operatorname{tang}\omega,$$

$$e^{h'} = \tfrac{1}{2}\cot\omega\,(e^h - e^{-h}) + \sqrt{\tfrac{1}{4}\cot^2\omega\,(e^h-e^{-h})^2+1}, \qquad [610$$

und die äussersten Werthe für z werden $h'-h$ und $h'+h$. Für $h=\infty$ finden wir $h'=\infty$, $A=\omega$, $A'=\frac{1}{2}\pi-\omega$. Demnach ist:

$$(84)\qquad \int_0^\infty \frac{(e^h+e^{-h})h\,dh}{e^{2h}+e^{-2h}-2\cos 2\omega} = \frac{1}{\sin\omega}\int\frac{z\,dz}{e^z+e^{-z}},$$

wo das Integral in Bezug auf z von $z=\log\cot\frac{1}{2}\omega$ bis $z=\infty$ genommen wird.

Wenn wir in die Gleichung (82) anstatt h und h' die Grössen A und A' einführen, so erhalten wir (s. (73)):

$$\int_A^{\frac{\pi}{2}} dA \,.\, \log\frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)} + \int_{A'}^{\frac{\pi}{2}} dA' \,.\, \log\frac{\cos(A'-\omega)}{\cos(A'+\omega)} = 2\int\frac{z\,dz}{e^z+e^{-z}},$$

oder, indem wir $A' = \frac{\pi}{2} - A_1$ setzen:

$$(85)\quad \int dA \,.\, \log\frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)} + \int dA_1 \,.\, \log\frac{\sin(A_1+\omega)}{\sin(A_1-\omega)} = 2\int\frac{z\,dz}{e^z+e^{-z}},$$

wo die Integrale von A bis $A=\frac{1}{2}\pi$, von $A_1=0$ bis (s. (83)) [611

$$\sin A_1 = \cos A \,.\, \operatorname{tang}\omega$$

und

$$\text{von} \quad z = \log\cot\left(\frac{A + A_1}{2}\right) \quad \text{bis} \quad z = \log\cot\left(\frac{A - A_1}{2}\right)$$

genommen werden. Zu bemerken ist, dass in der Gleichung (85) die Zahlen, von denen die Logarithmen genommen werden, immer als positiv betrachtet werden.

Für $A = A_1$ wird die Gleichung (85):

$$(86) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} dA \,.\, \log\frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)} = 2\int^{\infty} \frac{z\,dz}{e^z + e^{-z}};$$

das letzte Integral beginnt bei: $z = \log\cot\omega$.

[§ 48.]

Um noch an einigen Beispielen zu zeigen, wie viel die Theorie [56 der bestimmten Integrale von der Einführung der neuen Anfangsgründe der Geometrie erwarten kann, werden wir uns damit beschäftigen, auf verschiedene Weise den Rauminhalt gerader Pyramiden und Kegel zu berechnen.

Die Grundfläche des geraden Kegels sei ein Kreis mit dem [612 Halbmesser r, und der Mittelpunkt möge als Ursprung für die Koordinaten x, y der Punkte auf dem Umfange dienen. Wir setzen:

$$R = F(r), \quad X = F(x), \quad Y = F(y).$$

Ist die Seite zur Axe parallel, so wird der Rauminhalt des Kegels, wie wir gesehen haben (53), gleich

$$-\pi \log\sin R$$

und kann noch anders (51) dargestellt werden:

$$2\int_R^{\frac{\pi}{2}} y \,.\, dX.$$

Indem wir hierin die Werthe von X und von Y aus der Gleichung des Kreises:

$$\sin X \,.\, \sin Y = \sin R$$

einsetzen und die beiden Werthe für den Rauminhalt des Kegels vergleichen, finden wir:

$$\int_R^{\frac{\pi}{2}} dX \,.\, \log\frac{\sin X + \sqrt{\sin^2 X - \sin^2 R}}{\sin X - \sqrt{\sin^2 X - \sin^2 R}} = -\pi\log\sin R$$

$$\int_R^{\frac{\pi}{2}} \frac{dY . \cot Y . \log \cot \frac{1}{2} Y}{\sqrt{\sin^2 Y - \sin^2 R}} = - \frac{\pi \log \sin R}{2 \sin R}.$$ [613

Durch theilweise Integration verwandeln wir das erste Integral in:

$$\int_R^{\frac{\pi}{2}} \frac{X . dX . \cos X}{\sqrt{\sin^2 X - \sin^2 R}} = \frac{\pi}{2} \log (1 + \cos R).$$

Dasselbe hat auch Legendre für diese beiden letzten Integrale gefunden (Suppl. aux Exercices de calcul intégral. T. I.).

[§ 49.]

Ist die Höhe des Kegels nicht unendlich, so betrachten wir eine Pyramide, die dieselbe Höhe h besitzt wie der Kegel und die das Dreieck aus x und y zur Grundfläche hat; bei dieser bezeichnen wir mit c und q die Linien von der Spitze bis zu dem Ende von y auf dem Kreisumfange und bis zu dem andern Ende von y auf der x-Axe, mit ω den Winkel zwischen q und h, mit φ den zwischen c und h und mit θ den zwischen c und q. Ferner verstehen wir unter C, Q, H [57 die Winkel: $F(c)$, $F(q)$, $F(h)$. Diese Pyramide ist durch die Gleichung (61) gegeben, die im gegenwärtigen Falle wird:

$$d^3 P = \frac{1}{4} d\omega . d\theta . dc . \cos \theta . (e^c - e^{-c})^2.$$

Indem wir in Bezug auf c von $c = 0$ an integriren, erhalten wir: [614

$$4 d^2 P = d\omega . d\theta . \cos \theta . \left(\frac{2 \cos C}{\sin^2 C} - \log \frac{1 + \cos C}{1 - \cos C} \right).$$

Hierin setzen wir:

$$\cos \theta . \cos C = \cos Q$$

und integriren in Bezug auf θ von $\theta = 0$ an:

$$4 dP = d\omega \left(\frac{2y}{\sin Q} - 2 \sin \theta . \log \cot \frac{1}{2} C \right);$$

indem wir endlich setzen:

$$\sin Q = \sin H . \sin X, \quad \text{tang}\, \omega = \text{tang}\, H . \cos X$$

$$\text{tang}\, \theta = \cos Y . \text{tang}\, Q,$$

erhalten wir:

$$(87) \quad 2dP = - \frac{\cos H . y . dX}{1 - \sin^2 H . \sin^2 X} + \sin^2 H . \cos H \cdot \frac{c . \cos Y . \sin^2 X . dX}{\cos C (1 - \sin^2 H . \sin^2 X)};$$

für $h = \infty$, also für $H = 0$, finden wir von Neuem den Ausdruck (51) für das Element bei einer Pyramide mit parallelen Kanten.

Die Integration der Gleichung (87) in Bezug auf X ergiebt [615 einen Kegel, bei dem die Höhe auf dem Ursprunge der Koordinaten

x, y steht und bei dem die Grundfläche durch die Linie begränzt wird, die durch die Gleichung zwischen X und Y bestimmt ist. Wenn die Grundfläche zum Beispiel ein Kreis ist, so sind c und r konstant und:

$$\sin X \,.\, \sin Y = \sin R.$$

Erstrecken wir in diesem Falle das Integral über die ganze Grundfläche des Kegels und vergleichen wir es mit dem Werthe, der früher gefunden worden ist (55), indem wir noch beachten, dass hier:

$$\int_R^{\frac{\pi}{2}} \cos Y \,.\, dX = \frac{\pi}{2}(1 - \sin R)$$

ist, so schliessen wir nach allen Vereinfachungen: [58

$$(88) \qquad \int_R^{\frac{\pi}{2}} \frac{dY \,.\, \sin Y \,.\, \cos Y \,.\, \log \cot \frac{1}{2} Y}{(\sin^2 Y - \sin^2 C)\sqrt{\sin^2 Y - \sin^2 R}} = \frac{\pi \log (\cot \frac{1}{2} C \,.\, \operatorname{tang} \frac{1}{2} H)}{2 \sin R \,.\, \cos H},$$

wo $\sin C = \sin H \,.\, \sin R$ ist. Aus diesem Integrale folgen alle die, zu denen Herr Legendre mit Hülfe elliptischer Funktionen gelangt (Exercices de calcul intégral, suppl. à la 1[e] partie, par Legendre). [*616*

Ist die Grundfläche der Pyramide das Viereck, das entsteht, wenn von dem Endpunkte von y aus auf die y-Axe das Loth gefällt wird, das auf dieser bis zum Ursprunge der Koordinaten hin die Linie a abschneidet, so muss man, wenn $A = F(a)$ angenommen wird, setzen (s. Gl. (21)):

$$\sin X \,.\, \cos Y = \cos A$$

und dann verwandelt sich die Gleichung (87) in:

$$(89) \begin{cases} 2P = \cos H \,.\, \cos A \displaystyle\int_Y^A \frac{dY \,.\, \sin Y \,.\, \cos Y \,.\, \log \cot \frac{1}{2} Y}{(\cos^2 Y - \sin^2 H \,.\, \cos^2 A)\sqrt{\cos^2 Y - \cos^2 A}} + \\ + \cos H \,.\, \sin H \,.\, \cos A \displaystyle\int \frac{dC \,.\, \sin C \,.\, \log \cot \frac{1}{2} C}{(\cos^2 C - \sin^2 H \,.\, \cos^2 A)\sqrt{\sin^2 A \,.\, \sin^2 H - \sin^2 C}}. \end{cases}$$

Das letzte Integral geht von:

$$\sin C = \sin A \,.\, \sin H \quad \text{bis:} \quad \sin C = \sin H \,.\, \cos A \,.\, \operatorname{tang} Y.$$

Die Pyramide P entsteht in diesem Falle durch Vereinigung zweier gerader dreiseitiger Pyramiden, von denen jede, wie wir gesehen [*617* haben, ihrer Grösse nach durch eine Summe von Integralen der folgenden Form (s. (76) und (80)):

$$\int_0 \frac{h\, dh}{e^{2h} + e^{-2h} - 2 \cos 2\omega}$$

dargestellt werden kann, wo ω ein konstanter Winkel ist.

Schluss.*)

[67
[633

Nachdem wir die Gleichungen (17) gefunden hatten, die die Abhängigkeit zwischen den Winkeln und den Seiten eines Dreiecks [634 darstellen, haben wir schliesslich allgemeine Ausdrücke für die Elemente der Linien, der Flächen und der Körperräume gegeben, und nunmehr wird in der Geometrie alles Uebrige Analysis sein, wo die Rechnungen nothwendig unter einander übereinstimmen müssen und wo nichts im Stande ist, uns etwas Neues zu enthüllen, was nicht in diesen ersten Gleichungen enthalten wäre, aus denen alle Beziehungen der geometrischen Grössen unter einander entnommen werden müssen. Will man daher jetzt durchaus annehmen, dass in der Folge irgend ein Widerspruch zur Verwerfung der Anfangsgründe nöthigen werde, die wir in dieser neuen Geometrie angenommen haben, so kann dieser Widerspruch nur in den Gleichungen (17) selbst stecken. Bemerken wir jedoch, dass sich diese Gleichungen in die Gleichungen (16) der sphärischen Trigonometrie verwandeln, sobald wir an die Stelle der Seiten: a, b, c setzen: $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$; aber in der gewöhnlichen Geometrie und in der sphärischen Trigonometrie treten immer nur die Verhältnisse von Linien auf, folglich werden die gewöhnliche Geometrie, die [sphärische] Trigonometrie und diese neue Geometrie [635 immer mit einander in Uebereinstimmung sein.

Wenn sich nun die Analysis und die neue Geometrie — wir werden diese imaginär nennen zum Unterschiede von der gewöhnlichen — bereits mit einander in Uebereinstimmung befinden, so kann man von jeder von beiden Unterstützung für die andre erwarten. Diese Erwartung erscheint nicht unbegründet, denn, während unsre Absicht eigentlich nur war, ein bestimmtes Ziel zu erreichen — die Angabe allgemeiner Regeln zur Messung aller geometrischen Grössen — und während wir geradeswegs auf dieses Ziel losgingen und uns nur im Vorbeigehen einige Anwendungen gestatteten, sind wir doch im Stande gewesen, die Werthe von bestimmten Integralen zu entdecken, zu deren Kenntniss die Analysis allein, ohne die Hülfe der Geometrie, nur schwer einen Weg hätte bahnen können.

Es bliebe noch zu untersuchen, welche Art von Veränderung

---

*) [Das Original enthält vor diesem Schlusse noch einen Abschnitt mit der Ueberschrift: „Vergleichung von Integralen und neu gefundene bestimmte Integrale.“ Dieser Abschnitt steht in dem Kasaner Boten von 1830, Nr. 7, 8 auf S. 617—633 und in der „Vollständigen Sammlung der geometrischen Abhandlungen“ Bd. I, Kasan 1883, auf S. 59—66, er hat aber in der Hauptsache nur analytisches Interesse und ist daher in der gegenwärtigen Uebersetzung weggelassen.]

durch Einführung der imaginären Geometrie in die Mechanik entstehen wird, und ob nicht hier bereits anerkannte und unzweifelhafte Vorstellungen über die Natur der Dinge vorhanden sind, die uns nöthigen, die Abhängigkeit der Linien und Winkel zu begränzen [*636* oder überhaupt nicht zuzulassen. Man kann jedoch voraussehen, dass die Veränderungen in der Mechanik bei den neuen Anfangsgründen der Geometrie von derselben Art sein werden, wie die, die Laplace angegeben hat (Mécanique céleste T. I. Liv. I. Chap. II), indem er jede Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Kraft als möglich annahm oder — wir wollen es genauer ausdrücken — indem er annahm, dass die Kräfte, die immer durch die Geschwindigkeit gemessen werden, bei ihrer Zusammensetzung einem anderen Gesetze unterworfen sind als der sonst für sie angenommenen Addition.

Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallellinien. [219 3

Einleitung.

Jedermann weiss, dass in der Geometrie die Theorie der Parallellinien bis auf den heutigen Tag unvollkommen geblieben ist. Die Vergeblichkeit der Anstrengungen, die seit Euklids Zeiten während des Verlaufs zweier Jahrtausende gemacht worden sind, erweckte in mir den Verdacht, in den Begriffen selbst möchte noch nicht die Wahrheit liegen, die man hat beweisen wollen und zu deren Bestätigung, wie bei andern Naturgesetzen, nur Versuche dienen [4 können, so zum Beispiel astronomische Beobachtungen. Als ich mich schliesslich von der Richtigkeit meiner Vermuthung überzeugt hatte und der Meinung war, die schwierige Frage vollständig erledigt zu haben, schrieb ich im Jahre 1826 darüber eine Abhandlung.*) Eine Anwendung der neuen Theorie auf die Analysis befindet sich auch in Aufsätzen, die unter dem Titel: „Ueber die Anfangsgründe der Geometrie“ im Kasaner Boten für 1829 und 1830 erschienen sind.

Das Hauptergebniss, zu dem ich unter der Annahme gelangt bin, dass die Linien von den Winkeln abhängig seien, ist die Möglichkeit des Vorhandenseins einer Geometrie in einem weiteren Sinne, als sie uns zuerst Euklid dargestellt hat. In dieser erweiterten Gestalt gab ich der Wissenschaft den Namen: Imaginäre Geometrie, unter die sich als ein besonderer Fall die Gewöhnliche Geometrie unterordnet mit der Beschränkung in der allgemeinen Voraussetzung, wie sie die praktischen Messungen fordern.

Dass die neuen Grundlagen ausreichend sind, das zu zeigen habe ich in einer Abhandlung unternommen, die unlängst in den „Gelehrten

*) Exposition succincte des principes de la Géométrie, avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles, gelesen am 12. Februar 1826 in der Sitzung der physiko-mathematischen Abtheilung bei der Universität Kasan, aber nirgends gedruckt.

Schriften der Universität Kasan" gedruckt worden ist.*) In dem [5 Bestreben, dieses Ziel nicht sowohl auf direktem als vielmehr auf [220 dem kürzesten umgekehrten Wege zu erreichen, zog ich damals vor, von gewissen angenommenen Grundlagen aus zu den Gleichungen für alle Beziehungen und zu den Ausdrücken für alle geometrischen Grössen überzugehen. Sollte auch meine Entdeckung keinen andern Nutzen gebracht haben, als die Ausfüllung der Lücke in den Anfangsgründen, so verpflichtet mich doch wenigstens die Aufmerksamkeit, die dieser Gegenstand fortwährend erweckt hat, nunmehr zu einer eingehenden Auseinandersetzung. Ich werde mit einer Besprechung der früheren Theorien beginnen.

Es ist leicht zu zeigen, dass zwei Gerade, die gegen eine dritte unter demselben Winkel geneigt sind, niemals zusammentreffen, da sie unter diesen Umständen auf einer gewissen Geraden senkrecht stehen. Euklid nahm umgekehrt an, dass zwei Linien, die gegen eine dritte nicht gleich geneigt sind, stets einander schneiden müssen. Um sich von der Richtigkeit der letzteren Annahme zu überzeugen, hat man zu verschiedenen Hülfsmitteln gegriffen: bald bemühte man sich, zuvor die Winkelsumme im Dreiecke zu ermitteln, bald verglich man unendliche Flächenräume in den Oeffnungen von Winkeln und zwischen Lothen, bald liess man zu, dass die Winkel nur vom Verhältnisse der Seiten abhängig seien, oder man legte endlich der geraden Linie neue Eigenschaften bei, um ihre Definition zu vervollständigen. Von [6 allen diesen Beweisen kann man einige als scharfsinnig bezeichnen, aber sie alle, ohne Ausnahme, sind falsch, mangelhaft in ihren Grundlagen und ohne die nöthige Strenge der Schlüsse; es giebt sogar unter ihnen keinen einzigen, der zugleich einfach und überzeugend wäre und daher Anfängern empfohlen werden könnte.

Legendre liess im Jahre 1800 seine Geometrie in dritter Ausgabe drucken und stellte darin den Satz auf, dass die Winkelsumme des Dreiecks nicht grösser sein kann als π, als zwei Rechte. Ebendaselbst wollte er zeigen, dass diese Summe nicht $< \pi$ sein darf, wobei er jedoch ausser Acht gelassen hatte, dass gerade dann, wenn der auf anderm Wege abgeleitete Werth der Summe irgend einen Widerspruch darbietet, die Linien möglicherweise gar kein Dreieck mehr bilden. Ich halte es nicht für nöthig, mich hier über diesen Fehler zu verbreiten, den Legendre später selbst zugestanden hat, indem er erklärte, obwohl die als Grundlage benutzten Principien keinem Bedenken

*) Im 1. Hefte der Gelehrten Schriften von 1835, unter dem Titel: „Imaginäre Geometrie."

unterlägen, fände er doch Schwierigkeiten, die zu überwinden er nicht im Stande wäre.*) In den Schriften der französischen Akademie von 1833 fügte er noch den Satz hinzu, dass die Winkelsumme in allen Dreiecken gleich π sein muss, sobald sie in einem einzigen diesen [7 Werth hat. Dasselbe musste ich auch in meiner Theorie beweisen, die ich 1826 schrieb. Ich finde sogar, dass Legendre mehrmals auf den Weg verfallen ist, den ich mit solchem Erfolge gewählt habe; [221 vermutlich hat aber das Vorurteil zu Gunsten des von Allen angenommenen Satzes ihn bei jedem Schritte veranlasst, sich mit der Schlussfolgerung zu beeilen oder diese durch Dinge zu ergänzen, die bei der neuen Annahme gar nicht mehr zulässig sind. Wir werden Alles prüfen, was er in den Schriften der französischen Akademie von 1833 über diesen Gegenstand hat drucken lassen.

In dem Dreiecke ABC (Fig. 1) ziehen wir von A aus durch die Mitte I der Seite BC die Linie $AC' = AB$; wir verlängern ferner AB bis $AB' = 2AI$ wird. So entsteht ein Dreieck $AB'C'$, in dem $B'C' = AC$ und die Winkelsumme S dieselbe ist, wie in dem ersten Dreiecke ABC, aus dem der Winkel CAB in das Dreieck $AB'C'$ übergeht, indem er in die beiden an den Punkten A und B' zerfällt. Ist überdies AB die grösste Seite des Dreiecks ABC oder doch nicht kleiner als die beiden andern und ist zugleich $BC \leqq AC$, so ist $AC' \geqq C'B'$ und der im Dreiecke $AB'C'$ der Seite [8 $B'C'$ gegenüberliegende Winkel ist höchstens halb so gross wie der Winkel CAB. Indem wir so fortfahren, können wir zu einem Dreiecke gelangen, in dem zwei der Winkel beliebig klein sind, während die Summe von allen dreien denselben Werth S hat wie in dem ersten Dreiecke ABC.

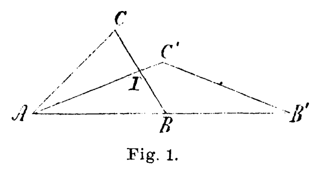


Fig. 1.

Legendre wollte hieraus schliessen, dass sich bei der Verkleinerung der beiden Winkel die gegenüberliegenden Seiten der dritten so nähern müssen, dass der übrige Winkel schliesslich in zwei Rechte übergeht, und dass somit in dem ursprünglichen und folglich in jedem Dreiecke $S = \pi$ sei (Réflexions sur la théorie des parallèles. Mémoires de l'Acad. d. Sc. Tome XII. 1833, p. 390). Diese Ueberlegung ist jedoch unrichtig, weil die Seiten des Dreiecks hier unbe-

*) Hier sind die eignen Wort Legendres: „Nous devons avouer que cette seconde proposition, quoique le principe de la démonstration fût bien connu, nous a présenté des difficultés que nous n'avons pu entièrement resoudre.“ (Mémoires de l'Acad. d. Sc. de l'Inst. de France, Tome XII, 1833, p. 371.

gränzt wachsen und wir daher auch die Gränze, der sich der Winkel $AC'B' < S$ nähert, $< \pi$ annehmen können.

Wir nennen A, B, C die Winkel des Dreiecks ABC an den Punkten mit denselben Buchstaben, wir nennen ferner A', B', C' die Winkel des Dreiecks $AB'C'$ an den Punkten A, B', C'; endlich sei h das von C' aus auf die Seite AB' gefällte Loth. Mit Hülfe der „Imaginären Geometrie" finden wir bei der Annahme $S < \pi$ und indem wir unter e die Grundzahl der Neperschen Logarithmen verstehen:

$$\cot A' = \cot A + \frac{\sin C}{\sin A \cdot \sin B}$$

$$\cot B' = \cot A + \frac{\sin B}{\sin A \cdot \sin C}$$

[9

$$e^h - e^{-h} = \frac{4}{\sin C'} \sqrt{\cos \tfrac{1}{2} S \cdot \cos(\tfrac{1}{2} S - A') \cdot \cos(\tfrac{1}{2} S - B') \cdot \cos(\tfrac{1}{2} S - C')}.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ist ersichtlich, dass A' und B' immer möglich sind und bei der Verwandlung der Dreiecke bis auf Null abnehmen. Die letzte Gleichung liefert jedesmal die Höhe h [222 und bestimmt die Gränze der Annäherung:

$$h = \log \cot \tfrac{1}{4} S,$$

wo der Nepersche Logarithmus zu nehmen ist.

Obgleich Legendre seinen Beweis als vollständig streng bezeichnet, so dachte er selbst doch wahrscheinlich anders, denn er fügt den Vorbehalt hinzu, dass eine Schwierigkeit, die man etwa noch finden werde, immer beseitigt werden könne. Zu diesem Zwecke nimmt er seine Zuflucht zu Rechnungen, denen übrigens die ersten bekannten Gleichungen der geradlinigen Geometrie zu Grunde liegen, die zuvor erst noch zu prüfen sich gehört hätte und die gerade in diesem Falle zu gar nichts nützen und zu gar keinem Schlusse führen.

In der Absicht, Alles zur Bestätigung seines Satzes zu sagen, bemerkt Legendre, dass kongruente Dreiecke, die überall mit verschiedenen Winkeln zu je dreien in einem Punkte zusammengelegt werden, einen Streifen bilden, den man bis ins Unendliche fort- [10 setzen kann und den dann zwei gebrochene Linien begränzen, die für $S < \pi$ einander ihre Höhlungen zukehren, für $S > \pi$ dagegen ihre Wölbungen. Indessen zwinge die erwiesene Unmöglichkeit des letzteren Falles auch zur Ablehnung des ersten, wo die Linien, die einander wie zwei Kreisbogen zugewendet sind, nothwendig zum Schnitte kommen müssten. Es scheint nicht nöthig, einen solchen Schluss, bei dem auch kein Schatten eines strengen Beweises vorhanden ist, eingehend zu erörtern und zu würdigen. Ueberdies bemerken wir, dass Linien,

die einander ihre Höhlung zukehren, nur nach dem in der gewöhnlichen Geometrie angenommenen Begriffe einander näher kommen, während bei der Annahme $S < \pi$ nichts hindert, ihre Fortsetzung unter Erhaltung der Abstandsgleichheit zuzulassen.

Bertrand und nach seinem Vorgange Legendre wollten unendliche Flächenräume in Winkeln und zwischen Lothen vergleichen. Beweisen dieser Art sollte eine Erklärung des Grössenbegriffs vorhergehen, den man in der Geometrie nur in Verbindung mit der Messung verstehen kann, wenn man noch ausserdem vorher verabredet hat, durch welche Merkmale sich das Grössere vom Kleineren unterscheidet. Zum Beispiel wird ein Flächenraum, der von einer krummen Linie begränzt ist, für grösser erachtet als ein Vieleck, das ganz im Innern enthalten ist, dagegen für kleiner, wenn umgekehrt der Flächenraum ganz in dem Vielecke eingeschlossen ist, selbst wenn noch kein Mittel zur Ausmessung dieser Flächen bekannt sein sollte. Handelt es sich aber um Flächenräume von unbegränzter Ausdehnung, so muss [11 man hier, wie ja überall in der Mathematik, unter dem Verhältnisse zweier unendlich grosser Zahlen die Gränze verstehen, in die dieses übergeht, sobald Zähler und Nenner des Bruches beständig wachsen. Ausserdem muss man hier unter einer geometrischen Grösse wenigstens eine solche verstehen, die man annähernd bestimmen kann, indem man sie nach den Merkmalen der Ungleichheit beurteilt. In dieser Beziehung erfüllt der Bertrandsche Beweis und ebenso alle andern bei Weitem nicht die Anforderungen, weil wir bei ihnen kein Ver- [223 fahren zur Ausmessung von Flächenräumen sehen, dessen vollends zu geschweigen, dass die Flächenräume zuerst begränzt werden und dann mit der Erweiterung ihrer Gränzen ins Unendliche wachsen müssen.

Es werde verlangt, die Fläche X (Fig. 2) in der Oeffnung des Winkels DCE mit der Fläche Y zu vergleichen, die sich von der Linie $AC = a$ aus zwischen den beiden zu AC senkrechten Geraden AB und CD hinerstreckt. Das Verhältniss der beiden Flächen X und Y wird verschieden ausfallen, auch wenn sie ins Unendliche anwachsen, nämlich je nach der Art und Weise wie wir gedenken, sie im Anfange zu begränzen. Wir nehmen zum Beispiele an, dass in jedem Dreiecke die Winkelsumme $S = \pi$ ist. Wir machen $AB = CD = n \cdot a$, wo n eine ganze Zahl ist, und ziehen sodann die Gerade DB, dagegen begränzen wir den Flächenraum in der Oeffnung des Winkels DCE durch einen Kreisbogen, den wir um C als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $CD = na$ beschreiben.

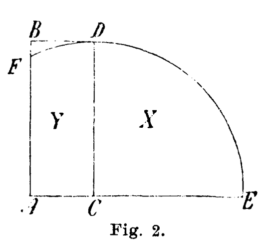


Fig. 2.

Wir finden:

$$Y = na^2, \quad X = \frac{1}{4}\pi n^2 a^2, \qquad [12$$

demnach ist:

$$\frac{Y}{X} = \frac{4}{\pi n}$$

ein Verhältniss, das beim Anwachsen der Flächenräume Y und X, für $n = \infty$, verschwindet, wie auch **Bertrand** angenommen hat. Wenn wir jedoch, statt $AB = na$ anzunehmen, $AB = nCD = n^2 a$ machen, so finden wir diesmal das Verhältniss:

$$\frac{Y}{X} = \frac{4}{\pi},$$

das für jedes n und folglich auch für $n = \infty$, wo die beiden Flächenräume unendlich gross werden, konstant ist. Daher fällt das Verhältniss $Y : X$ jedesmal verschieden aus, jenachdem wir die Flächenräume im Anfang begränzen und jenachdem sie nachher ins Unendliche wachsen.

Wir schneiden jetzt beide Flächenräume X und Y durch einen Bogen FDE ab, den wir um C als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $CD = na$ beschreiben. Unter der Annahme, dass in jedem Dreiecke die Winkelsumme $S > \pi$ oder $= \pi$ ist, sieht man ohne Schwierigkeit ein, dass das Verhältniss $Y : X$ für $n = \infty$ in Null übergeht. [13 Dies bedeutet, dass in beiden Fällen Y von der ersten, X aber von der zweiten Ordnung unendlich gross wird, wie sichs auch **Bertrand** gedacht hat. Dagegen finden wir bei der Annahme $S < \pi$ das Verhältniss*):

$$\frac{Y}{X} = \frac{2(e^{na} + e^{-na}) \,.\, \arcsin\left(\frac{e^{2a} - 1}{e^{2a} + 1} \cdot \frac{e^{2na} + 1}{e^{2na} - 1}\right) - 4 \arcsin\left(\frac{e^{a} - e^{-a}}{e^{na} - e^{-na}}\right)}{\pi(e^{na} + e^{-na} - 2)}, \qquad [224$$

wo die Zahl $e > 1$ nicht von n abhängt, und folglich für $n = \infty$: [14

---

*) Wir wollen unter e die Grundzahl der Neperschen Logarithmen verstehen, indem wir die als Einheit benutzte Linie unbestimmt lassen, und wollen setzen:

$$\sin r' = \frac{2}{e^r + e^{-r}}, \qquad \sin\psi = \operatorname{tang} r' \,.\, \cot x'$$

$$\operatorname{tang} r' = \frac{2}{e^r - e^{-r}}, \quad \operatorname{tang} x' = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

Wird dann in dem Kreise ein Flächenraum abgeschnitten und zwar durch zwei auf dem Halbmesser errichtete Lothe, von denen das eine vom Mittelpunkte ausgeht, das andre im Abstande x vom Mittelpunkte, so ist dieser Flächenraum gleich:

$$\frac{1}{\sin r'} \operatorname{arccot}(\sin r' \,.\, \cot\psi) - \psi.$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{e^{2a} - 1}{e^{2a} + 1}\right),$$

was nicht null ist, solange $a > 0$ ist, und was nur bei ausserordentlicher Kleinheit von a vernachlässigt werden kann.

Andrerseits überzeugt man sich ohne Mühe, dass man das Verhältniss $Y:X$ für $Y = \infty$ nicht gleich Null erachten darf, wofern man $S < \pi$ zulässt. Es seien AB und CD (Fig. 3) senkrecht zu AC; wir nehmen $AB = CD$ beliebig an. Bei der Annahme $S < \pi$ sind die Winkel ABD und CDB spitz; die Lothe BB'' und DD'' auf BD wenden sich nach dem Innern der Fläche $B'BDD'$, ohne mit einander zusammenzutreffen, und bilden mit BB' und DD' die Winkel: $B'BB''$ und $D'DD''$, deren unendliche Flächenräume kleiner sind als der ebenso beschaffene Flächenraum $B'ACD'$, im Widerspruche mit dem, was Bertrand von allen Winkeln ohne Ausnahme hat behaupten wollen.

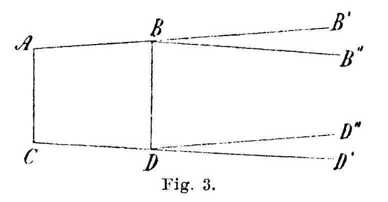


Fig. 3.

Ein andres Ansehen giebt Bertrand seinem Beweise, indem er unendliche Flächenräume in Winkeln allein betrachtet. In dem Dreiecke ABC (Fig. 4) nennen wir A, B, C die Winkel gegenüber den Seiten a, b, c, die wir verlängern: AC über A bis A'', AB über [15 B bis B'', BC über C bis C''. In den Oeffnungen der Aussenwinkel $\pi - A$, $\pi - B$ und $\pi - C$ bilden die sich ins Unendliche erstreckenden Flächenräume $X + x$, $Y + y$, Z um den Punkt C herum nach allen Seiten hin einen ebensolchen Flächenraum, wobei der Flächenraum ABC ausgeschlossen ist, den man seiner Kleinheit wegen vernachlässigen darf. Dies bedeutet, dass: $\pi - A + \pi - B + \pi - C = 2\pi$ ist und somit: $A + B + C = \pi$.

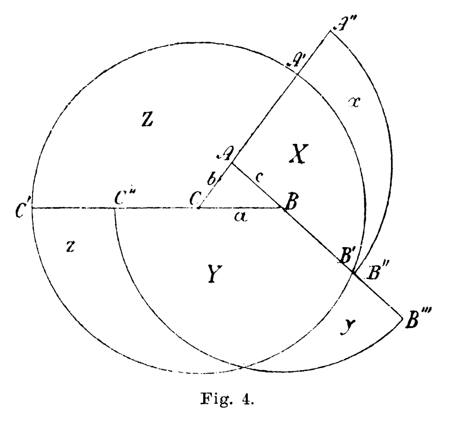


Fig. 4.

Prüfen wir jetzt diesen Schluss, nachdem wir zuvor die Flächenräume durch Bogen eines Kreises vom Halbmesser $CC' = r$ begränzt haben, unter Benutzung der Punkte A, B, C als Mittelpunkte. Der Kreis um C möge die Schenkel des Winkels $\pi - A$ in A' und B' schneiden, so dass er den Flächenraum in der Oeffnung von $\pi - A$ in zwei Theile zerlegt; den einen X im Innern, den andern x ausserhalb des ganzen Kreises mit dem Mittelpunkte C. Die Schenkel [225

des Winkels $\pi - B$ mögen von demselben ganzen Kreise in B' und C' geschnitten werden, so dass der Flächenraum in der Oeffnung von $\pi - B$ in zwei Theile zerfällt: Y im Innern, y ausserhalb des Kreises, ausserdem aber wird der Theil z des ganzen Kreises dem Winkel $\pi - B$ nicht angehören. Das sind alle möglichen Fälle, die unsre Figur darbietet; dabei vorausgesetzt, dass: $r > a$, $r > b$, $r > c$, $a > c$ ist. Bezeichnen wir ferner mit $\varDelta$ den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und mit R den Flächeninhalt des Kreises vom Halbmesser r, so finden wir:

[16

$$\frac{R}{2\pi}(\pi - A) = X + x$$

$$\frac{R}{2\pi}(\pi - B) = Y + y$$

$$\frac{R}{2\pi}(\pi - C) = Z$$

$$R = X + Y + Z + z + \varDelta.$$

Hieraus erhalten wir:

$$(1) \qquad A + B + C = \pi + \frac{2\pi}{R}(\varDelta - x - y + z).$$

Es bliebe jetzt noch zu zeigen, dass, wenn man die Winkelsumme S des Dreiecks $< \pi$ voraussetzt, $\varDelta = x + y - z$ ist für jedes r oder wenigstens für $r = \infty$; aber es wäre vergeblich, diese Arbeit zu unternehmen. Im Gegentheil finden wir unter der Bedingung: $S < \pi$ beständig $\varDelta < x + y - z$, wie wir sogleich sehen werden.

Durch das Anwachsen von $CC' = r$ entfernen sich die Punkte B', B'', B''' von dem Punkte B in der Richtung AB, indem sich die Linien CB', CB'', CB''' einer bestimmten Gränze CD (Fig. 5) nähern, die ich in der neuen Theorie als eine Parallele zu AB bezeichnet habe und die mit CD und CB solche Winkel:

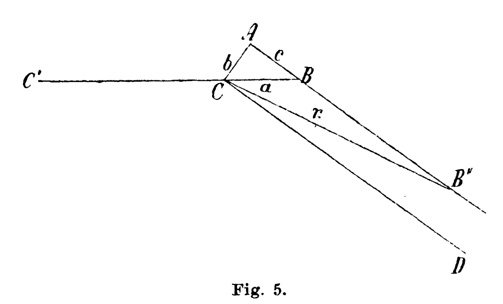


Fig. 5.

$$ACD = \pi - A - \alpha,$$
$$BCD = B - \beta$$

bildet, dass α und β irgend welche positive Zahlen sind. [17

Dabei kann man, wenn man für $CB' = r$ eine genügend grosse Linie nimmt, immer erreichen, dass die Winkel $B'CD$, $B''CD$ so klein ausfallen, wie man will. Bezeichnen wir daher den Flächeninhalt des Dreiecks ACB' mit P, so erhalten wir für ein sehr grosses r (Fig. 4) ohne merkliche Abweichung:

$$\frac{1}{2\pi}(\pi - A - \alpha)R = \frac{1}{2\pi}(\pi - A)R + P - x,$$

und daraus:

$$x = P + \frac{\alpha}{2\pi}R. \tag{2}$$

Wenn wir für den Augenblick den Winkel $C'CD = M$ setzen (Fig. 5), so kann die vorhin angegebene Gleichung:

$$(\pi - B)R = 2\pi(Y + y)$$

nunmehr geschrieben werden: [226.

$$\frac{1}{2\pi}(\pi - B)R = \frac{1}{2\pi}MR + P - \Delta + y - z. \tag{3}$$

Indem wir hierin den Werth:

$$M = A + C + \alpha$$

einsetzen, finden wir eine Gleichung, die in Verbindung mit der [18 Gleichung (2) von Neuem zu der Gleichung (1) führt und diese solchergestalt bestätigt. Setzen wir andrerseits:

$$M = \pi - B + \beta,$$

so erhalten wir aus Gleichung (3):

$$-\beta = \frac{2\pi}{R}(\Delta - P - y + z),$$

was in Verbindung mit den Gleichungen (1) und (2) ergiebt:

$$A + B + C = \pi - \alpha + \beta.$$

Demnach ist in dem Bertrandschen Beweise bereits $\alpha = 0$, $\beta = 0$ vorausgesetzt, eben das, was zu beweisen war.

Aehnlich wie Bertrand von der Vergleichung unendlicher Flächenräume in den Winkeln des Dreiecks befriedigt war, wollte sich Legendre der Zweiecke (biangles) bedienen, indem er unter diesem Ausdrucke die unendlichen Flächenräume zwischen je zwei Lothen verstand. Eigentlich hat er nur soviel bewiesen, dass der unendliche Flächenraum $CABD$ (Fig. 6) zwischen den Lothen AC und BD auf AB gleich ist dem unendlichen Flächenraume $DEFC$, der aus dem ersten entsteht, indem man von [19 diesem mit Hülfe der auf BD senkrechten Geraden EF das Viereck $ABEF$ abschneidet. Eben das ist übrigens an sich klar; aber Legendre liess hierbei noch ausser Acht, dass FE möglicherweise nicht mit AC zusammentrifft.

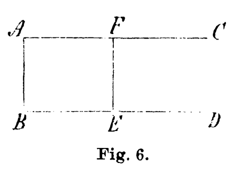


Fig. 6.

Um diese unbedeutende Schwierigkeit zu vermeiden, braucht man nur EF als das von F aus auf BD gefällte Loth anzunehmen; aber auf welche Weise nunmehr hieraus folgen soll, dass $FE = AB$ und der Winkel $EFC = \frac{1}{2}\pi$ ist, da ist

es gar nicht mehr möglich den falschen Schluss zu verbessern, bei dem Legendres Unachtsamkeit so gross war, dass er, ohne den groben Fehler zu bemerken, seinen Beweis für sehr einfach und vollständig streng hielt.

Man hat ferner daran gedacht, bei der Theorie der Parallellinien als Grundlage zu benutzen, dass in den Dreiecken die Winkel von den Verhältnissen der Seiten abhängen müssen. Zunächst erscheint eine solche Annahme ebenso einfach wie nothwendig; aber wenn wir zu erforschen suchen, welche Begriffe wir davon haben, woher sie ihren Ursprung nimmt, so sind wir gezwungen, sie als ebenso willkürlich zu bezeichnen, wie alle andern, auf die man bis jetzt verfallen ist.

In der Natur erkennen wir eigentlich nur die Bewegung, ohne die Sinneseindrücke nicht möglich sind. Folglich sind alle übrigen [227 Begriffe, zum Beispiel die geometrischen, künstlich von unserm Verstande erzeugt, da sie den Eigenschaften der Bewegung entnommen sind; und deshalb ist der Raum an sich, für sich allein, nicht für uns vorhanden. Demnach kann es für unsern Verstand nichts Wider- [20 sprechendes haben, wenn wir zulassen, dass einige Kräfte in der Natur der einen, andre ihrer besondern Geometrie folgen.

Um diesen Gedanken zu erläutern, nehmen wir an, wovon ja viele überzeugt sind, dass die anziehenden Kräfte abnehmen, weil sich ihre Wirkung auf einer Kugelfläche verbreitet. In der gewöhnlichen Geometrie erhält man $4\pi r^2$ als Grösse einer Kugelfläche vom Halbmesser r, weshalb sich die Kraft im quadratischen Verhältnisse des Abstandes verringern muss. In der imaginären Geometrie habe ich die Oberfläche der Kugel gleich:

$$\pi(e^r - e^{-r})^2$$

gefunden und einer derartigen Geometrie folgen möglicherweise die Molekularkräfte, deren ganze Verschiedenheit demnach von der, immer sehr grossen Zahl e abhängen wird. Uebrigens soll das nur eine blose Annahme sein, zu deren Bekräftigung andre, triftigere Beweise aufzusuchen sind; aber das ist gleichwohl zweifellos, dass die Kräfte allein Alles erzeugen: Bewegung, Geschwindigkeit, Zeit, Masse, sogar Abstände und Winkel. Mit den Kräften befindet sich Alles in einer engen Verbindung, die wir ihrem Wesen nach nicht begreifen, weshalb wir auch nicht behaupten können, in die Beziehungen verschiedenartiger Grössen unter einander dürften nur deren Verhältnisse eingehen. Wenn wir die Abhängigkeit von dem Verhältnisse zulassen, warum sollen [21 wir nicht auch eine unmittelbare Abhängigkeit annehmen? Einige Fälle sprechen bereits zu Gunsten dieser Meinung: die Grösse der Anziehungskraft, zum Beispiel, wird ausgedrückt durch die Masse, die durch

das Quadrat des Abstandes dividirt wird. Für den Abstand Null stellt dieser Ausdruck eigentlich nichts dar. Man muss mit irgend einem, grossen oder kleinen, aber immer wirklich vorhandenen Abstande anfangen, und dann erst kommt die Kraft zum Vorschein. Nunmehr fragt es sich, wie erzeugt denn der Abstand diese Kraft? wie besteht diese Verbindung zwischen zwei so verschiedenartigen Dingen in der Natur? Wahrscheinlich werden wir das niemals begreifen; aber, wenn es richtig ist, dass die Kräfte vom Abstande abhängen, so können sich auch die Linien in einer Abhängigkeit von den Winkeln befinden. Wenigstens ist die Verschiedenartigkeit bei beiden Fällen gleich, denn deren Unterschied liegt eigentlich nicht im Begriffe, sondern nur darin, dass wir die eine Abhängigkeit aus Erfahrungen kennen, die andre aber, bei der Mangelhaftigkeit der Beobachtungen, geistig annehmen müssen, entweder jenseits der Gränzen der sichtbaren Welt, oder in der engen Sphäre der Molekularanziehungen.

Wie dem auch sein mag, so wird doch die Annahme, dass [228 nur das Verhältniss der Abstände die Winkel bestimmen kann, ein besonderer Fall sein, auf den wir jedesmal kommen, wenn wir die Linien unendlich klein annehmen. Das Verfahren der gewöhnlichen Geometrie führt daher immer zu richtigen Schlüssen, nur nicht in [22 einem so weiten Sinne, wie sie das allgemeine geometrische System liefert, das ich Imaginäre Geometrie genannt habe. Der Unterschied bei den Gleichungen der einen und der andern entspringt aus der Hinzufügung einer neuen Konstanten, die nunmehr die Beobachtungen liefern müssten, die wir aber hieraus ohne merkliche Abweichung so beschaffen finden, dass die bei praktischen Messungen von Allen angenommene Geometrie mehr als genügend ist, selbst wenn sie an und für sich nicht streng richtig sein sollte. Das bedeutet entweder, dass dieses System sich zufällig in der Natur vorfindet oder dass alle in dieser für uns zugänglichen Abstände noch unendlich klein sind.

Ueberhaupt muss jeder Satz, den die Imaginäre Geometrie bei den Elementen einer Grösse zulässt, wenn er auf Linien von grosser Ausdehnung angewendet wird, nothwendig zu den Regeln der gewöhnlichen Geometrie führen, weil bei dieser Voraussetzung nur die ersten Potenzen der Zahlen beibehalten werden, welche die Linien darstellen, und folglich überall nur deren Verhältnisse in den Gleichungen auftreten. Solche Sätze sind zum Beispiel, dass die Abstände zwischen zwei Lothen überall gleich sind, dass das Loth mit seiner Spitze eine gerade Linie beschreibt, dass der Kreis mit wachsendem Durchmesser in eine gerade Linie übergeht.

Von allen bekannten Sätzen dieser Art muss man dem den Vor-

rang einräumen, der die Abhängigkeit des Verhältnisses der Linien von den Winkeln nach sich zieht; wenigstens steht hier die Ein- [23 fachheit im Begriffe sogar unsrer ersten Erfahrung nahe; das ist aber auch Alles, was man zur Verteidigung sagen kann: jedes andre Urteil ist entweder falsch oder oberflächlich. Auch kann man unmöglich darin ein Bedenken finden, dass mit der unmittelbaren Abhängigkeit der Linien von den Winkeln eine Grösse hereinkommt, die ebenso willkürlich ist, wie die Wahl der Einheit. Wir können darauf antworten, dass nichts hindert, sich in den Gleichungen nicht das Verhältniss der Linien zu einer von denen, die darin betrachtet werden, vorzustellen, sondern das Verhältniss zu einer Grösse, die auf irgend eine Weise in der Natur bestimmt ist. Das habe ich in der Imaginären Geometrie gezeigt, indem ich Gleichungen aufstellte, wo alle Linien im Verhältnisse zu einer einzigen auftreten, die aus Beobachtungen zu bestimmen wäre, wenn diese dazu genügend wären.

Ich halte es nicht für nöthig andre, allzu künstliche, oder willkürliche Annahmen ausführlich zn erörtern. Nur eine davon verdient noch einige Aufmerksamkeit, nämlich der Uebergang des Kreises in eine gerade Linie. Der Mangel ist hier übrigens von vornherein ersichtlich in der Verletzung der Stetigkeit, indem eine Kurve, die nicht aufhört, sich zu schliessen, wie gross sie auch sein mag, sich [229 unvermittelt in die unendliche Gerade verwandeln soll und sie also auf diese Weise eine wesentliche Eigenschaft verliert. In dieser Beziehung füllt die imaginäre Geometrie den Zwischenraum viel besser aus. Wenn wir bei ihr einen Kreis, dessen sämmtliche Durchmesser in einem [24 Punkte zusammenlaufen, vergrössern, so gelangen wir schliesslich zu einer solchen Linie, deren Normalen sich im Unendlichen einander nähern, wenn sie einander auch nicht mehr schneiden können. Diese Eigenschaft kommt jedoch nicht der Geraden zu, sondern der krummen Linie, die ich in meiner Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe der Geometrie“ als Gränzkreis bezeichnet habe.

Wenn man endlich die schwierige Aufgabe des Parallelismus durch die Erfahrung lösen soll, so muss Legendres Vorschlag, auf einem Kreise den Halbmesser sechsmal abzutragen, ohne Zweifel für viel zu ungenau erklärt werden. In meinen „Anfangsgründen der Geometrie“ habe ich unter Benutzung astronomischer Beobachtungen gezeigt, dass in einem Dreiecke, dessen Seiten annähernd dem Abstande der Erde von der Sonne gleich sind, die Winkelsumme nicht mehr als 0,0003 Bogensekunden von zwei Rechten abweichen kann. Diese Abweichung wächst im geometrischen Verhältnisse mit den Seiten des Dreiecks, und folglich ist bis jetzt, wie ich vorhin bemerkt habe, die

gewöhnliche Geometrie bei den Messungen in der Praxis mehr als genügend. Zu diesem Schlusse kann man sogar mit Hülfe ziemlich einfacher und den Anfangsgründen einer Wissenschaft angemessener Sätze gelangen, während allerdings die vollständige Theorie eine ganz veränderte Anordnung des Vortrags erfordert und überdies die Hinzufügung der Trigonometrie.

Zu den Unvollkommenheiten der Parallelentheorie sollte man [25 auch die Erklärung des Parallelismus selbst rechnen. Doch hing diese Unvollkommenheit keineswegs, wie Legendre es vermuthete, von einem Mangel in der Erklärung der geraden Linie ab, geschweige denn, füge ich hinzu, von den Mängeln, die in den ersten Begriffen versteckt waren, und die nachzuweisen ich hier vorhabe, aber auch ihnen abzuhelfen, soweit ich vermag.

Gewöhnlich beginnt man die Geometrie, indem man den Körpern drei Ausdehnungen beilegt, den Flächen zwei, den Linien eine, während man beim Punkte gar keine zulässt. Indem man die drei Ausdehnungen: Länge, Breite und Höhe nennt und unter diesen Benennungen eigentlich die drei Koordinaten versteht, beeilt man sich auf diese Weise verfrühte Begriffe durch Worte mitzutheilen, denen die gesprochene Sprache bereits einen gewissen, für die strenge Wissenschaft freilich noch unbestimmten Sinn beilegt. In der That, wie ist es möglich, sich die Ausmessung der Länge nach klar vorzustellen, wenn wir noch nicht wissen, was eigentlich eine gerade Linie ist? Wie kann man von Breite und Höhe reden, ohne vorher etwas über Lothe, über die Ebene und darüber gesagt zu haben, wie sich die Lothe in einer und in verschiedenen Ebenen verhalten? Wenn endlich der Punkt [230 gar keine Ausdehnung hat, was bleibt denn dann bei ihm übrig, damit er Gegenstand eines Schlusses sein könne? Mag es auch so sein, dass sich jeder die gerade Linie klar vorstellt, obwohl er sich von [26 seinem Begriffe keine Rechenschaft geben kann; aber es fragt sich, auf welche Weise er nunmehr mit Hülfe der geraden Linie bei einer krummen Linie eine Ausdehnung bestimmen soll und bei einer krummen Oberfläche deren zwei.

Freilich, man braucht nicht zu verlangen, dass Länge, Breite und Höhe auf einander senkrecht seien: es genügt, wenn man für sie Linien in verschiedenen Richtungen genommen hat. Jedoch stösst man auch in diesem Falle auf eigenthümliche Schwierigkeiten. Macht man es sich zum Grundsatze, nicht vorzeitig von den Begriffen zu borgen, die man erst im Folgenden entwickeln soll, so ist die Frage, wie dann die Bedingung ausdrücken, dass bei den Körpern die drei Abmessungen drei Geraden in verschiedenen Ebenen angehören sollen? Ferner darf

man die verschiedene Richtung der beiden Theile, die von einem Knick auf einer Linie ausgehen, nicht mit der zweifachen Ausdehnung bei einer Fläche verwechseln und endlich muss man vollständig erklären, was eigentlich unter einer Richtung und unter einem Winkel zu verstehen ist. Kürzer: Raum, Ausdehnung, Ort, Körper, Fläche, Linie, Punkt, Richtung, Winkel sind Wörter, mit denen man die Geometrie beginnt, mit denen man aber niemals einen klaren Begriff verbindet.

Indessen kann man alle diese Dinge noch von einer andern Seite aus betrachten. Es ist nöthig zu bemerken, dass hier die Unklar- [27 heit im Begriffe durch die Abstraktheit hervorgerufen wird, die bei der Anwendung auf wirkliche Messungen überflüssig wird und folglich unnützer Weise in die Theorie hineingebracht worden ist. Die Flächen, Linien und Punkte, wie sie die Geometrie erklärt, sind nur in unsrer Vorstellung vorhanden, während wir die Ausmessung der Flächen und Linien ausführen, indem wir dazu Körper anwenden. Aus diesem Grunde brauchen wir von Flächen, Linien und Punkten nur so zu sprechen, wie wir sie uns bei wirklicher Messung zu denken haben, und dann werden wir uns nur noch an eben die Begriffe halten, die in unserm Verstande mit der Vorstellung von Körpern unmittelbar verbunden sind, an die unsre Vorstellung gewöhnt ist und die wir in der Natur unmittelbar prüfen können, ohne uns zuvor auf andre, künstliche und fremdartige einzulassen. Aber mit diesen neuen Begriffen bekommt die Wissenschaft gerade im Anfange eine andre Richtung, der sie folgt, bis sie in die Analysis übergeht, wo dann das Verfahren beim Vortrage nunmehr wieder das gewöhnliche Ansehen bekommt. Ich will mich bemühen, zu erklären, worin diese Veränderung bestehen mag.

In der Mathematik befolgt man zwei Methoden, die Analyse und die Synthese. Das unterscheidende Merkmal der Analyse bilden die Gleichungen, die jedem Urteile zur ersten Grundlage dienen und [231 die überhaupt zu allen Schlüssen führen. Die Synthese, oder die [28 Methode des Aufbauens, erfordert genau dieselbe Vorstellung, die in unserm Verstande unmittelbar mit den ersten Begriffen verbunden ist. Der Hauptvortheil bei der Analyse besteht darin, dass man darin immer von den Gleichungen aus auf geradem Wege nach dem vorgesetzten Ziele geht. Die Synthese ist überhaupt keinen allgemeinen Regeln unterworfen, aber man muss mit ihr nothwendig den Anfang machen, um schliesslich, nachdem man Gleichungen aufgesucht hat, damit zugleich die Gränzlinie zu erreichen, hinter der nunmehr Alles in die Wissenschaft der Zahlen übergeht.

Zum Beispiel zeigt man in der Geometrie, dass zwei Lothe einander nicht schneiden, dass Dreiecke, bei denen nur einige Theile gleich sind, überhaupt in jeder Beziehung kongruent sind. Vergeblich hat man wohl solche Fälle, wie auch die ganze Theorie der Parallellinien, analytisch untersuchen wollen. Hierin wird man niemals vorwärts kommen, ebenso wie man ohne Synthese nicht auskommen kann, wenn man ebene Flächen misst, die von geraden Linien begränzt sind, oder Körper, die von Ebenen begränzt sind. Es versteht sich von selbst, dass man bei der Synthese die Analyse sogar als Hülfsmittel benutzen muss; aber es ist unstreitig, dass in den Anfangsgründen der Geometrie und der Mechanik die Analyse niemals die einzige Methode sein kann. Der Geometrie wird bis zu einem gewissen Grade immer etwas eigenthümlich geometrisches zugehören, das ihr auf keine Weise genommen werden kann. Man ist im Stande, das Gebiet der Synthese einzuschränken, aber es ganz zu beseitigen ist unmöglich. Bei dieser Bemühung, die Synthese durch Analyse zu ersetzen, darf man sich sogar nicht einmal so sehr beeilen, jedesmal Funktionen zuzulassen, [*29* wo man nur eine Abhängigkeit voraussehen kann, ohne zu wissen, worin sie eigentlich besteht, und noch weniger, wie sie ausgedrückt wird. Mit dieser Begränzung der Analyse bestimmen wir das wahre Ziel und den gehörigen Ort für die andre Methode, die anfangs die Wissenschaft allein beginnt, mit solchen Begriffen, aus denen das Schlussverfahren nunmehr alles Folgende erzeugt, indem es sogleich aus den ersten ihm gegebenen Begriffen neue ableitet und dadurch auch ferner die Gränzen unsrer Kenntnisse nach allen Richtungen bis ins Unendliche erweitert.

Ohne Zweifel werden immer die Begriffe zuerst gegeben sein, die wir in der Natur durch Vermittelung unsrer Sinne erwerben. Der Verstand kann und soll sie auf die kleinste Zahl zurückführen, damit sie hernach der Wissenschaft als eine feste Grundlage dienen können. Gewöhnlich befolgt jedoch niemand die synthetische Methode in dieser Gestalt, unter Einhaltung aller hier ausgesprochenen Regeln, sondern man zieht vor, wenn auch vor der Zeit, die Analyse einzuführen, und setzt eine wenn auch unvollständige Entwickelung der Begriffe voraus, aus denen unser natürlicher Verstand besteht und denen man nur Namen zu geben braucht, ohne sich sehr auf Erläuterungen einzulassen und sich um Genauigkeit bei den Erklärungen zu kümmern. Wenn Leichtigkeit und Einfachheit zur Wahl dieser Methode des Vortrags nöthigen, so wird doch immer die strenge Wissenschaft einen besonderen Vorzug auf ihrer Seite haben, und man wird diesen Vorzug [232 über kurz oder lang benutzen müssen. Den ersten Versuch hierzu [*30*

habe ich bei der Algebra gemacht und nunmehr unternehme ich dasselbe bei der Geometrie.

Die reine, überhaupt von jeder Beimischung der Synthese freie Analyse kann in der Geometrie nicht eher ihren Anfang nehmen, als nachdem zuvor jede Abhängigkeit durch Gleichungen dargestellt ist, und für jede Art geometrischer Grössen Ausdrücke gegeben sind. In der Geometrie können wir die Grösse nur mit Hülfe der Messung verstehen, die für krumme Linien und Flächen eigentlich gar nicht existirt. Wie klein auch die Theile einer Kurve genommen werden mögen, sie bleiben immer krumm, folglich können sie niemals mit Hülfe einer Geraden gemessen werden. Dasselbe muss man von einer krummen Oberfläche sagen, bei der die Theile, wie eng man sie auch begränzen möge, niemals eben sind. Andrerseits giebt es in der Natur weder gerade noch krumme Linien, weder Ebenen noch krumme Flächen: wir finden darin nur Körper, so dass alles Uebrige von unsrer Einbildungskraft geschaffen und daher blos in der Theorie vorhanden ist. Lagrange hat die Annahme des Archimedes zur Grundlage genommen, dass man auf einer Kurve stets zwei Punkte so nahe bei einander annehmen kann, dass alsdann der Bogen zwischen ihnen für grösser als die Sehne erachtet werden kann, aber für kleiner als die beiden Tangenten an den Bogen, die von dessen Enden bis zu ihrem Zusammentreffen gezogen sind (Théorie des fonctions analytiques, par Lagrange). Eine derartige Annahme ist wirklich nöthig, aber durch sie wird der ursprüngliche Gedanke, krumme Linien mit geraden [*31* zu messen, beseitigt. Ebenso verhält es sich mit den Flächen, wenn man beabsichtigt, sie mit Ebenen zu messen.

Demnach stellt die Berechnung der Länge einer krummen Linie, sowie der Grösse einer krummen Fläche keineswegs sozusagen das Geradeмachen der Krümmung dar, sondern sie erstrebt ein völlig andres Ziel: die Gränze zu finden, der die thatsächliche Ausmessung um so näher kommt, je genauer sie gemacht worden ist. Die Messung aber hält man für um so genauer, je feiner die Glieder der benutzten Kette sind; für am genausten hält man sie endlich, wenn man anstatt der Kette einen dünnen, vollkommen biegsamen Faden nimmt. Das ist der Grund, weshalb man in der Geometrie eigentlich zeigen muss, dass die Summe der Tangenten abnimmt, während gleichzeitig die Summe der Sehnen wächst, bis die zwei Summen aufhören sich merklich von der Gränze zu unterscheiden, der sich beide nähern und welche die Geometrie nunmehr als Länge der krummen Linie annimmt. Jetzt ist klar, dass die Berechnung nach dieser Regel mit der Messung um so mehr übereinzustimmen pflegt, je genauer diese ist. Zugleich ist

hier ersichtlich, worauf die Annahme des Archimedes begründet ist. Nach dem Vorbilde der krummen Linien muss man die Grösse der Flächen beurteilen, aber keineswegs darf man behaupten, sehr kleine Theile seien geeignet, eben gemacht zu werden.

Für Flächen, die von krummen Linien begränzt sind, und für Körper, die von krummen Flächen begränzt sind, giebt es eben- [32 falls keine Messung im strengen Sinne, sobald im ersten Falle ein Quadrat, im zweiten ein Würfel als Mass dienen soll. Da wir [233 jedoch immer nur die Gränze zu finden beabsichtigen, der sich die wirkliche Messung nähert, so müssen wir zeigen, dass wir sicher jedesmal zu einer derartigen Gränze gelangen; ferner müssen wir erklären, in welcher Art wir uns die Messung vorzustellen haben und wie wir dabei die verlangte Genauigkeit erreichen können. Sollen alle diese Forderungen erfüllt werden, so kann man unmöglich ohne besondere Hülfsannahmen auskommen, die man als Axiome annimmt:

1) Flächenräume sind gleich, wenn der eine von ihnen in der Weise zusammensetzbar ist, dass der andre in Theile zerlegt wird, die in neuer Anordnung zusammengefügt werden;

2) Ein Flächenraum ist kleiner als ein solcher, in dem er ganz Platz hat, ohne dabei diesen vollständig auszufüllen;

3) Die Grösse eines Dreiecks verschwindet bei unbegränzter Verkleinerung einer Seite.

Die letzte Annahme ist sogar bei der Messung der Flächenräume selbst nothwendig. Auf ähnliche Axiome muss man sich auch bei der Messung von Körpern stützen.

Kapitel I. [235 33]

Die ersten Begriffe in der Geometrie.

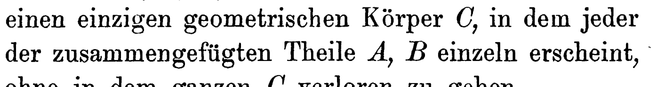
§ 1.

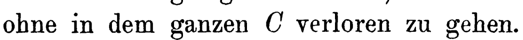
Die Berührung bildet das unterscheidende Merkmal der Körper, und ihr verdanken sie den Namen: geometrische Körper, sobald wir an ihnen diese Eigenschaft festhalten, während wir alle andern, mögen sie nun wesentlich sein oder zufällig, nicht in Betracht ziehen.

Gegenstand der Beurteilung sind ausser den Körpern zum Beispiel auch Zeit, Kraft und Geschwindigkeit der Bewegung; aber der Begriff, der in dem Worte Berührung enthalten ist, bezieht sich nicht darauf. In unserm Verstande verbinden wir ihn blos mit den Körpern, wenn wir von deren Zusammensetzung oder Zerlegung in Theile reden. Diese einfache Vorstellung, die wir unmittelbar in der Natur durch

die Sinne empfangen haben, geht nicht aus andern hervor und unterliegt deshalb keiner Erklärung mehr.

Zwei Körper A und B (Fig. 7), die einander berühren, bilden einen einzigen geometrischen Körper C, in dem jeder der zusammengefügten Theile A, B einzeln erscheint, ohne in dem ganzen C verloren zu gehen.





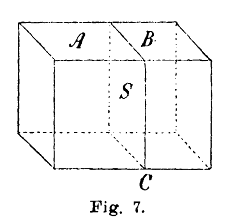


Fig. 7.

Umgekehrt wird jeder Körper C durch einen beliebigen Schnitt S in zwei Theile A und B zerlegt. Hierbei verstehen wir unter dem Worte Schnitt nicht etwa irgend eine neue Eigenschaft des [34 Körpers, sondern wieder die Berührung, indem wir eben diesmal die Zerlegung des Körpers in zwei berührende Theile ausdrücken. Wir werden ferner die beiden Theile A und B die Seiten des Schnittes S in dem Körper C nennen.

Auf diese Weise können wir uns alle Körper in der Natur als Theile eines einzigen ganzen Körpers vorstellen, den wir Raum nennen.

§ 2.

Jeden Körper A (Fig. 8) kann ein andrer B derart berühren, dass es für einen dritten C unmöglich wird, A und B gleichzeitig zu berühren. In diesem Falle nennt man B den umgebenden Raum, vorausgesetzt, dass jeder Körper C darin enthalten ist, oder den Ort des Körpers A, indem man nur die Berührung zwischen A und B in Betracht zieht und [236 deshalb jeden Theil C, der A nicht berührt, aus dem umgebenden Raume wegzulassen gestattet. Befindet sich der Körper A in dieser Art der Berührung mit B, ist es ausserdem unmöglich, mit A irgend einen Körper zu verbinden, der B nicht berührt, so sagt man, dass A den Ort B ausfüllt. Alle andern Körper, die ohne jede an ihnen vorgenommene Veränderung ebenfalls den Ort B ausfüllen, werden dann geometrisch in allen Beziehungen unter einander kongruent sein.

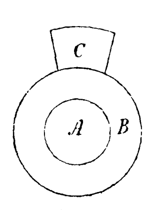


Fig. 8.

Blos gleich sind zwei Körper, sobald die Theile des einen [35 in neuer Ordnung vertheilt werden müssen, um den Ort des andern auszufüllen.

Die Messung eines geometrischen Körpers wird ausgeführt, indem man ihn zugleich mit einem andern, als Mass genommenen, in gleiche Theile zerlegt. Dargestellt wird die Grösse alsdann durch das Verhältniss der Zahl der Theile in dem gegebenen Körper zur Zahl der Theile in dem Masse. Die Möglichkeit, die Grösse von Körpern zu finden, setzt folglich die Möglichkeit voraus, jeden Körper durch Ver-

vielfachung eines einzigen zusammenzusetzen, der, indem er an sich selbst angelegt wird, schliesslich sowohl den gemessenen Körper als auch das Mass selbst ausfüllen würde. Ist es unmöglich, das vollständig zu erreichen, so beginnt man damit, dass man dem Masse eine bestimmte Gestalt giebt, und dann zerlegt man es in Theile, die zwar beliebige Grösse haben können, aber doch immer kongruent sein müssen, und zwar derart, dass es in Verbindung mit sich selbst und mit den Theilen einen zusammenhängenden Körper bildet, der den Raum über alle Gränzen hinaus erfüllt. Alsdann wird man bei der Zusammensetzung zur Bildung eines jeden Körpers gelangen können, indem man den Grad der Gleichheit erreicht, über den hinaus unsre Sinne schon aufhören, Mängel zu erkennen. Die Fehler bei der Messung werden dann solche Abweichungen nicht übertreffen, wie sie sogar in der Natur selbst vorkommen, denn diese muss in jeder Wissenschaft immer das Hauptziel sein, und obgleich wir die ersten Begriffe aus ihr schöpfen, so verdanken wir doch gerade die Schärfe dieser Begriffe der Unvollkommenheit unsrer Sinne. In der That, in der Natur [*36* giebt es keine stetige Konstruktion, und ein Bildungsgesetz wird infolgedessen niemals bis zu den kleinsten Theilchen aufrecht erhalten, wie man es sich beim ersten Male für jedes Ganze von grossen Abmessungen vorstellt. Andrerseits erzeugen wir zwar in unsrer Vorstellung inkommensurable Körper, wie zum Beispiel die Kugel und den Würfel, wir brauchen jedoch nur über die Merkmale des Grösser und Kleiner eine Verabredung zu treffen, folglich überhaupt bei jedem Körper eine bestimmte Grösse zuzulassen und sodann den ausgemessenen in Gränzen einzuschliessen, die wir nach Belieben nahe zusammenbringen können, dann werden wir mit jeder beliebigen Genauigkeit zu der Grösse der Vorbilder in unsern Gedanken gelangen.

§ 3.

Jeder Körper kann in Theile zerlegt werden, bei denen über einen Theil hinaus keine gegenseitige Berührung stattfindet. Derartige Schnitte werden wir Reihenschnitte nennen. Sie bestimmen die Ausdehnung, nach der sich der Körper bis ins Unendliche erstreckt, wenn wir unaufhörlich von dem umgebenden Raume neue Theile hinzufügen, die [237 nicht über einen hinaus berühren.

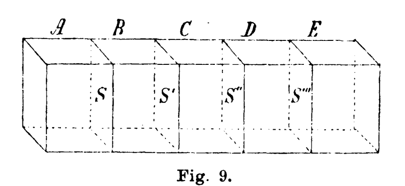


Fig. 9.

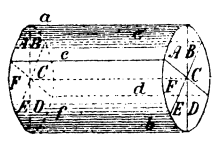
In Figur 9 sind die Theile A, B, C, D, E eines Körpers dargestellt, die der Reihe nach durch Berührung verbunden sind, während

A weder C noch D noch E berührt und ebenso B weder D noch E berührt. Die Schnitte S, S', S'', S''', durch die eine derartige Zerlegung erzeugt ist, werden Reihenschnitte sein.

§ 4.

Der erste Schnitt zerlegt den Körper in zwei Theile; ein [37 zweiter, der von der einen Seite auf die gegenüberliegende übergeht, erzeugt bereits vier. In diesem Falle kann man die beiden Schnitte immer derart führen und alsdann noch neue hinzufügen, so dass bei jedem Male die Zahl der Theile um zwei vermehrt wird und alle einander gegenseitig berühren. Derartige Schnitte, deren Zahl folglich unbegränzt ist, werden wir Wendeschnitte nennen.

In Figur 10 zerlegt der Schnitt ab den Körper in zwei Theile; die Schnitte cd und ef fügen noch je zwei hinzu, so dass alle sechs Theile AA, BB, CC, DD, EE, FF einander gegenseitig berühren. Zum Beispiel berührt AA nicht nur BB, sondern auch noch CC, DD, EE, und FF. Die drei Schnitte ab, cd, ef werden Wendeschnitte sein.


Fig. 10.

Zwei Schnitte, von denen jeder in Bezug auf den andern von der einen Seite auf die gegenüberliegende übergeht, werden wir der Kürze halber Schnitte übers Kreuz nennen. In Figur 10 sind zum Beispiel die Schnitte ab und cd übers Kreuz geführt. Von den vier Theilen, die in einem Körper durch solche Schnitte erzeugt werden, wollen wir zwei solchen, die sich in Bezug auf beide Schnitte auf gegenüberliegenden Seiten befinden, den Namen Theile übers Kreuz geben. In Figur 10 sind die folgenden Theile übers Kreuz dargestellt: AA mit DD, BB mit EE, CC mit FF. Hier [38 liegen AA und DD auf gegenüberliegenden Seiten sowohl in Bezug auf den Schnitt ab wie in Bezug auf cd.

Es ist zu bemerken, dass zwei Schnitte übers Kreuz zuweilen einen Körper in vier Theile zerlegen, die einander nicht über einen hinaus berühren. Jedoch ist in diesem Falle der erste Theil wiederum durch Berührung mit dem vierten verbunden, und es ist deshalb hier unmöglich, die Zerlegung mit der zu verwechseln, die aus Reihenschnitten entsteht. Auf Figur 11 ist die Seitenansicht eines solchen Körpers dargestellt, der durch die Schnitte $abcd$ und $efgh$ in vier Theile A, B, C, D zerlegt wird, die einander nicht über einen hinaus berühren. Indessen ist der erste Theil A mit dem vierten D verbunden, und deshalb ist es unmöglich, von der Zerlegung anzunehmen,

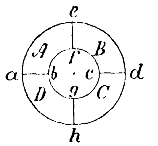


Fig. 11.

sie sei vermöge der vier Reihenschnitte *ab*, *ef*, *cd* und *gh* entstanden. Das unterscheidende Merkmal zwischen den Reihenschnitten und den Schnitten übers Kreuz besteht darin, dass die ersten nicht von der einen Seite auf die gegenüberliegende übergehen. In Figur 11 dagegen zerlegt der Schnitt *abcd* den Körper in zwei Theile *ahd* und *aed*, die die beiden Seiten des Schnittes *abcd* darstellen; der andre Schnitt [238 *efgh* geht von der einen Seite *aed* auf die andre *ahd* über. Würde man zum Beispiel den Theil *D* wegwerfen und dadurch die Berührung von *A* mit *D* und von *D* mit *C* beseitigen, so würden in diesem Falle die beiden Schnitte *ef* und *cd* zu Reihenschnitten werden.

Uebrigens muss bei zwei Schnitten übers Kreuz immer eine Berührung von wenigstens zwei Theilen übers Kreuz entstehen, wenn [39 nicht in dem Körper selbst, so doch in dem umgebenden Raume, folglich, wenn man aus diesem Raume zu dem Körper einen gewissen Theil hinzufügt. So kann in Figur 11 der Körper durch einen von dem umgebenden Raume genommenen Theil vervollständigt werden, mit dem Erfolge, dass in diesem zusammengesetzten Körper die beiden Schnitte nicht unterbrochen werden.

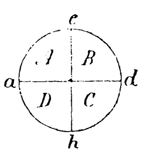


Fig. 12.

Wenn wir die Schnitte als ununterbrochen annehmen, so können wir zwei Fälle zulassen: die beiden Schnitte *ad* und *eh* (Fig. 12) erzeugen entweder vier Theile *A*, *B*, *C*, *D*, von denen je zwei: *A* und *C*, *B* und *D* einander übers Kreuz berühren, oder solche, bei denen nur zwei Theile, zum Beispiel *A* und *C* (Fig. 13) einander berühren, während die beiden andern, *B* und *D*, nicht verbunden sind. Nur in dem einen, dem ersten dieser beiden Fälle werden die beiden Schnitte *ad* und *eh* (Fig. 12) Wendeschnitte sein.

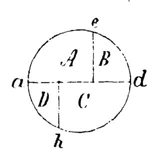


Fig. 13.

§ 5.

Jeden Körper kann man durch drei Schnitte derart in acht einander gegenseitig berührende Theile zerlegen, dass Reihenschnitte zu jedem dieser drei Schnitte immer je vier einander gegenseitig berührende Theile absondern. In diesem Falle werden wir die drei Schnitte Hauptschnitte nennen. Eine noch grössere Zahl von Schnitten dieser Art kann übrigens bei den Körpern nicht vorkommen, obwohl jeder von ihnen sowohl durch einen ihm entsprechenden Wendeschnitt als durch einen solchen Reihenschnitt ersetzbar ist. Einen vierten Schnitt, dem unter dieser Bedingung der Name Hauptschnitt zukommen könnte, lässt kein Körper zu. [40 Wirklich sind wir ausser Stande auch nur einen einzigen Körper durch

einen vierten Schnitt, bei dem die Zahl der einander gegenseitig berührenden Theile verdoppelt wird, derart zu zerlegen, dass die Berührung aller sechzehn Theile erhalten bleibt, wenn wir die Schnitte durch ihnen entsprechende Reihenschnitte ersetzen.

Die drei Hauptschnitte *ab*, *cd* und *ef* (Fig. 14) zerlegen den Körper in acht Theile: *A*, *B*, *C*, *D*, *A'*, *B'*, *C'*, *D'*, die einander gegenseitig berühren. Dasselbe wäre herausgekommen, wenn wir zum Beispiel an Stelle von *cd* irgend einen ihm entsprechenden Reihenschnitt oder Wendeschnitt genommen hätten.

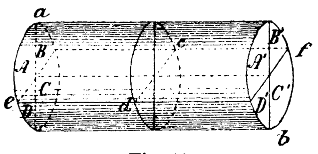


Fig. 14.

Sollen drei Schnitte, durch die ein Körper zerlegt ist, Hauptschnitte sein, so genügt es noch nicht, dass alle acht Theile einander gegenseitig berühren. Es ist erforderlich, dass die jedem Schnitte entsprechenden Reihenschnitte jedesmal je vier Theile abschneiden, die einander übers Kreuz berühren, wenigstens sobald wir solche Theile nicht in Betracht ziehen, die einander überhaupt gar nicht übers Kreuz berühren. Wir stellen uns jetzt vor, dass zu einem der drei Hauptschnitte ein Reihenschnitt gelegt ist: zwischen [239 beiden werden vier Theile ausgeschnitten werden, deren Berührung eine von den dreien sein kann, die auf den Figuren 11, 12 und 13 dargestellt sind. Der erste Fall entscheidet noch nicht, ob man die

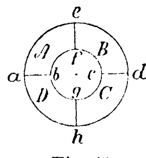


Fig. 11.

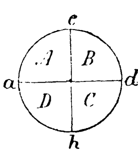


Fig. 12.

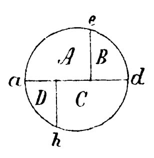


Fig. 13.

Schnitte *ad* und *eh* für zwei Hauptschnitte halten muss; aber in dem Falle, den wir auf Figur 12 sehen, können die beiden Schnitte [*41* *ad* und *eh* Hauptschnitte sein, wenn sich dasselbe überall zwischen je zwei Reihenschnitten wiederholt oder wenn wenigstens nur zwischen einigen die Berührung übers Kreuz vollständig vernichtet wird.

§ 6.

Sind in einem Körper drei Hauptschnitte gelegt, womit dann zugleich acht Theile entstanden sind, die einander gegenseitig berühren, so berühren zwei durch den ersten Schnitt entstandene Theile einander flächenhaft, zwei Theile, die in Bezug auf zwei Schnitte übers Kreuz liegen, berühren einander linienhaft, zwei Theile, die sich in Bezug

auf jeden der drei Schnitte auf gegenüberliegenden Seiten befinden, berühren einander in einem Punkte.

Figur 7 stellt die flächenhafte Berührung zweier Theile A und B in dem Körper C dar. Auf Figur 15 sieht man die linienhafte Berührung zweier Körper A und B, die aus einem vermittelst der Schnitte ab und cd ausgeschnitten werden. In Figur 16 berühren die beiden

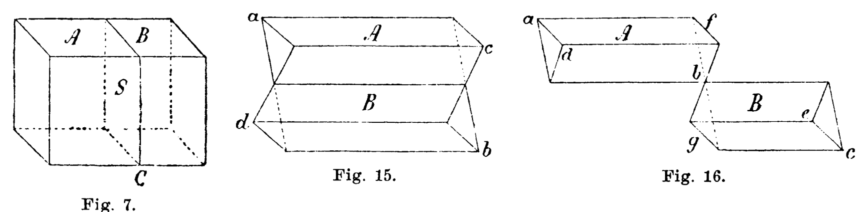


Fig. 7. Fig. 15. Fig. 16.

Körper A und B einander in einem Punkte, indem sie aus einem Körper mit Hülfe der drei Schnitte abc, dbe, fbg ausgeschnitten sind.

Jeder Körper befindet sich mit dem umgebenden Raume in flächenhafter Berührung. Als den Schnitt, durch den er abgesondert ist, kann man sich entweder einen einzigen Schnitt denken, oder zwei Wendeschnitte oder endlich drei Hauptschnitte. Demnach berühren zwei [42 Theile eines Körpers einander entweder flächenhaft, oder linienhaft oder in einem Punkte.

§ 7.

Wenn wir blos von der Berührung zwischen zwei Körpern reden und infolgedessen bei jedem von beiden die Theile nicht in Betracht ziehen, die den andern nicht berühren, so erhalten die beiden Körper den Namen: Fläche, Linie oder Punkt, je nach der Art, von der die Berührung zwischen ihnen ist: flächenhaft, linienhaft oder in einem Punkte.

Wenn also zwei Körper A und B (Fig. 17) einander flächenhaft berühren, indem sie sich auf den beiden Seiten des Schnittes S befinden, so bekommen sie fortan den Namen: Fläche S, sobald es erlaubt ist, jeden Theil a, der B nicht berührt, zu A hinzuzufügen oder davon wegzunehmen und bei B jeden Theil b, der A nicht berührt. Die Absonderung solcher Theile a und b muss mit Hülfe von Reihen-

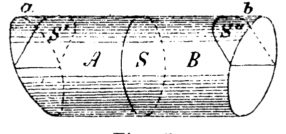


Fig. 17.

schnitten S' und S'' geschehen, die S entsprechen, und kann fortgesetzt werden, bis wir bei beiden Körpern zur Dünne eines Papierblattes gelangen, oder so weit, wie die Vorstellung noch im Stande ist, der Theilung zu folgen. Gewöhnlich stellt man sich die Flächen in dieser Gestalt vor, nämlich vermöge zweier ausserordentlich dünner

Körper, indem man seine Aufmerksamkeit von den Theilen an diesen abwendet, die in Betracht zu ziehen überhaupt nicht nöthig ist.

Wenn zwei Körper A und B (Fig. 18) einander linienhaft [240 43] berühren, indem sie Theile eines einzigen darstellen, die durch zwei Schnitte ab und cd ausgeschnitten sind, wenn es ferner gestattet ist, von A jeden Theil α wegzunehmen, der B nicht berührt, von B jeden Theil β, der A nicht berührt, so bekommen die beiden Körper unter dieser Bedingung fortan den Namen: Linie. Die Abtrennung der Theile α und β kann bei beiden Körpern mit Hülfe von Reihenschnitten S und S' vor sich gehen, die den beiden Schnitten ab und cd entsprechen, und sie bringt die Körper bis zur Dünne eines Haares oder des Striches ef auf dem Papiere oder so weit, wie man diese Theilung durch die Vorstellung zu begreifen im Stande ist. So stellt man sich die Linien gewöhnlich vor, nachdem man bei ihnen vorher das unmerklich gemacht hat, was hier die Aufmerksamkeit nicht auf sich ziehen soll.

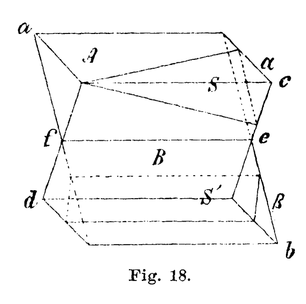


Fig. 18.

Wenn zwei Körper A und B (Fig. 19) einander in einem Punkte berühren und folglich als Theile betrachtet werden können, die mit Hülfe von drei Hauptschnitten abc, dbe und fbg in einem einzigen Körper ausgeschnitten sind, so nennt man A, B in dem Falle einen Punkt, wenn es gestattet ist, von A jeden Theil α, β wegzunehmen, der B nicht berührt, und von B jeden Theil γ, der A nicht berührt. Die Abtrennung solcher Theile geht bei beiden Körpern durch Vermittelung von Schnitten S, S', S'' vor sich, die den drei Hauptschnitten abc, dbe, fbg als Reihenschnitte entsprechen, und führt den Körper schliesslich auf die Kleinheit eines Sandkörnchens zurück oder auf einen Punkt b, [44] wie er durch die Berührung der Feder entsteht, woher eben die Benennung entlehnt ist.

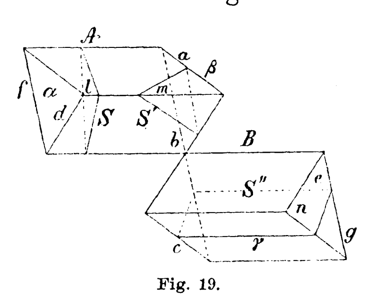


Fig. 19.

Bei jedem Körper erzeugt dessen Berührung mit dem umgebenden Raume eine Fläche, die den Körper begränzt. Der Körper selbst ist die innere, der umgebende Raum die äussere Seite der Fläche. Schnitte in dem Körper erzeugen Flächen, die innere genannt werden und die sich eben dadurch von der äusseren Fläche in dem Gebiete der Berührung mit dem umgebenden Raume unterscheiden.

Jede Linie gehört einer unzählbaren Menge von Flächen an, die durch Wendeschnitte (§ 4) erzeugt sind. Eben das meint man, wenn man sagt, dass Flächen *einander in einer Linie schneiden*, die auf jeder von ihnen liegt und jede in zwei Theile, *die Seiten der Linie*, zerlegt. In dem Durchschnitte der äusseren Fläche eines Körpers mit einer inneren Fläche, die ausserhalb des Körpers fortgesetzt ist, entsteht eine Linie, die *sich schliesst* und die innere Fläche *begränzt*, oder mit andern Worten: sie trennt *die innere Seite der Linie* von der *äusseren* unbegränzten in dem umgebenden Raume.

Ein Punkt gehört allen Linien an, in denen drei Hauptschnitte sowie die ihnen entsprechenden Wendeschnitte einander durchschneiden. Jede Linie zerlegt der Punkt in zwei Theile, die zwei gegenüber- [*45* liegende Seiten des Punktes bestimmen. Wenn sich die Linie schliesst, so muss man aus ihr einen Theil herausnehmen, um die beiden verbundenen Seiten nicht mehr zu verwechseln.

§ 8. [241

Die Messung von Körpern verlangt deren Zerlegung in gleiche Theile (§ 2). Die Zerlegung kann mit Hülfe von Reihenschnitten geschehen, die drei Hauptschnitten entsprechen, und deshalb besitzen die Körper drei Ausdehnungen, die durch die drei Schaaren von Reihenschnitten bestimmt sind.

Dürfen wir annehmen, dass wir auf diese Weise im Stande sind, jeden Körper auszumessen, wie das in der Folge gezeigt werden wird, so können wir zu jedem Schnitte einen Reihenschnitt führen und so zwischen beiden einen solchen Theil ausschneiden, dessen Grösse im Vergleich mit der Grösse des ganzen Körpers beliebig verkleinert werden kann. Andrerseits verändert eine derartige Verkleinerung der Grösse des Körpers die Fläche nicht, die der erste Schnitt erzeugt. Demnach muss in dieser Beziehung die Grösse einer Fläche im Vergleich mit der Grösse eines Körpers für Null erachtet werden.

§ 9.

Die Messung einer Fläche erfordert ähnlich wie die Messung von Körpern die Zerlegung in gleiche Theile. Eine solche Zerlegung ist möglich, wenn wir zu dem Schnitte, der die Fläche selbst erzeugt, [*46* noch zwei hinzufügen, um drei Hauptschnitte herzustellen, und sodann zu jedem der beiden hinzugekommenen Reihenschnitte führen. Hier bestimmen die beiden Schaaren von Reihenschnitten zwei Ausdehnungen, während von der dritten Schaar nur Theile abgeschnitten werden, die der Fläche nicht angehören (§ 7).

Wenn wir annehmen, dass eine Oberfläche auf diese Weise immer ausgemessen werden kann, ebenso wie überhaupt jeder Teil von ihr, der zwischen zwei, ihre eine Ausdehnung bestimmenden Reihenschnitten liegt, so können wir diesen Theil im Vergleich mit der Grösse der ganzen Fläche beliebig verkleinern. Da aber ein Theil einer Fläche die eine Seite einer Linie bildet, so wird in dieser Beziehung die Grösse einer Linie im Vergleich mit einer Fläche null sein. Bei der Messung von Flächen kann man daher die Reihenschnitte durch ihnen entsprechende Wendeschnitte ersetzen; das aber bedeutet, dass man nur die Linien selbst, die auf der Fläche gezogen sind, in Betracht zu ziehen hat, welchen Schnitten sie auch übrigens angehören mögen und wie auch die Schnitte ausserhalb der Fläche fortgesetzt werden mögen.

§ 10.

Die Messung von Linien erfordert deren Zerlegung in Theile, die man durch eine einzige Schaar von solchen Reihenschnitten aus- [47 schneiden kann, die dem dritten Hauptschnitte entsprechend gelegt sind, wobei man als die beiden andern eben die nimmt, in denen sich die Linie befindet. In der That schneiden die den beiden letzteren entsprechenden Reihenschnitte nur Theile ab, die nicht zu der Linie gehören (§ 7).

Setzen wir die Möglichkeit voraus, die Grösse jeder Linie zu finden und ebenso die Grösse jedes Theiles auf ihr zwischen zwei Punkten, lässt man ferner zu, dass dieser Theil nach Belieben verkleinert werden kann, so muss man den Punkt im Vergleich mit der Grösse der Linie als Null betrachten, weil alle diese Theile dem Punkte gar nicht angehören.

§ 11. [242

Die Grösse eines Punktes muss man in jedem Falle im Vergleiche mit der Grösse von Linien für Null erachten, weil alle Linien, wie klein sie auch sein mögen, verkleinert werden können, ohne dass die Grösse eines Punktes, der diesen Linien angehört, beeinflusst wird (§ 7).

Ueberhaupt können sowohl die Linien als die Punkte, wenn sie unter einander durch Schnitte verbunden sind, denen sie angehören und die folglich alle paarweise Wendeschnitte sein werden, nicht vergrössert werden, ohne dass gleichzeitig die Schnitte, wenn einer durch einen andern ersetzt wird, neue Linien und Punkte erzeugen. [48 Werden daher zwei Linien auf diese Weise vereinigt, so bleibt ihre Grösse stets die der grösseren unter ihnen oder die alte, falls beide gleich sind; die Grösse eines Punktes aber wird niemals verändert.

Diese Eigenschaft der Linien und der Punkte, durch Verdoppelung nicht vergrössert zu werden, ist unter den geometrischen Grössen dieselbe, die unter den Zahlen den Nullen eigenthümlich ist.

§ 12.

Die relative Lage zweier Punkte heisst deren Abstand und wird durch die Berührung zweier Körper bestimmt, bei denen alle Veränderungen zulässig sind, die die Punkte selbst nicht verändern, so dass der Abstand als derselbe gilt, wenn der Unterschied von solchen Theilen des einen Körpers herrührt, die den andern nicht berühren, oder von verschiedenen Wendeschnitten, denen die Punkte auf gleiche Art angehören.

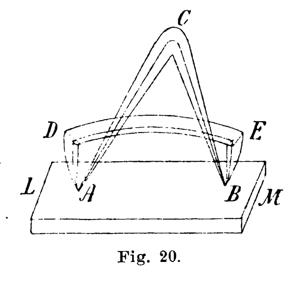


Fig. 20.

Der Abstand der Punkte A und B (Fig. 20) wird durch die Berührung des Körpers LM mit ACB ebenso bestimmt wie durch die Berührung des Körpers LM mit $AD[E]B$, weil hier die Verschiedenheit bei den berührenden Körpern entweder durch solche Theile des einen bestimmt ist, die den andern nicht berühren, oder durch solche Theile, deren äussere Flächen Wendeschnitte darstellen, denen beide Punkte angehören.

Kapitel II.

[243 3]

Erklärung der Kugel, der Kugelfläche, des Kreises, der Ebene und der geraden Linie.

§ 13.

Die Kugel ist ein Körper, dessen äussere Fläche, die Kugelfläche, so beschaffen ist, dass ihre sämmtlichen Punkte gleiche Abstände (§ 12) von einem Punkte im Innern haben, dem Mittelpunkte der Kugel oder der Kugelfläche. Dieser Abstand vom Mittelpunkte bis zu den Punkten der Kugelfläche heisst Halbmesser der Kugel und zugleich auch der Kugelfläche selbst.

Schon mit dem ersten Begriffe von Körpern nehmen wir in [4 der Geometrie den Mittelpunkt im Innern der Kugel an, indem wir uns um jeden Punkt herum die Kugelfläche als eine solche Fläche vorstellen, die einen Theil des Raumes vollständig begränzt und zwar überall da, wo dieser Theil den umgebenden Raum berührt (§ 2).

§ 14.

Kugelflächen mit gleichen Halbmessern sind immer kongruent, weil sie mit allen ihren Punkten zusammenfallen, sobald sie den Mittelpunkt gemein haben (§ 2).

Kugeln mit gleichen Halbmessern sind ebenfalls kongruent, da die eine den Ort der andern ausfüllt (§ 2).

Kongruente Kugelflächen um denselben Mittelpunkt fallen demgemäss jederzeit zusammen, welchen Punkt der einen man auch auf einen beliebigen Punkt der andern bringen mag.

Jeder Theil einer Kugelfläche fällt mit der Kugelfläche selbst zusammen, wohin man ihn auch auf dieser legen mag, solange beide den Mittelpunkt gemein haben.

§ 15.

Koncentrische Kugelflächen, das heisst Kugelflächen um denselben Mittelpunkt, aber mit verschiedenen Halbmessern, können keine Punkte gemein haben (§ 13). Die zugehörigen Kugeln sind daher die eine in der andern enthalten.

Koncentrische Kugelflächen stellen vermöge dieser ihrer Eigenschaft Reihenschnitte im Raume dar (§ 3) und dienen daher bei [5 Körpern, Flächen und Linien zur Bestimmung einer Ausdehnung.

Als kleiner gelten solche Halbmesser, die zu koncentrischen [244 Kugeln gehören, die im Innern andrer enthalten sind. Dies liefert das erste Mittel zur Vergleichung verschiedener Abstände unter einander.

Demnach wird jeder Körper durch koncentrische Kugelflächen nothwendig in Theile zerlegt.

§ 16.

Es kann nur einen Mittelpunkt im Innern der Kugel geben.

Im Innern der Kugelfläche A (Fig. 21) nehmen wir zwei Mittelpunkte a und b an. Um den einen, zum Beispiel um a, denken wir uns eine Kugelfläche B mit dem Halbmesser ab. Auf dieser werden alle Punkte ebenfalls Mittelpunkte der Kugelfläche A sein, weil jeder Punkt c auf der Kugelfläche B durch Bewegung um a nach b gelangt, während die Kugelfläche A, da sie durch ihre zugehörige Kugel mit B verbunden ist, bei ihrer Umdrehung nicht aufhört, mit sich selbst zusammenzufallen (§ 14); demnach muss der Punkt c sowohl an dem Orte b als an seinem früheren Orte diese Eigenschaft besitzen. Für jeden Punkt d auf der Kugelfläche A fallen daher seine

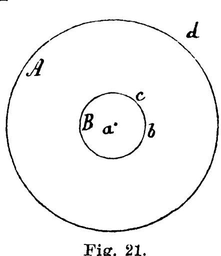


Fig. 21.

Abstände von b und c und überhaupt von allen Punkten auf der Kugelfläche B gleich aus. Das aber würde bedeuten, dass man als Mittelpunkt der Kugelfläche B einen Punkt d ausserhalb dieser Kugelfläche betrachten könnte (§ 13).

Bemerken wir noch, dass die zur Kugelfläche B gehörige Kugel [6 durch Kugelflächen um d gar nicht in Theile zerlegt werden und infolgedessen auch nicht als ein Körper gelten könnte (§ 15).

§ 17.

Eine Kugel wird durch die zugehörige Kugelfläche nicht in Theile zerlegt.

Sonst befänden sich unter den Theilen der durch ihre Kugelfläche zerlegten Kugel solche, innerhalb deren der Mittelpunkt nicht enthalten wäre (§ 16) und die infolgedessen durch zu der Kugel koncentrische Kugelflächen nicht weiter in Theile zerlegt werden könnten (§ 15).

§ 18.

Ebene nennt man die Fläche, auf der gleiche Kugelflächen um zwei feste Mittelpunkte, die Pole, einander schneiden.

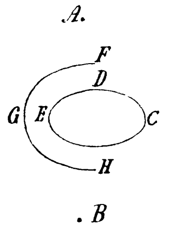


Fig. 22.

Es seien A und B (Fig. 22) die Pole, um die Kugelflächen mit demselben Halbmesser $AC = BC$ beschrieben sind. Die gemeinsamen Punkte C, D, E gehören einem Kreise an und ebenso auch der ganzen Ebene mit allen den andern Punkten F, G, H, die Kugelflächen um dieselben Pole A und B mit irgend welchen Halbmessern $AG = BG$ gemeinsam sind.

Theile eines Kreises, zum Beispiel CD und FG heissen Kreisbögen.

§ 19. [7

Die Ebene setzt sich bis ins Unendliche fort und theilt so den Raum in zwei Theile, die ihre beiden Seiten bilden und von denen jeder seinen Pol enthält.

Es seien A und B die Pole. Von jedem dritten Punkte C [245 im Raume können wir behaupten, dass er entweder der Ebene selbst oder der einen oder der andern ihrer Seiten angehört.

Wenn die Kugelflächen, die mit dem Abstande AC der beiden Punkte A und C um die Mittelpunkte A und B beschrieben sind, einander nicht schneiden, so liegt C ausserhalb der Ebene auf der Seite des Poles A. Wenn die Kugelflächen, die mit dem Abstande AD irgend eines Punktes D von A um A und B beschrieben sind,

beide durch D gehen, so liegt der Punkt D auf der Ebene selbst. Wenn endlich der Abstand AE eines Punktes E im Raume als Halbmesser genommen um A und B zwei Kugelflächen beschreibt, die in einander hineintreten, so wird E auf der Seite des Poles B sein.

Der erste Fall, der des Punktes C, gehört zu einem Abstande $AC < BC$; der zweite, der des Punktes D, tritt ein, wenn $AD = BD$, der dritte mit E, wenn $AE > BE$ (§ 15). Im ersten Falle ergiebt die Kugelfläche um B mit dem Halbmesser BC nothwendig einen gemeinsamen Punkt mit der Kugelfläche um A, die den Halbmesser AC hat, folglich schneidet sie auch die Kugelfläche um A mit dem gleichen Halbmesser BC. Der zweite Fall bedarf keiner Erläuterung. In dem Falle des Punktes E schneidet die Kugelfläche um A mit dem Halbmesser BE die Kugelfläche um B mit [8 dem Halbmesser BE überhaupt nicht.

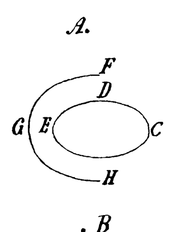


Fig. 22.

Da auf diese Weise jeder Punkt im Raume entweder der Ebene angehören oder sich auf deren einer oder anderer Seite befinden muss, so kann die Ebene selbst bis ins Unendliche fortgesetzt werden, indem sie den Raum in zwei Theile zerlegt.

§ 20.

Die Ebene deckt sich selbst, sowohl mit ihrer andern Seite als auch bei Drehung um die Pole.

Wenn die Pole A und B (Fig. 23) die Plätze wechseln, so gehen die Kugelflächen um sie von der einen Seite der Ebene auf die andre über und jede deckt eine ihr gleiche; folglich fällt die Ebene in dieser neuen Lage mit der Ebene in der frühern Lage zusammen.

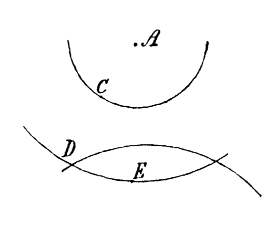


Fig. 23.

Jeder Punkt C kann in einen andern Punkt D auf dem erzeugenden Kreise übergeführt werden, solange der Mittelpunkt A seinen Ort beibehält. Mit dieser Ueberführung ist eine Versetzung der Punkte auf allen Kugelflächen um A verbunden, aber die Kugelflächen selbst fallen in ihrer früheren und ihrer neuen Lage zusammen; folglich gilt von der Ebene dasselbe.

§ 21. [9

Durch zwei Punkte im Raume kann man eine Ebene legen.

Die beiden Punkte A und B (Fig. 24), durch die eine Ebene gelegt werden soll, nehmen wir zuerst als Pole einer Ebene, in der CED einer der erzeugenden Kreise sei. Auf diesem [246 befinden sich je zwei Punkte C und D in gleichen Abständen von A und B; wenn wir daher die Punkte C und D zu Polen wählen, so wird die neue Ebene nunmehr durch die beiden gegebenen Punkte A und B gehen.

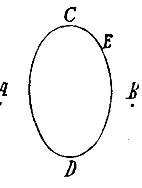


Fig. 24.

§ 22.

Als Ursprung der erzeugenden Kreise werden wir einen Punkt bezeichnen, der auf der Ebene einzig in seiner Art ist und der von allen Punkten eines jeden Kreises gleiche Abstände hat. Dieser Punkt heisst Mittelpunkt eines jedes der Kreise; die Abstände der Punkte eines Kreises vom Mittelpunkte sind die Halbmesser des Kreises.

Wenn die Pole A und A' (Fig. 25) die Plätze wechseln, während indessen der Punkt B auf dem erzeugenden Kreise $BCB'C'$ den seinen beibehält, so wird sich auf eben diesem Kreise ein andrer Punkt B' befinden, der ebenso wie B auf dem früheren Platze bleibt. Derartige Punkte, wie hier B und B', werden wir einander auf dem Kreise gegenüberliegend nennen.

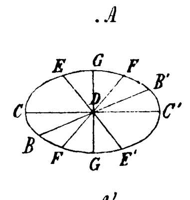
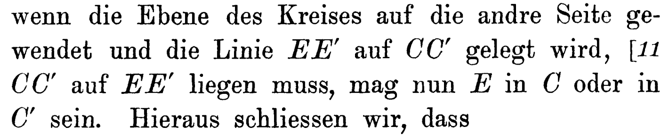


Fig. 25.

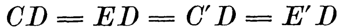
Um für B den gegenüberliegenden Punkt B' zu finden, braucht man nur von B aus nach beiden Seiten hin gleiche Bogen BC und BF anzunehmen und sodann, indem man deren Endpunkte C und F als Pole benutzt, eine Ebene zu konstruiren, die durch A und A' geht (§ 21) und daher [10 $BCB'C'$ in dem Punkte B' schneidet, weil bei Vertauschung von A und A' auch C und F die Plätze wechseln, während dagegen die Ebene und der Kreis mit sich selbst zusammenfallen und deshalb B' als gemeinsamen Punkt behalten (§ 20). Wenn nunmehr die Punkte B und B' als Pole dienen, so wird die neue Ebene, die durch A und A' geht, den Kreis $BCB'C'$ in gegenüberliegenden Punkten E und E' schneiden. Mit der Ebene des Kreises zusammen zerlegt sie den Raum in vier Theile, die einander ersetzen, wenn man sie um E und E' herum dreht, so dass, wenn A in A' sein wird, umgekehrt A' in A sein wird, während die gemeinsamen Punkte der beiden Ebenen auf ihren Plätzen bleiben. Das bedeutet, dass je zwei Theile übers Kreuz einander in einer Linie EDE' berühren (§ 4 und 7), die man einen Durchmesser des Kreises $BCB'C'$ nennt. Indem wir alle Kugelflächen um ihre Mittelpunkte A und A' drehen, ohne übrigens die

Verbindung zwischen ihnen bei ihrem Durchschnitte zu verletzen, geben wir dem Durchmesser EDE' die neue Lage CDC', so dass die früheren Punkte E, E', B, B' nunmehr in C, C', F, F' sein werden, während sich ein Punkt D finden wird, der seinen Ort nicht verändert. Nähme man nun E und E' zu Polen, so ginge die zugehörige Ebene nicht nur durch A und A', sondern auch durch B und B'. In ähnlicher Weise ginge, wenn C und C' die Pole wären, die Ebene durch A und A' und durch G und G' auf dem Kreise.

Nach dieser Bemerkung ist nicht schwer einzusehen, dass alle Bogen CE, $C'E'$, BG, $B'G'$ einander gleich sind und dass folglich,



wenn die Ebene des Kreises auf die andre Seite gewendet und die Linie EE' auf CC' gelegt wird, [11 CC' auf EE' liegen muss, mag nun E in C oder in C' sein. Hieraus schliessen wir, dass



$$CD = ED = C'D = E'D$$

ist. Da der Linie EDE' eine beliebige neue Lage CDC' gegeben worden ist, so muss D in der Mitte des Durchmessers EE' ein einziger Punkt sein, [247 von dem aus die Abstände nach allen Punkten des Kreises gleich sind.

Fig. 25.

Uebrigens können wir unschwer einsehen, dass zwei Durchmesser einander nur in einem Punkte schneiden, wenn wir zu diesem Zwecke bemerken, dass hier drei Ebenen den Raum in acht Theile zerlegen, von denen je zwei, die übers Kreuz liegen und die in Bezug auf jede der drei Ebenen auf gegenüberliegenden Seiten angenommen werden so beschaffen sind, dass einer den Platz des andern einnimmt, ohne dass sie ihre Verbindung verlieren; folglich stellen sie durch ihre Berührung einen einzigen Punkt dar (§ 5 und 7).

Der Abstand des Mittelpunktes von den Punkten des Kreises heisst **Halbmesser**; dieser beträgt daher die Hälfte des Durchmessers.

Ein Durchmesser zerlegt den Kreis in zwei kongruente Theile.

Die Kreise besitzen auf der Ebene dieselben Eigenschaften wie die Kugeln im Raume. Zum Beispiel macht Gleichheit der Halbmesser Kreise kongruent; Kreisbögen fallen [mit dem Kreise] zusammen, wenn sie den Mittelpunkt gemein haben.

§ 24. [12

Ein Kreis kann auf der Ebene nur einen Mittelpunkt haben.

Ausserhalb des Kreises oder auf diesem selbst ist es unmöglich einen Mittelpunkt zuzulassen, dessen Abstände von allen Punkten des

Kreises gleich wären; sonst könnte keine um diesen Mittelpunkt beschriebene Kugelfläche die Kugel in Theile zerlegen, die den Ursprung der Kreise auf der Ebene zum Mittelpunkte hat und deren Oberfläche die Ebene in dem gegebenen Kreise schneidet (§ 15). Wenn wir nun ausser dem Ursprunge A der Kreise einen andern Mittelpunkt B im Innern des Kreises zulassen (Fig. 26), so wird die Kugelfläche um A mit dem Halbmesser AB die Ebene in einem Kreise BC schneiden (§ 23), und der Punkt B kann dabei auf der Kugelfläche mit dem Halbmesser AB überall hin gebracht werden, ebenso wie ein Punkt D auf dem erzeugenden Kreise DE seinen Platz mit jedem andern vertauscht, der auf der Kugelfläche mit dem Halbmesser AD um den Ursprung A liegt. Demnach wären die beiden Mittelpunkte A und B zugleich zwei Mittelpunkte eben der Kugelfläche, die die Ebene in dem darauf gegegebenen Kreise schneidet, während das als unmöglich erwiesen worden ist (§ 16).

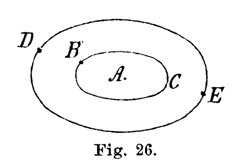


Fig. 26.

§ 25.

Gerade heisst die Linie, die zwischen zwei Punkten sich selbst in allen Lagen deckt. Diese Eigenschaft kommt dem Durchmesser des Kreises zu.

Es sei ACA' (Fig. 27) ein Durchmesser des Kreises $ABA'B'$; C sei der Mittelpunkt und folglich der Ursprung von Kreisen der Ebene, die durch C geht und auf der der Kreis [13 $ABA'B'$ liegt (§ 22 und 24). Um C denken wir uns eine Kugelfläche mit demselben Halbmesser AC, wie ihn der Kreis besitzt. Eine neue Ebene mit ihren Polen A und A' wird die Kugelfläche in einem Kreise $BDB'D'$ schneiden, so dass nunmehr beide Kreise die Punkte B und B', die auf jedem einander gegenüberliegen (§ 22), gemein haben und überdies auch den Durchmesser BCB'.

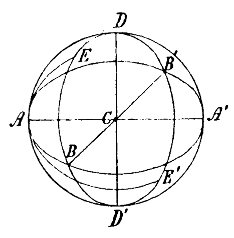


Fig. 27.

Solche Punkte wie A und A', B und B', die einander auf [248 einem grössten Kreise gegenüberliegen, heissen gegenüberliegende Pole der Kugelfläche, auf der der Kreis liegt. Daher kann jeder Punkt auf der Kugelfläche als ein Pol betrachtet werden, dem ein andrer gegenüberliegender entspricht. Die Punkte A und A' heissen auch gegenüberliegende Pole des grössten Kreises $BDB'D'$, dessen Ebene entsteht, indem gleiche Kugelflächen um A und A' einander durchschneiden, und der ausserdem mit A und A' auf derselben Kugelfläche liegt.

Die Punkte B und B' sind folglich Pole für den Kreis $ADA'D'$, der durch A und A' geht, indem er den Kreis $BDB'D'$ in den Polen D und D' des Kreises $ABA'B'$ schneidet.

Hier stellen die Ebenen der drei Kreise drei Hauptschnitte dar (§ 5), denn sie zerlegen die zu ihrer Kugelfläche gehörige Kugel in acht Theile, von denen je zwei übers Kreuz gegenüberliegende einander in dem gemeinsamen Punkte C berühren. Dreht man den Kreis [14 $ABA'B'$ um seinen Durchmesser AA', so bewegen sich die Punkte B und B' auf dem Kreise $BDB'D'$ derart, dass wenn sich AB in dem Theile ABD der Kugelfläche befindet, zum Beispiel wenn B nach E gelangt, gleichzeitig der Bogen AB' in dem andern Theile $AB'D'$ ist und der Punkt B' irgendwo in E'. In keiner dieser neuen Lagen des Kreises kann man bei den Punkten auf dem Halbmesser AC eine Abweichung zulassen, weil der Halbmesser sich selbst decken muss, sobald bei der Fortsetzung der Drehung schliesslich E und E' die Plätze wechseln, während dagegen Punkte, die nach der einen Seite abwichen, nothwendig in einen andern Theil der Kugel gelangten.

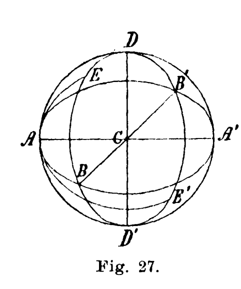


Fig. 27.

Ferner deckt die Gerade AA' auch dann in allen Lagen sich selbst, wenn ihre Enden A und A' die Plätze gewechselt haben, weil bei diesem Wechsel zuvor alle Kreise mit sich zur Deckung gebracht werden können und ebenso die Linien, in denen die Ebenen einander schneiden.

Bemerken wir noch, dass hier in dem Schnitte der drei Ebenen gerade Linien entstehen, wie AA' so auch BB' und DD', die Durchmesser sind und daher die Kreise in zwei kongruente Hälften zerlegen.

Die Gerade setzt sich zugleich mit den Ebenen, in deren Schnitte sie liegt, nach beiden Seiten ins Unendliche fort, indem sie auf diese Weise jede Ebene in zwei Theile zerlegt. Wenn sie sich innerhalb [15 eines Körpers befindet, der auf allen Seiten durch eine Fläche begränzt ist, oder innerhalb einer Ebene, die von einer geschlossenen Linie umgeben ist, so schneidet sie die äussere Fläche oder Linie mindestens in zwei Punkten, indem sie in das Innere hinein und dann wieder heraus tritt.

§ 26.

Auf einer Geraden, die zwei Pole verbindet, kann man in gleichen Abständen von dem Ursprunge der Kreise zwei Punkte als neue Pole derselben Ebene annehmen.

Wir wählen die beiden Punkte A und A' (Fig. 28) zu Polen [249

und nehmen an, dass auf der Ebene B der Ursprung ist und $CDC'D'$ einer der Kreise mit den gegenüberliegenden Punkten C und C', D und D' (§ 22), um die herum gleiche Kugelflächen je eine Ebene liefern mit der geraden Linie ABA' als Durchschnitt (§ 25). Die Gerade AA' setzt sich bei Erweiterung der Ebenen unbegränzt fort, so dass auf ihr zwei Punkte E und E' in beliebigen jedoch gleichen Abständen BE und BE' vom Ursprunge angenommen werden können, näher oder entfernter als die Punkte A und A' von B abstehen. Dreht man die eine der beiden Ebenen, zum Beispiel $ECE'C'$, um die ihnen gemeinsame Linie EE', so durchläuft der Punkt C den ganzen Kreis $CDC'D'$, die Punkte dieses Kreises befinden sich folglich alle in gleichen Abständen von E und ebenso auch von E', weil bei der Umwendung der Ebene auf die andere Seite der Pol A auf A' fällt und zugleich E auf E'. Kugelflächen [16 um E und E' mit dem Halbmesser EC müssen folglich einander in dem Kreise $CDC'D'$ schneiden. Dasselbe muss von jedem erzeugenden Kreis gesagt werden; diese entstehen somit alle, zugleich mit der Ebene, als Schnitte gleicher Kugelflächen um E und E'.

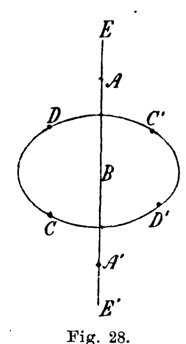


Fig. 28.

§ 27.

Gerade Linien fallen zusammen, sobald sie durch zwei Punkte gehen.

Bis jetzt war auf den Geraden noch der Punkt ausgezeichnet, der in der Ebene als Ursprung der Kreise dient. Wir werden beweisen, dass diese Auszeichnung jetzt nicht mehr nöthig ist.

Um einen beliebigen Punkt C (Fig. 29) auf einer Geraden denken wir uns eine Kugelfläche mit irgend einem willkürlichen Halbmesser CB. Die Gerade, die sich von dem Mittelpunkte C aus nach beiden Seiten fortsetzt, muss die Kugelfläche wenigstens in zwei Punkten B und B' schneiden (§ 25); indem wir diese zu Polen nehmen, konstruiren wir eine Ebene und als Durchschnitt mit dieser auf der Kugelfläche den Kreis $DED'E'$, auf dem D und D', E und E' gegenüberliegende Punkte seien. Endlich werden die beiden Ebenen, denen D und D', E und E' als Pole dienen, als Durchschnitt eine Gerade liefern, die ebenso wie die frühere durch die drei Punkte B, C, B' gezogen ist.

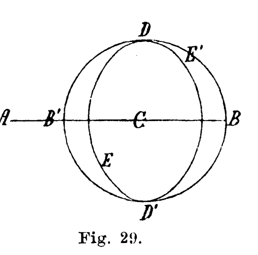


Fig. 29.

Nunmehr sei auf der Kugelfläche $BDB'D'$ ein grösster Kreis

dessen Durchmesser die eben gezogene Gerade sein wird. Wollten wir alsdann annehmen, dass zwischen B und C oder überhaupt zwischen irgend welchen Punkten auf dem Halbmesser BC, ein Theil der ersten Geraden von diesem [17 abwiche, indem er aus der Ebene des Kreises oder auf dieser Ebene nach der einen Seite heraustrāte, so würde ein solcher Theil der ersten Geraden in dem einen wie in dem andern Falle bei der Umwendung des Kreises $BDB'D'$ um seinen Durchmesser BB' von der einen Seite der Ebene auf die andre übergehen, oder von der einen Seite des Durchmessers BB' auf die gegenüberliegende, während doch diese Gerade in allen ihren Theilen sich selbst decken muss (§ 25).

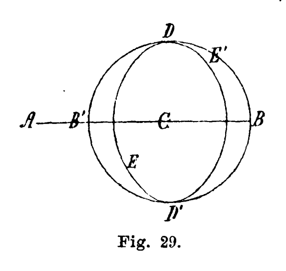


Fig. 29.

Wenn durch die beiden Punkte A und B (Fig. 30) eine Gerade geht, so können wir, nachdem wir sie nach der einen Seite, zum Beispiel über den Punkt B hinaus, verlängert haben, die Verlängerung [250 $BA' = BA$ machen, sodann die Endpunkte A und A' zu Polen einer Ebene nehmen, auf der folglich B der Ursprung der Kreise sein wird. Die Gerade AA', sowie überhaupt alle andern, zwischen den Punkten A und B gezogenen, müssen demnach dieselben sein wie die, die als Schnitte solcher Ebenen entstehen, deren Pole in gegenüberliegenden Punkten eines erzeugenden Kreises der ersten Ebene gelegen sind. Aber alle diese Geraden fallen zusammen, wie wir schon vorhin gesehen haben.

A B A'

Fig. 30.

Demnach fallen zwei gerade Linien entweder zusammen oder sie schneiden einander nur in einem Punkte.

Die Geraden dienen zur Messung der Abstände und überhaupt aller andern Linien, wie wir später sehen werden.

Die Gerade kann ins Unendliche verlängert werden, indem man sie mit einem Theile auf sich selbst legt, während [18 man sie mit dem übrigen weiter rückt.

§ 28.

Jeder Punkt ausserhalb einer Ebene kann als Pol angenommen werden, und es entspricht ihm auf der gegenüberliegenden Seite ein andrer.

Es seien A und A' (Fig. 31) Pole, B der Ursprung der Kreise auf der zugehörigen Ebene, $CDC'[D']$ einer der Kreise darauf, also der Durchschnitt gleicher Kugelflächen um A und A'. Wir nehmen irgendwo ausserhalb der Ebene einen Punkt E an: jede Kugelfläche

um diesen herum muss den Kreis $DCD'C'$ in zwei Punkten C und C' schneiden, sobald sie in das Innere des Kreises hineintritt. Versetzt man jeden der Pole A und A' an die Stelle des andern und zwar so, dass der Punkt C auf C' fällt, folglich auch umgekehrt C' auf C, so wird der Punkt E irgendwo in E' sein, woraus die einander gleichen Abstände: $EC = EC' = E'C = E'C'$ hervorgehen, während der Durchmesser DBD' des Kreises seinen Ort nicht verändert. Denken wir uns nunmehr um B eine Kugelfläche mit dem Halbmesser $BD = BD'$, auf der der Einfachheit halber A und A' die Pole des Kreises $DCD'C'$ sein mögen (§ 26), so müssen, wenn diese Kugelfläche zusammen mit den Kugelflächen um E und E' um den Durchmesser DBD' gedreht wird, die Punkte, die die erste mit den letzteren gemein hat, auf den Schnittlinien hinlaufen, von denen immer die eine die andre ersetzt. Nach einer halben Wendung der Kugelflächen wird jeder Punkt F der einen Kreishälfte $DCFD'$ einen entsprechenden Ort F' auf der andern Kreishälfte $DC'F'D'$ einnehmen, ähnlich wie die früheren Punkte C und C', [19 mit Ausnahme der äussersten Punkte D und D' auf dem Durchmesser, die ihre Oerter nicht verändern. Hieraus muss man schliessen, dass alle Punkte C, F, C', F' des Kreises und ebenso auch die Endpunkte D und D' seines Durchmessers, den Durchschnitten gleicher Kugelflächen um die Punkte E und E' angehören, die folglich als Pole der alten Ebene des Kreises $DCD'C'$ angesehen werden können.

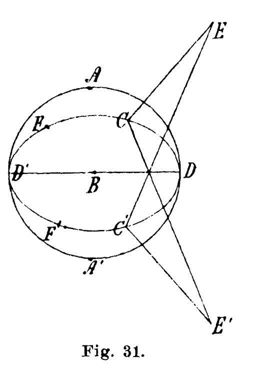


Fig. 31.

§ 29. [251

Auf einer Ebene kann man jeden Punkt zum Ursprunge von Kreisen nehmen.

Einen willkürlich angenommenen Punkt A (Fig. 32) auf der Ebene verbinden wir mit dem Ursprunge B ihrer Kreise durch die Gerade AB. Mit dem ebenfalls willkürlichen Halbmesser $AC = AC'$ denken wir uns um A eine Kugelfläche L, die die Gerade BAC in den Punkten C und C' treffen möge. Gleiche Kugelflächen um C und C' erzeugen, indem sie einander schneiden, eine Ebene, die die erste Kugelfläche, deren Mittelpunkt A war, in einem Kreise $DED'E'$ theilt, wobei die mit der gegebenen Ebene gemeinsamen Punkte E und E' auf dem

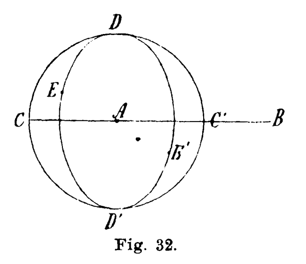


Fig. 32.

Kreise einander gegenüberliegen werden, weil eine halbe Wendung der Kugelfläche um die Linie BC bewirkt, dass E und E' die Plätze wechseln. Von den Punkten E und E' aus werden Kugelflächen mit gleichen Halbmessern noch eine Ebene erzeugen, die die Kugelfläche L in dem Kreise $DCD'C'$ schneiden wird, den Kreis $DED'E'$ aber in den gegenüberliegenden Punkten D und D', wovon wir uns überzeugen können, indem wir die Kugelfläche L solange drehen, bis die gegebene Ebene sich selbst auf der andern Seite deckt. Demnach werden D und D' [20 Pole der gegebenen Ebene sein (§ 28), während die Ebenen der Kreise $DCD'C'$ und $DED'E'$ einander in der Geraden DAD' schneiden, die von D nach D' durch den Punkt A gezogen ist; dieser muss folglich auf der gegebenen Ebene der Ursprung von Kreisen sein.

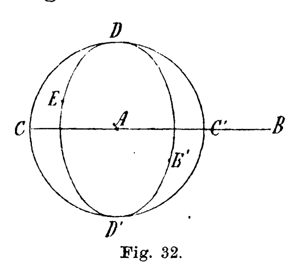


Fig. 32.

§ 30.

Der Schnitt einer Kugelfläche mit einer Ebene ergiebt einen Kreis.

Wenn die Ebene durch den Mittelpunkt der Kugelfläche geht, so kann man diesen Mittelpunkt zum Ursprung erzeugender Kreise auf der Ebene nehmen (§ 29), und folglich wird der Schnitt der Kugelfläche und der Ebene einer von diesen Kreisen sein (§ 23).

Wenn die Ebene nicht durch den Mittelpunkt der Kugelfläche geht, so können wir diesen Mittelpunkt als einen Pol der Ebene selbst ansehen, indem wir uns gleichzeitig den andern auf der gegenüberliegenden Seite vorstellen (§ 28). Dann wird der Schnitt der gegebenen Kugelfläche und einer gleichen um den andern Pol eine Linie sein, die sowohl den beiden Kugelflächen als auch jeder der beiden Kugelflächen und der Ebene gemeinsam ist, folglich wird er ein Kreis sein (§ 18).

Den Durchmesser dieses Kreises finden wir, wenn wir (Fig. 33) auf einer Ebene, die durch die Pole C und D der gegebenen Ebene gelegt ist, die beiden Punkte A und B des Kreises aufsuchen und diese durch die Gerade AB verbinden (§ 25). [21 Der Durchmesser AB sowohl als der Kreis selbst werden daher dieselben bleiben, wenn wir zum Mittelpunkte der Kugelfläche an Stelle von C irgend einen Punkt E auf der Linie CD oder auf der Verlängerung dieser Geraden nehmen und wenn als Halbmesser

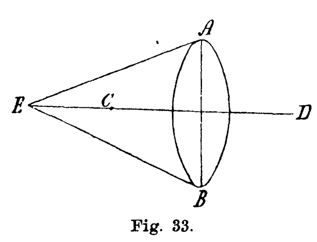


Fig. 33.

der Kugelfläche der Abstand $AE = BE$ des Punktes E von den Endpunkten A und B der Linie AB benutzt wird.

§ 31.

Wenn zwei Ebenen einander schneiden, so entsteht eine gerade Linie.

Wenn die Ebenen AB und CD (Fig. 34) einander schneiden und es wird um irgend einen gemeinsamen Punkt E beider Ebenen mit einem beliebigen Halbmesser $EF = EF'$ eine Kugelfläche beschrieben, so schneidet diese auf jeder Ebene einen Kreis aus, dessen Mittelpunkt E ist (§ 30). Der Schnitt dieser [252 beiden Kreise muss eine gerade Linie liefern (§ 25). Indem wir den Halbmesser EF vergrössern, können wir diesen Schluss auf alle Schnittpunkte der beiden Ebenen ausdehnen.

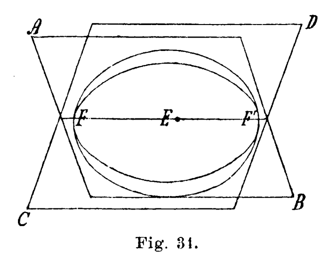


Fig. 34.

§ 32.

Eine Gerade liegt ganz in einer Ebene, sobald sie durch zwei Punkte auf dieser hindurchgeht.

Beschreiben wir um die beiden Punkte A und B auf der Ebene CD (Fig. 35) gleiche Kugelflächen, so schneiden diese einander in einem Kreise, der in zwei auf ihm gegenüberliegenden Punkten E und E' durch die gegebene Ebene geht (§ 25). Die Ebene, die E und E' zu Polen hat, muss in sich nicht [22 nur die Endpunkte A und B der Geraden AB enthalten, sondern sogar die Ebene CD in dieser selben Linie schneiden, weil es zwischen zwei Punkten A und B nicht zwei verschiedene Gerade geben kann (§ 27).

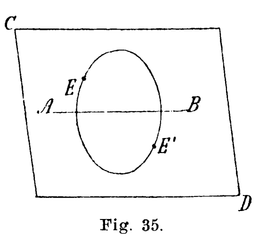


Fig. 35.

Jedesmal daher, wenn eine Gerade durch den Mittelpunkt geht, halbirt sie den Kreis.

§ 33.

Durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte kann man eine Ebene legen und zwar nur eine.

Von den drei Punkten verbinden wir den einen, zum Beispiel A (Fig. 36) mit den beiden andern B und C durch die geraden Linien AB und AC, die wir nach Belieben verlängern können. Sind die Linien AB und AC nicht gleich, und ist, wie wir annehmen wollen,

$AB < AC$, so machen wir $AD = AB$. Zu den Punkten B und D als Polen konstruiren wir eine Ebene, die durch A geht, weil $AB = AD$ ist. Die Gerade BD schneidet diese Ebene in dem Ursprunge Q der Kreise, und wenn wir um Q eine Kugelfläche mit dem Halbmesser $BQ = QD$ beschreiben, so geht diese durch B und D und schneidet die Ebene in einem Kreise $EFE'F'$ (§ 30), wo E und E' gegenüberliegende Punkte auf der Geraden sein mögen, die von A aus durch den Ursprung Q gezogen ist.

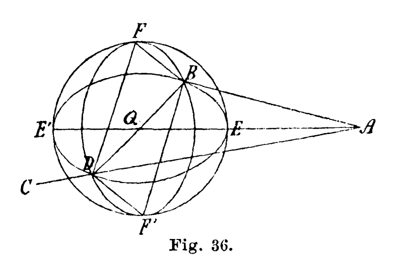


Fig. 36.

Nehmen wir nunmehr E und E' zu Polen, so geht die zugehörige Ebene durch Q und schneidet den Kreis $FEF'E'$ in gegenüberliegenden Punkten F und F' (§ 25). Diese letzteren Punkte werden endlich Pole der Ebene sein, auf der überhaupt alle drei Punkte A, B, C [23 liegen, weil $BF = FD = F'B = F'D$ ist, und der Punkt C auf der Verlängerung von AD liegt.

Eine andre Ebene lässt sich durch A, B, C nicht legen, weil man in diesem Falle die beiden Geraden BD und DA als eine einzige in dem Schnitte der beiden Ebenen betrachten (§ 31) und folglich D und C auf der Verlängerung von AB voraussetzen müsste.

Wir schliessen hieraus noch, dass zwei Gerade, die von einem Punkte ausgehen und nicht eine einzige Gerade bilden, in einer bestimmten Ebene liegen müssen.

Noch können wir bemerken, dass zwei Ebenen zusammenfallen, wenn sie mit drei Punkten, die nicht in gerader Linie sind, auf einander liegen.

Daher setzen wir die Ebene, ähnlich wie die gerade Linie [253 (§ 27), bis ins Unendliche fort, indem wir sie mit einem Theile auf sich selbst legen, so dass das Uebrige hervorragt.

§ 34.

Zwei Kugelflächen treffen einander entweder überhaupt nicht, oder sie berühren einander in einem einzigen Punkte oder sie schneiden einander in einem Kreise, jenachdem die Summe ihrer Halbmesser kleiner ist als der Abstand zwischen den Mittelpunkten oder diesem gleich oder grösser. Im letzten Falle ist noch erforderlich, dass der Unterschied der [24 Halbmesser kleiner sei als der Abstand der Mittelpunkte.

Bei zwei Kugelflächen um die Mittelpunkte A und B (Fig. 37) seien die Halbmesser AC und BC so beschaffen, dass sie zusammen

den Abstand AB der Mittelpunkte von einander ausmachen. Wir denken uns durch den Punkt C auf der Geraden AB eine Ebene DE, deren Pole von C gleich weit abstehen. Um den Punkt C und um jeden andern gemeinsamen Punkt der beiden Kugelflächen, wenn ein andrer vorhanden sein sollte, müssen wir eine Drehung sowohl der einen als der andern Kugelfläche um ihre von dem Berührungspunkte C aus gezogenen Durchmesser CF und CG als möglich zulassen. Die beschriebene Bewegung der Kugelflächen muss möglich sein, wenn man sich diese mit der Ebene DE verbunden denkt, sowohl für jede einzeln, als für beide Kugeln in Verbindung mit der Ebene (§ 25). Aber da zwischen den beiden Punkten G, F keine verschiedenen Geraden gezogen werden können (§ 27), so berühren die beiden Kugelflächen einander nothwendig nur in dem einen Punkte C.

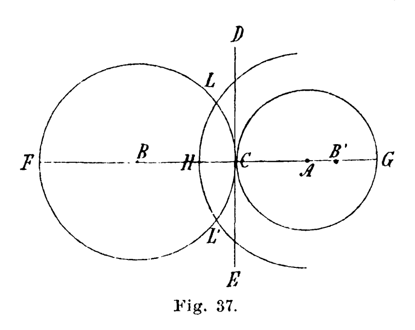


Fig. 37.

Wenn wir die Mittelpunkte A und B an ihren Plätzen lassen und den einen Halbmesser, zum Beispiel AC, verkleinern, so ist die neue Kugelfläche im Innern der früheren enthalten und berührt folglich weder die Ebene DE noch die Kugelfläche jenseits dieser Ebene. Das bedeutet, dass zwei Kugelflächen einander niemals treffen, wenn die Summe der Halbmesser kleiner ist als der Abstand der Mittelpunkte.

Vergrössern wir AC, zum Beispiel bis zum Punkte H, aber [25 ohne bis zum Punkte F zu gelangen, so bewirken wir, dass die beiden Kugelflächen einander schneiden, indem jede nur mit einem Theile in das Innere der andern tritt. Nunmehr ergiebt jede durch die Mittelpunkte A und B gelegte Ebene zwei beiden Kugelflächen gemeinsame Punkte L und L'; indem wir diese als Pole benutzen, erzeugen wir eine Ebene, auf der die Punkte A und B liegen und folglich auch die ganze Gerade AB (§ 32). Demnach schneidet in dieser Ebene der erzeugende Kreis, dem der Punkt B angehört, die Linie GF irgendwo in einem Punkte B', so dass $BL = BL' = B'L = B'L'$ ist. Somit enthält die Ebene mit den Polen B und B' die Punkte L und L' in sich, und ergiebt folglich denselben Kreis als Schnitt sowohl mit der Kugelfläche vom Halbmesser AH um A als mit der Kugelfläche vom Halbmesser BC um B.

Es ist leicht zu sehen, dass die Kugelflächen fortwährend [254 einander in Kreisen schneiden, solange der Unterschied der Halbmesser kleiner ist als der Abstand der Mittelpunkte unter einander.

Wird dagegen dieser Unterschied null, so berühren die Kugelflächen einander nur in einem Punkte; bei weiterem Anwachsen des Unterschiedes wird endlich die kleinere Kugelfläche von der grösseren eingeschlossen und beide treffen nirgends mehr zusammen. In der That, wenn A und B die Mittelpunkte der Kugelflächen sind (Fig. 38), AF der eine und BF der andre Halbmesser, so muss die Berührung in dem Punkte F stattfinden, wo sie auch mit der Ebene stattfinden wird, die mit den gegenüberliegenden Polen B und B' in den Abständen $BF = B'F$ von dem Endpunkte F und [26 auf der Verlängerung der Linie BF über F hinaus konstruirt ist (§ 27). Bei weiterem Anwachsen des Halbmessers AF werden nunmehr zu der Kugel, die in der früheren Kugelfläche enthalten ist, solche Theile hinzukommen, die einander nicht über einen hinaus berühren und die infolgedessen zugleich die Verbindung zwischen den Kugelflächen um die Mittelpunkte A und B abbrechen.

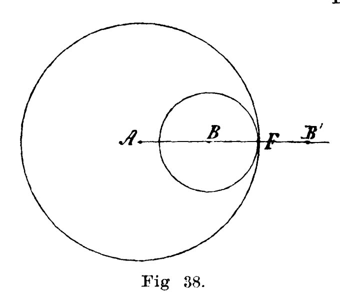


Fig 38.

§ 35.

Alles bis jetzt über Kugelflächen und Ebenen Gesagte ist auf Kreise und gerade Linien anwendbar, weil eine durch die Mittelpunkte gelegte Ebene die Kugelflächen in Kreisen schneidet, die Ebenen in geraden Linien und die Kreise in Punkten. Daher kann man sich die gerade Linie als den Schnitt gleicher Kreise um zwei Punkte vorstellen — die Pole der geraden Linie. Jeder Punkt auf der Ebene kann zum Pole genommen werden und ihm entspricht auf der andern Seite der geraden Linie der gegenüberliegende.

Zwei Kreise auf einer Ebene treffen entweder überhaupt nicht zusammen, oder sie berühren einander in einem einzigen, oder sie schneiden einander in zwei Punkten, je nachdem die Summe der Halbmesser kleiner ist als der Abstand zwischen den Mittelpunkten oder diesem gleich oder grösser. Im letzten Falle wird überdies vorausgesetzt, dass der Unterschied der Halbmesser kleiner ist als der Abstand der Mittelpunkte.

§ 36.

Eine ebene Fläche, die von einer geschlossenen Linie begränzt ist, heisst allgemein eine Figur, und die begränzende Linie heisst der [27 Umfang.

Unter einem Kreise versteht man bald die ebene Fläche, bald die Linie, wie es hier bis jetzt geschehen ist. Um die eine Benennung nicht mit der andern zu verwechseln, sagt man oft Kreisumfang zum Unterschiede von der Kreisfläche.

Eine Figur, deren Umfang aus lauter Geraden besteht, heisst ein geradliniges Vieleck, und die geraden Linien heissen Kanten oder Seiten. Nach der Zahl ihrer Seiten sind die Vielecke: Dreiecke, Vierecke und so weiter.

Eine Figur heisst Kreisabschnitt, wenn sie von einem Kreisbogen und von einer geraden Linie, der Chorde oder Sehne, begränzt wird; Kreisausschnitt heisst sie, wenn von zwei Halbmessern und einem Bogen.

Die Bogen grösster Kreise auf einer Kugelfläche bilden ein [255 sphärisches Vieleck, wenn sie einen Theil der Kugelfläche begränzen. Nach der Zahl dieser Bogen, der Kanten oder Seiten, sind die Vielecke: Dreiecke, Vierecke und so fort, wie bei den geradlinigen. Ein sphärisches Vieleck mit nur zwei Seiten nennt man: Ausschnitt der Kugelfläche, während man unter einem Abschnitte einen solchen Theil auf dieser versteht, der durch einen Kreis begränzt ist.

Den von einer Ebene abgeschnittenen Theil einer Kugel nennt [28 man Kugelabschnitt; dieser wird daher durch einen Abschnitt der Kugelfläche und durch eine Kreisfläche begränzt.

Die Punkte, in denen die Seiten von Vielecken, geradlinigen oder sphärischen, zusammentreffen, werden wir Ecken nennen.

Noch müssen die Benennungen: gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke erwähnt werden, jenachdem zwei oder alle drei Seiten gleich sind. Die gleichen Seiten heissen Schenkel, die dritte Seite Grundlinie, die Ecke dieser gegenüber Spitze.

Bezeichnet wird ein Dreieck durch die Buchstaben an seinen Ecken und durch das Zeichen $\triangle$ vor diesen.

Kapitel III.

[256
29

Die Messung der geraden Linien, der geradlinigen Winkel und der Ebenenwinkel.

§ 37.

Indem wir von der Grösse gerader Linien zu reden anfangen, wollen wir zuvor daran erinnern (§ 2), dass das Messen in der Geometrie darauf hinauskommt, die gemessene Grösse durch ein Mass und durch Theile dieses Masses auszufüllen. Sollte es unmöglich sein, streng zu messen, so ist erforderlich, dass die Theile des Masses beliebig verkleinert werden können; ferner ist es erlaubt, den von der ausgemessenen Grösse übrig bleibenden Rest für kleiner zu erachten als den Theil, innerhalb dessen er ganz enthalten ist, und ihn deshalb zu vernachlässigen. Ohne diese Annahme wäre es in der Geometrie unmöglich, zu messen und auf diese Weise die Grösse des Ganzen zu finden.

§ 38.

Die Grösse der geraden Linien wird durch Vergleichung mit einer unter ihnen bestimmt, die als Einheit oder Mass angenommen ist. Sie wird durch einen Bruch dargestellt, dessen Nenner angiebt, was für Theile, und der Zähler, wieviel solcher Theile in der Einheit genommen werden. Den Bruch nennt man hier auch das Verhältniss der beiden Linien, der Gemessenen zum Masse.

Wenn man annimmt, dass die Grösse der Linie a im Vergleich mit einer andern b durch das Verhältniss zweier ganzer Zahlen n und m ausgedrückt wird, so muss man, sobald man a m-mal genommen hat, n-mal b finden. Hieraus ist ersichtlich, worauf die Aufsuchung der Zahlen n, m gegründet werden kann. Man muss nämlich die [30 Linie a so oft wiederholen, bis die andre b in die entstandene Gerade mehrmals hineingeht ohne Rest. Die Zahlen, die angeben, wie oft die eine und die andre Linie wiederholt worden ist, werden m und n sein.

Es kann jedoch vorkommen, dass, wie viele Male auch a vervielfacht werden möge, kein Vielfaches der Linie b herauskommt; man darf sogar mit Recht annehmen, dass es in einzelnen Fällen überhaupt immer so bleiben muss. Andrerseits wäre es ebenso unmöglich wie nutzlos, solche Theile einer Linie zu zählen, die für unsre Sinne verschwinden. Demnach muss man bei der Auswahl der Einheit auch noch festsetzen, was für Theile der Einheit man wegen ihrer [257

Kleinheit vernachlässigen darf. Es möge zum Beispiel b zum Masse genommen werden, wobei Theile, die kleiner sind als der m-te, weggeworfen werden können. Dann brauchen wir nur eine Linie zu nehmen, die m-mal so gross ist wie a und auf diese b so oft zu legen, bis nach n Wiederholungen der letzten ein Rest kleiner als b herauskommt, bei dessen Vernachlässigung wir $n:m$ als das Verhältniss der beiden Linien, a zu b erhalten.

Uebrigens ist es der Willkür überlassen, welchen Theil der Linie man vernachlässigen soll, folglich kann die Genauigkeit der Messung und ebenso auch die Genauigkeit der Rechnung bis zu irgend einem beliebigen Grade getrieben werden, wenigstens innerhalb der Gränzen, die uns die Mangelhaftigkeit unsrer Sinne auferlegt und die durch [31 beständige Vervollkommnung ihrer Hülfsmittel zu erweitern der Geschicklichkeit freisteht.

Die Zusammensetzung von Linien durch Wiederholung einer kann zuweilen bei der Ausführung Unbequemlichkeiten darbieten. In diesem Falle braucht man nur die kleinere Linie auf die grössere zu legen, dann den Rest auf die kleinere, den neuen Rest auf den früheren und so fort, bis überhaupt kein Rest mehr vorhanden ist, oder ein ausserordentlich kleiner, der vernachlässigt werden darf. Nimmt man jetzt an, dass das Verhältniss der kleineren Linie zu der grösseren ein Bruch mit dem Zähler n und dem Nenner $m > n$ ist, beide ganze Zahlen, so muss man für die Wiederholungen jeder Linie auf der folgenden der Reihe nach dieselben Zahlen finden, die bei den Quotienten herauskommen, wenn man mit n in m dividirt, und sodann jedesmal mit dem Reste in den früheren Divisor. Bezeichnen wir daher die Zahlen der Wiederholungen, von denen wir sprechen, der Reihe nach mit $p, p', p'', \ldots$, so erhalten wir:

$$\frac{n}{m} = \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p' + \cfrac{1}{p'' + \cdots}}}$$

als Verhältniss der kleineren Linie zur grösseren.

Wenn nunmehr Z und Z' die Nenner der beiden letzten Näherungsbrüche für $n:m$ sind, so wird sich der Werth des ganzen Kettenbruchs von dem Verhältnisse $n:m$ um weniger unterscheiden als der Bruch: [32

$$\frac{1}{ZZ'}$$

beträgt.

Wenn nun auch dieser Unterschied selbst nicht null werden sollte dadurch, dass die Messung ohne Rest aufgeht, so können wir ihn doch

auf diese Weise um so kleiner machen, je weiter wir den Kettenbruch fortsetzen, wobei immer der neue Nenner bei jeder neuen Messung mit Hülfe des Restes zunimmt.

Bemerken wir jedoch, dass die Schärfe einer Messung in [258 deren Genauigkeit und Richtigkeit besteht. Je weiter die Messung fortgesetzt wird, um so genauer wird sie, je öfter andrerseits die unvermeidlichen Fehler wiederholt werden, um so geringer fällt ihre Genauigkeit aus. Nach diesen beiden Rücksichten muss man jedes Verfahren beurteilen, das zur wirklichen Messung dient. Der Vorzug eines jeden Verfahrens wird folglich davon abhängen, bis zu welchem Grade es die Mängel der Sinne wettmacht und wie oft dabei die Fehler wiederholt werden. Welches Messungsverfahren aber auch erdacht werden möge, immer ist eine Gränze vorhanden, über die hinaus die Schärfe nicht getrieben werden kann. In der Theorie nimmt man diese Gränze als nothwendig an, aber zugleich als unbestimmt und sogar willkürlich, und deshalb betrachtet man, in Uebereinstimmung mit den wirklichen Messungen, jede geometrische Grösse als ein [33 Verhältniss zweier ganzer Zahlen, aber nicht eher, als wenn bereits ein Verfahren zum Messen bekannt ist.

§ 39.

Kreisbögen fallen mit ihrem Kreise zusammen (§ 22), Ausschnitte einer Kugelfläche mit der ganzen Kugelfläche (§ 14). Diese Eigenschaft der Kreisbögen in Beziehung zu ihren Kreisen und der Theile einer Kugelfläche in Beziehung zu ganzen Kugelflächen, ist genau dieselbe wie die der geraden Linien in Beziehung zu einander und führt daher zu genau demselben Messverfahren.

Jeder Bogen auf einem Kreise und ebenso auch jeder Theil auf einer Kugelfläche kann als Einheit genommen werden. Um diese Wahl willkürlich zu lassen, werden wir bei der Ausmessung von Kreisbögen die Hälfte des Kreises und ebenso bei der Ausmessung von Theilen einer Kugelfläche die Hälfte dieser Kugelfläche mit π bezeichnen. Die Zahl π nimmt man zuweilen gleich 200 an, häufiger jedoch gleich 180, jenachdem man der neuen dekadischen Theilung oder der alten Sechzigtheilung folgt. In beiden Fällen nennt man die Einheit der Bogen auf dem Kreise oder der Ausschnitte auf der Kugelfläche einen Grad, und diesen theilt man nach der alten Weise in 60 Minuten ein und die Minute in 60 Sekunden, nach der neuen Weise aber in 100 Minuten und die Minute in 100 Sekunden. Bei der neuen Eintheilung werden folglich die Bogen durch Decimalbrüche dargestellt. Jedoch ist dieser Vortheil, der eigentlich nur die Rechnung angeht,

nicht so gross, dass man um seinetwillen die Bequemlichkeit der alten Eintheilung opfern müsste. Zuweilen versteht man unter π eine Zahl, die man nur näherungsweise finden kann, und die sich sehr wenig [34 von dem Bruche 355 : 113 unterscheidet.

Die Grösse eines Kreisbogens oder eines Theiles einer Kugelfläche, ausgedrückt in Graden und in Theilen eines Grades, und zwar im Allgemeinen im Vergleiche mit demselben Kreise oder mit derselben Kugelfläche, heisst ein Winkel, und zwar ein Rechter, wenn er gleich $\frac{1}{2}\pi$ ist, ein spitzer, wenn er $< \frac{1}{2}\pi$, ein stumpfer, wenn er $> \frac{1}{2}\pi$ und $< \pi$ ist.

Die Winkel heissen geradlinig, wenn sie die Grösse von Bogen auf einem Kreise, Ebenenwinkel, wenn sie die Grösse eines Ausschnittes auf einer Kugelfläche bestimmen; Theile andrer Art auf einer Kugelfläche ergeben körperliche Winkel. Bei geradlinigen [259 Winkeln heissen die Geraden, die von dem Mittelpunkte aus nach den Endpunkten des Bogens gezogen sind, die Schenkel des Winkels, und bei den Ebenenwinkeln und den körperlichen Winkeln nennt man so die Ebenen, die von dem Mittelpunkte ausgehen und den betreffenden Theil der Kugelfläche ausschneiden.

§ 40.

Ein geradliniger Winkel ist nicht von der Grösse des Kreishalbmessers abhängig, sondern dient nur zur Bestimmung der gegenseitigen Lage zweier Geraden.

Die gegenseitige Lage zweier gerader Linien, die einander treffen, nennt man deren Neigung.

Die Geraden AB und AC mögen von demselben Punkte A ausgehen (Fig. 39); indem wir diesen zum Mittelpunkte wählen, beschreiben wir Kreise mit den Halbmessern: $AB = AC$, $AB' = AC'$, $AB'' = AC''$. Die Grösse des Bogens $B'C'$ auf dem Kreise $B'C'D'$, von dem er einen Theil bildet, ist [35 der geradlinige Winkel zwischen den Geraden AB und AC oder deren Neigung gegen einander, und ebenso auch die von AC gegen AB. Wir finden diesen Winkel, indem wir den Bogen $B'C'$ solange auf den Kreis $B'C'D'$ legen, bis sein vorderer Endpunkt mit dem andern zusammenfällt. So erkennen wir, wie viele Male der Bogen wiederholt werden muss, um einen oder einige

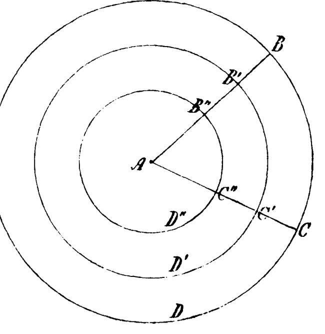


Fig. 39.

vollständige Kreise zu bilden, und folglich werden wir dann zugleich die Grösse des Bogens in Beziehung zu seinem Kreise kennen (§ 38).

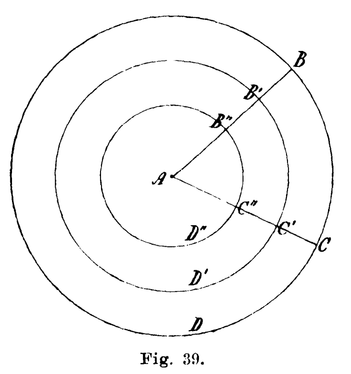


Fig. 39.

Sobald das eine Ende C' des Bogens mit dem andern B' zusammenfällt, fallen die beiden Schenkel AB und AC zusammen, da sie durch die beiden Punkte A und B' gehen (§ 27), mithin wird die Grösse des Bogens $B'C'$ genau so ausfallen, wie die jedes andern Bogen BC, $B''C''$ auf seinem Kreise, mag man nun den früheren Halbmesser AC' durch einen grösseren AC oder durch einen kleineren AC'' ersetzen. Eine möglichst weit getriebene Vergrösserung des Halbmessers gewährt hier selbstverständlich grössere Genauigkeit, da sie das Mass der Bogen grösser macht.

Sollte die Messung nicht genau sein können, so muss man bis zu einem Reste gehen, der seiner Kleinheit wegen vernachlässigt werden darf und der auf den andern Kreisen im Vergleich mit den Bogen ebenso klein sein wird.

Spitze oder Scheitel eines Winkels heisst der Punkt, von dem die Schenkel ausgehen. Geradlinige Winkel bezeichnet man, indem man vor die Buchstaben, die die Schenkel angeben, das Zeichen $\angle$ setzt.

Eine Gerade, die durch den Mittelpunkt geht, zerlegt den Kreis in zwei gleiche Theile (§ 25), folglich bilden zwei Gerade, die sich zu [36 einer vereinigen, den Winkel π.

Die gegenseitige Lage zweier Linien ist senkrecht, wenn ihr Winkel ein Rechter, schief, wenn der Winkel spitz oder stumpf ist. Senkrechte Linien nennt man auch Lothe. Eine Gerade, die mit einer andern zusammentrifft, bildet nach beiden Seiten hin Winkel, die wir Nebenwinkel nennen werden und die folglich zusammen π ausmachen. Sind die Nebenwinkel gleich, so ist jeder gleich $\frac{1}{2}\pi$, und die Linien sind auf einander senkrecht.

In geradlinigen Vielecken heissen die nach dem Innern der Figur gewandten Winkel zwischen den Seiten die Winkel des Vielecks. Ihre Zahl ist dieselbe wie die der Seiten.

Ein Dreieck heisst rechtwinklig, wenn einer seiner Winkel [260 ein Rechter ist. Hier ist die Seite gegenüber dem rechten Winkel die Hypotenuse, die beiden andern, die auf einander senkrecht stehen, sind die Katheten.

§ 41.

Verlängert man die beiden Schenkel eines Winkels über die Spitze hinaus, so entsteht ein Winkel, der dem ersten gleich ist und dessen Scheitelwinkel genannt wird.

Wenn nämlich die Geraden AC und BC (Fig. 40) den Winkel a bilden, ihre Verlängerungen CD und CE den Winkel b, so ist der Nebenwinkel c von a Nebenwinkel von b, folglich ist: [37
$a + c = \pi$, $b + c = \pi$ (§ 40) und demnach: $a = b$.

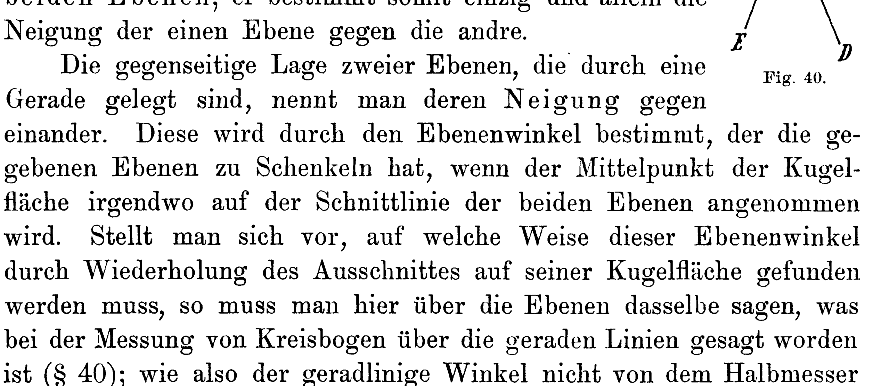


Fig. 40.

§ 42.

Ein Ebenenwinkel ist weder von dem Halbmesser der Kugelfläche abhängig, noch von dem Orte des Mittelpunktes auf der Schnittlinie der beiden Ebenen; er bestimmt somit einzig und allein die Neigung der einen Ebene gegen die andre.

Die gegenseitige Lage zweier Ebenen, die durch eine Gerade gelegt sind, nennt man deren Neigung gegen einander. Diese wird durch den Ebenenwinkel bestimmt, der die gegebenen Ebenen zu Schenkeln hat, wenn der Mittelpunkt der Kugelfläche irgendwo auf der Schnittlinie der beiden Ebenen angenommen wird. Stellt man sich vor, auf welche Weise dieser Ebenenwinkel durch Wiederholung des Ausschnittes auf seiner Kugelfläche gefunden werden muss, so muss man hier über die Ebenen dasselbe sagen, was bei der Messung von Kreisbogen über die geraden Linien gesagt worden ist (§ 40); wie also der geradlinige Winkel nicht von dem Halbmesser des Kreises abhängt, so auch der Ebenenwinkel nicht von dem Halbmesser der Kugelfläche.

Es seien nunmehr auf der Schnittlinie AB (Fig. 41) der beiden Ebenen AC und BD irgendwo in den Punkten E und F Kugelmittelpunkte angenommen, um die mit den Halbmessern $AE = BF$ Kugelflächen derart beschrieben seien, dass sie einander in einem Kreise schneiden (§ 34). Der zwischen den Ebenen AC und BD liegende Bogen GH dieses Kreises muss sich selbst decken, [38 wenn die Mittelpunkte F und E die Plätze wechseln (§ 20). Dann

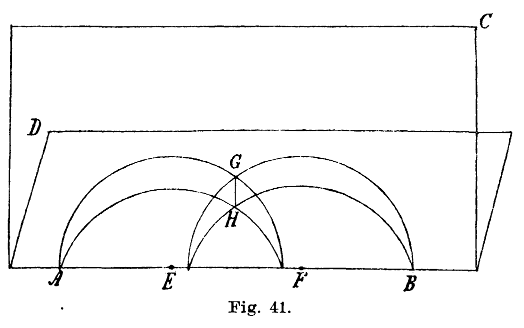


Fig. 41.

decken aber auch die Ebenen einander, weil sie durch dieselben drei Punkte A, H, B und A, G, B gehen (§ 33), folglich sind die beiden sphärischen Ausschnitte zwischen den Ebenen gleich.

Für die Ebenenwinkel werden wir vor den Buchstaben dasselbe Zeichen gebrauchen, wie bei einem geradlinigen Winkel (§ 40). Die Benennungen: rechte Winkel, senkrechte Ebenen, Neben- und Scheitelwinkel sind hier dieselben, wie bei den geradlinigen Winkeln (§ 40, [41]).

Ebenenwinkel, die Scheitelwinkel sind, sind gleich, weil zu ihnen ein dritter gehört, der Nebenwinkel von beiden ist, ebenso wie bei den geradlinigen Winkeln (§ 41).

Unter dem Winkel zweier Kreisbögen auf einer Kugel- [261 fläche werden wir den Winkel ihrer Ebenen verstehen (§ 30), mögen nun die Ebenen durch den Mittelpunkt gehen oder nicht; man muss aber jedesmal Bogen grösster Kreise verstehen, wenn nicht das Gegentheil gesagt wird.

Die Schnittlinie der beiden Ebenen werden wir die Kante des Winkels nennen; die Ebenen selbst dessen Schenkel oder Seiten.

§ 43.

Ein Ebenenwinkel ist gleich dem geradlinigen Winkel zwischen den Lothen, die in seinen Seiten auf der Kante errichtet sind.

Auf der Schnittlinie AB (Fig. 42) der beiden Ebenen AC und [39 BD nehmen wir die Endpunkte A und B zu Polen und konstruiren eine Ebene, in der der Kreis bcd mit dem Mittelpunkte a auf der Geraden AB einer der erzeugenden Kreise sein möge (§ 25). Die Ebenen AC und BD schneiden auf dem Kreise bcd den Bogen bc aus, dessen Grösse wir durch Wiederholung finden, sobald schliesslich das eine Ende mit dem andern zusammenfällt oder sobald wir bei einer grossen Zahl von Wiederholungen den Zwischenraum vernachlässigen können (§ 39).

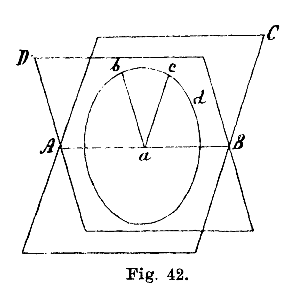


Fig. 42.

Den Wiederholungen des Bogens bc auf dem Kreise bcd werden Wiederholungen des zwischen den Ebenen liegenden Ausschnittes $AcBbA$ aus der Kugelfläche mit dem Halbmesser $Aa = aB$ entsprechen (§ 20), folglich wird für den Ebenenwinkel $AbBcA$ dieselbe Grösse herauskommen, wie für den geradlinigen bac. Indem wir die Ebene des Kreises bcd um die Linie AB drehen, überzeugen wir uns ausserdem, dass $\angle\, baB = \angle\, caB$ (§ 20); ferner muss die Ebene des

Kreises bac sich selbst decken, sobald die Pole A und B ihre Plätze wechseln (§ 18), überdies kann der Bogen bc derart mit sich selbst zusammenfallen, dass c in b ist und umgekehrt b in c (§ 20). Hieraus schliessen wir, dass

$$\angle Aac = \angle baB = \angle caB = \angle Aab;$$

folglich sind alle diese Winkel Rechte (§ 39), und die Linie AB steht auf ac und ab senkrecht.

Diesem Satze geben wir noch eine andre Fassung, indem wir sagen, dass in einem sphärischen Dreiecke die eine Seite dem gegenüberliegenden Winkel gleich ist, sobald jede der beiden andern Seiten gleich $\frac{1}{2}\pi$ ist.

§ 44. [40

Wenn ein körperlicher Winkel auf einer Kugelfläche von Bogen grösster Kreise gebildet wird, so muss er gleichzeitig durch den Schnitt von Ebenen entstehen, die durch den Mittelpunkt der Kugelfläche gelegt sind (§ 23). Zu einem solchen Winkel gehören folgende Stücke: die durch den Mittelpunkt der Kugelfläche gelegten Ebenen, seine Seiten; der gemeinsame Schnittpunkt der Seiten, der zugleich als Kugelmittelpunkt dient, die Spitze oder der Scheitel des körperlichen Winkels; die Schnittlinien der Seiten, seine Kanten; die Ebenenwinkel zwischen den Seiten, das sind die Winkel eines sphärischen Vielecks, die man der Reihe nach bestimmt, ohne auf die andre Seite einer Ebene überzugehen. Dazu kommt noch die Oberfläche des sphärischen Vielecks, die sich von den Seiten aus dahin erstreckt, wohin die Winkel gerechnet werden. Auf diese Weise gehören zu dem einen Umfange eines sphärischen Vielecks immer zwei körper- [262 liche Winkel, deren Summe 2π ist.

Die körperlichen Winkel nennt man nach der Zahl ihrer Seiten: dreiseitig, vierseitig und so fort; vielseitig bei unbestimmter Zahl der Seiten. Als Zeichen für körperliche Winkel nehmen wir dasselbe, wie bei den Ebenenwinkeln und bei den geradlinigen Winkeln (§ 40 und 42).

Werden die Seiten eines körperlichen Winkels über den Scheitel hinaus fortgesetzt, so entsteht ein neuer körperlicher Winkel, und beide zusammen werden wir Scheitelwinkel nennen. Zu diesen gehören zwei zu einander symmetrische sphärische Vielecke, bei denen die Seiten und die Winkel in derselben Ordnung verbunden sind, [41 aber in entgegengesetzter Richtung auf einander folgen.

§ 45.

In einem geradlinigen Dreiecke werden die Winkel dahin gerechnet, wo der von den Dreiecksseiten begränzte Flächenraum liegt. Sie heissen *innere* Winkel, während der *äussere* Winkel auf der andern Seite zweier Dreiecksseiten mit dem zugehörigen inneren Winkel 2π ausmacht. Die Verlängerung einer Seite kann nicht in das Innere des Dreiecks eintreten, weil sie dieselbe Gerade nicht zum zweiten Male schneiden darf (§ 27), folglich ist ein äusserer Winkel eines Dreiecks stets grösser als π, während der innere kleiner als π ist.

Den Winkel zwischen einer Seite und der Verlängerung einer andern werden wir *Aussenwinkel* nennen; dieser ist somit Nebenwinkel eines inneren Winkels.

§ 46.

Von den drei Seiten eines sphärischen Dreiecks sind zwei nothwendig kleiner als π, weil sie sonst die dritte nicht erreichen könnten, ohne einander zu schneiden. Zwei solche Seiten müssen folglich in einer der beiden Hälften enthalten sein, in die der grösste Kreis, der durch Verlängerung der dritten entsteht, die Kugelfläche zerlegt.

Daher werden wir den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks stets kleiner als π annehmen und meinen damit eben den Flächeninhalt, der in der einen Hälfte der Kugelfläche Platz hat. Demnach *müssen die Winkel, die Seiten* $<\pi$ *gegenüberliegen, auch* [*42*] *kleiner als* π *sein, während der dritte Winkel zugleich mit der ihm gegenüberliegenden Seite* $<\pi$, $=\pi$, $>\pi$ *ist.* In der That, denken wir uns den Schnittpunkt der beiden Seiten, von denen jede $<\pi$ ist, fest, so wird die dritte zugleich mit ihrem gegenüberliegenden Winkel wachsen und zugleich mit ihm gleich π werden.

Kapitel IV. [263 / *43*]

Ueber senkrechte Linien und Ebenen.

§ 47.

Von jedem Punkte einer Geraden aus kann es zu dieser nur eine Senkrechte geben.

Es versteht sich, dass die Verlängerung der Senkrechten über den Schnittpunkt hinaus immer auf der gegenüberliegenden Seite eine Senkrechte zu derselben Geraden ist, wie das aus der Gleichheit der Scheitel-

winkel folgt (§ 41). Aber jede andre Gerade, die von demselben Punkte ausgeht wie die Senkrechte, bildet auf der einen Seite einen stumpfen, auf der andern einen spitzen Winkel, folglich kann sie nicht selbst eine zweite Senkrechte sein.

§ 48.

Von einem Punkte aus kann auf eine Gerade nur ein Loth gefällt werden, während jede andre von diesem Punkte ausgehende Gerade die gegebene Gerade auf der Seite des Lothes unter einem spitzen Winkel trifft.

Es sei AB (Fig. 43) ein von A auf die Gerade BC gefälltes Loth, und AC sei eine Gerade von demselben Punkte A aus nach einem andern Punkte C auf der Geraden BC. Wir verlängern AB nach der andern Seite von BC, indem wir $BA' = BA$ machen, und verbinden die Punkte A' und C durch eine Gerade. Wird von den Endpunkten A und A' jeder an den Ort des andern verlegt, so bleibt die Mitte B der Geraden AA' an dem früheren Platze und ebenso die ganze Linie BC, weil $\angle ABC = \angle A'BC = \frac{1}{2}\pi$ ist [44 (§ 47). Hieraus schliessen wir, dass $\angle ACB = \angle A'CB$, und da der Winkel ACA' kleiner als π ist (§ 45), so ist $\angle ACB$ spitz.

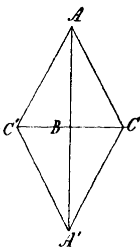


Fig. 43.

Daher können zwei Gerade, die auf einer dritten senkrecht stehen, einander nicht schneiden.

Wenn wir auf der andern Seite des Punktes B die Verlängerung $BC' = BC$ machen und dann das Dreieck ACA' um die Seite AA' umwenden, so kommt der Punkt C nach C', weil $\angle ABC = \angle ABC' = \frac{1}{2}\pi$ ist. Demnach sind die Abstände AC', AC, $A'C$, $A'C'$ einander gleich und folglich A und A' Pole der Geraden CC', ein Loth verbindet also immer gegenüberliegende Pole der geraden Linie.

§ 49. [264

In einem Dreiecke kann es einen rechten oder stumpfen Winkel geben, während die beiden andern in diesem Falle spitz sind.

Ist in dem Dreiecke ABC (Fig. 43) der Winkel ABC ein Rechter, so muss, wie wir eben gesehen haben, $\angle ACB$ und aus demselben Grunde auch der andre Winkel BAC spitz sein.

Ist in dem $\triangle ABC$ (Fig. 44) der Winkel ABC stumpf, so ist der Aussenwinkel ABD, der durch Verlängerung von BC über den Punkt B entsteht, spitz. Das von A aus auf BD gefällte Loth [45

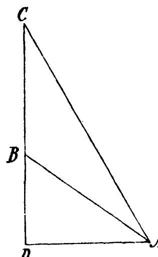


Fig. 44.

AD trifft die Linie BD irgendwo in D, ausserhalb des Dreiecks (§ 48). Demnach entsteht ein rechtwinkliges Dreieck ADC, das seinen rechten Winkel bei D und folglich bei C einen spitzen hat. Auf ähnliche Weise wird gezeigt, dass der andre Winkel CAB auch spitz ist.

§ 50.

In einem gleichschenkligen Dreiecke liegen den gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber. Umgekehrt liegen in einem Dreiecke gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Das gleichschenklige Dreieck ABC (Fig. 45), in dem A die Spitze ist, wenden wir um und legen es auf sich selbst, so dass die Seite AC auf AB kommt und folglich AB auf AC. Die Gleichheit der Seiten AB und AC bewirkt dann, dass die Punkte B und C die Plätze wechseln und dass die Linie BC sich selbst deckt. Dies bedeutet, dass $\angle B = \angle C$ ist.

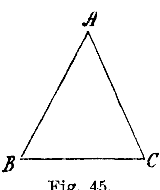


Fig. 45.

Nehmen wir dagegen an, dass $\angle B = \angle C$ ist, so wird das Dreieck ABC nach der Umlegung wiederum sich selbst decken, wenn wir bedenken, dass bei der Verlegung von B nach C und von C nach B die Seite CA auf BA fallen muss, ebenso wie BA auf CA, und dass folglich die beiden Seiten wieder in demselben Punkte A zusammentreffen. Das bedeutet, dass $AB = AC$ ist.

Daher ist ein Dreieck mit zwei gleichen Winkeln gleichschenklig, und zwar liegen die gleichen Schenkel den gleichen Winkeln gegenüber. In einem gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel gleich; umgekehrt muss ein Dreieck mit drei gleichen Winkeln gleichseitig sein. [46

In einem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie spitz, weil sie nämlich wegen ihrer Gleichheit weder rechte Winkel noch stumpf sein können (§ 49).

§ 51.

Eine gerade Linie, die mit einem Kreise zusammentrifft, schneidet den Kreis entweder in nur zwei Punkten, oder sie berührt den Kreis in einem einzigen Punkte, indem sie auf dem zugehörigen Durchmesser senkrecht steht. Hierbei wird die Gerade mit dem Kreise in einer Ebene gedacht.

Wenn die Gerade in den Kreis hineintritt und folglich verlängert auch wieder heraustritt (§ 25), so darf sie den Kreis nicht zum dritten

Male schneiden, weil die Gerade im Innern des Kreises mit dem Halbmesser einen spitzen Winkel bildet (§ 50), dessen stumpfer Neben- [265 winkel unmöglich in einem andern gleichschenkligen Dreiecke der Winkel zwischen einem Schenkel und der Grundlinie sein kann (§ 50).

Steht die Gerade auf dem Durchmesser senkrecht, so kann sie überhaupt nicht ins Innere des Kreises treten; sonst bildeten nämlich die beiden Halbmesser nach den gemeinsamen Punkten der Geraden und des Kreises beim Eintritt ins Innere und beim Austritt nach aussen ein gleichschenkliges Dreieck (§ 25). In diesem Dreiecke läge nach der Voraussetzung dem einen Halbmesser ein rechter Winkel [47 gegenüber, der dem andern Halbmesser gegenüberliegende wäre folglich auch ein Rechter (§ 50), und auf diese Weise entständen zwei Lothe, die von dem Mittelpunkte des Kreises aus auf dieselbe Gerade gefällt wären (§ 48).

Dasselbe kann man noch auf andre Weise zeigen. Wenn wir den Halbmesser AB (Fig. 46) nach der Aussenseite des Kreises verlängern, die Verlängerung $A'B = AB$ machen und sodann mit dem Halbmesser $A'B$ um A' einen Kreis beschreiben, so werden die beiden Kreise einander nur in dem Punkte B berühren (§ 35). Die Gerade BC, die ihre Pole in A und A' hat, muss auf AB senkrecht stehen (§ 48). Jeder Punkt C auf der Linie BC wird als Schnitt gleicher Kreise um die Pole A und A' entstehen, wenn die gleichen Halbmesser AC und $A'C$ so beschaffen sind, dass AC zugleich mit BC wächst. Hieraus folgt, dass das Loth AB der kürzeste Abstand des Punktes A von der Geraden BC ist, während die übrigen Abstände AC um so grösser sind, je weiter der Punkt C von dem Endpunkte B des Lothes AB ist. Wenn nun die Gerade BC den Kreis nicht senkrecht zu dem Halbmesser AC trifft, so schneidet sie ihn nothwendig in zwei Punkten C und C' und bleibt nachher ausserhalb des Kreises, sobald die Abstände der Punkte von dem Mittelpunkte grösser als AC werden.

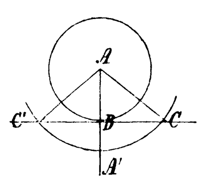


Fig. 46.

§ 52.

In einem gleichschenkligen Dreiecke halbirt das Loth von der Spitze auf die Grundlinie sowohl den Winkel an der Spitze als die Grundlinie.

Es sei CAC' (Fig. 43) ein gleichschenkliges Dreieck, wo [48 $AC = AC'$ ist. Indem wir die Punkte C und C' an ihren Plätzen lassen, legen wir das Dreieck auf die andre Seite der Grundlinie CC', wobei die Spitze A in den Punkt A' fallen möge; dann können wir,

da die Abstände AC, AC', $A'C$ und $A'C'$ gleich sind, A und A' zu Polen der Geraden CC' nehmen. Die Gerade AA' zwischen den beiden Polen A und A' muss nun auf der Grundlinie CC' senkrecht stehen (§ 48) und im Innern der beiden gleichschenkligen Dreiecke CAC' und $CA'C'$ verlaufen, indem sie die Grundlinie irgendwo in B zwischen C und C' durchschneidet, da ja der Winkel zwischen Schenkel und Grundlinie spitz ist (§ 48). Die Endpunkte C und C' der Grundlinie können wir als Pole der Geraden AA' betrachten, da die Abstände CA, CA', $C'A$, $C'A'$ gleich sind. Wenn wir daher die ganze Figur um die Linie AA' umwenden, so legen wir C auf C' und umgekehrt C' auf C, [266 und CB wird demnach $C'B$ decken und der Winkel CAB den Winkel $C'AB$. Das bedeutet, dass $CB = C'B$ ist und $\angle CAB = \angle C'AB$.

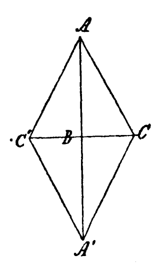


Fig. 43.

Bemerken wir hierzu, dass die Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke mit der Grundlinie CC' auf der Geraden AA' liegen müssen, die auf der Grundlinie in der Mitte senkrecht steht, oder was ganz dasselbe ist, auf der Verbindungslinie der Spitzen zweier gleichschenkliger Dreiecke mit gemeinsamer Grundlinie CC'. Dieser Eigenschaft der gleichschenkligen Dreiecke ist das Verfahren zur Halbirung eines Winkels und gerader Linien entnommen.

Wenn verlangt wird, den Winkel CAC' zu halbiren, so trägt man von dem Scheitel aus gleiche Seiten AC und AC' ab. Um die [49 Endpunkte C und C' beschreibt man mit gleichen Halbmessern CA' und $C'A'$ Kreisbögen, deren Schnittpunkt A' man [mit A] durch die Gerade AA' verbindet.

Wird verlangt, die Gerade CC' zu halbiren, so beschreibt man mit den gleichen Abständen CA und $C'A$ Kreisbögen, deren zwei Schnittpunkte A und A' man durch die Gerade AA' verbindet. Von den zwei Punkten A und A' kann man den einen durch den Punkt ersetzen, in dem irgend welche beliebige gleiche Kreise um C und C' einander auf der einen oder auf der andern Seite der Geraden CC' schneiden.

Aus den hier bewiesenen Sätzen folgen die umgekehrten. Eine Gerade steht auf der Grundlinie senkrecht, wenn sie die Spitze des gleichschenkligen Dreiecks mit der Mitte der Grundlinie verbindet. Sie muss den Winkel an der Spitze halbiren, wenn sie von der Mitte der Grundlinie ausgeht und auf dieser senkrecht steht. Sie trifft die Grundlinie senkrecht in deren Mitte, wenn sie von der Spitze ausgeht und hier den Winkel halbirt. Die Richtigkeit aller dieser Sätze wird klar, wenn wir beachten, dass es nur ein Loth von der Spitze auf die

Grundlinie geben kann (§ 48), dass also schon einige Eigenschaften dieses Lothes, wenn sie die Lage der Linie genügend bestimmen, die übrigen nach sich ziehen.

Wenn daher verlangt wird, auf der Geraden CC' im Punkte B das Loth BA zu errichten, so braucht man nur von dem gegebenen Punkte B aus nach beiden Seiten hin $BC = BC'$ zu machen, sodann [50 um die Endpunkte C und C' gleiche Kreise zu beschreiben und deren Schnittpunkt A durch eine gerade Linie mit B zu verbinden.

Wenn dagegen verlangt wird, auf die Gerade CC' von einem ausserhalb der Geraden angenommenen Punkte A aus das Loth AB zu fällen, so muss man um A mit einem beliebigen Halbmesser AC einen Kreis zeichnen und zwar so, dass dieser die gegebene Linie in zwei Punkten C und C' schneidet. Um diese Punkte hat man nach der einen oder der andern Seite der Linie CC' Kreisbögen zu beschreiben und endlich den Schnittpunkt A' dieser Kreise durch eine Gerade mit dem gegebenen Punkte A zu verbinden.

§ 53.

Der Aussenwinkel, der durch die Verlängerung einer Seite eines Dreiecks entsteht, ist grösser als die beiden inneren Winkel, die nicht neben ihm liegen.

In dem $\triangle\, ABC$ (Fig. 47) verlängern wir die Seite AC; der Aussenwinkel BCD zwischen der Verlängerung CD und der Seite BC wird grösser sein als der Winkel B und ebenso grösser als der andre an dem [267 Punkte A des Dreiecks.

Fig. 47.

Wir ziehen von A aus die Gerade AEF durch die Mitte E der Seite BC, machen $AE = EF$ und verbinden F und C durch die Gerade FC. So entstehen kongruente Dreiecke AEB und CEF, die einander decken, wenn wir vermöge der Gleichheit der Seiten BE und EC, AE und EF und der Winkel BEA und FEC (§ 41) das eine Dreieck mit den gleichen Seiten auf das andre legen, zum [51 Beispiel, indem wir $\triangle\, ABE$ um E drehen, bis BE mit EC zusammenfällt. Hieraus folgt, dass die Winkel ABC und BCF gleich sind. Bemerken wir überdies, dass die Gerade FA die Linie AD nicht in einem andern Punkte treffen kann, ausser in A, von wo sie ausgeht; folglich liegt der Punkt F in der Oeffnung des Aussenwinkels BCD, den er in zwei zerlegt: der eine ist FCD, der andre der $\angle BCF = \angle ABC$, wie wir soeben gesehen haben. Das bedeutet, dass $\angle\, ABC$ kleiner

ist als $\angle BCD$. Ebenso würde man beweisen, dass der andre Winkel BAC kleiner ist als der Winkel BCD, der nicht neben ihm liegt.

§ 54.

Im Dreiecke liegt der grösseren Seite der grössere Winkel gegenüber. Umgekehrt liegt dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber.

In dem $\triangle ABC$ (Fig. 48) sei die Seite $AB > AC$. Wir machen $AD = AC$ und ziehen die Gerade DC. So entsteht ein gleichschenkliges Dreieck ADC, wo den gleichen Seiten die gleichen Winkel ADC und ACD gegenüberliegen (§ 50), folglich ist der Winkel

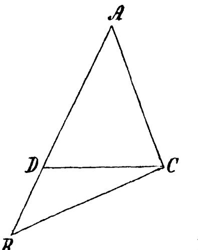


Fig. 48.

$$ACB > ADC > ABC \text{ (§ 53).}$$

Hieraus folgt ganz von selbst der umgekehrte Satz. Wenn in einem Dreiecke ein Winkel grösser ist als ein andrer, so können die gegenüberliegenden Seiten nicht gleich sein (§ 50); es kann auch nicht die dem grösseren Winkel gegenüberliegende Seite die kleinere sein, da wir ja soeben gezeigt haben, dass der kleineren Seite immer [52 der kleinere Winkel gegenüberliegen muss.

§ 55.

Im Dreiecke ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte.

Das Dreieck kann nicht anders entstehen als dadurch, dass zwei Kreise einander schneiden, deren Mittelpunkte in den Endpunkten der einen Seite gelegen sind und denen die beiden andern Seiten als Halbmesser dienen. Indessen schneiden die Kreise einander nur in dem Falle, wenn die Summe der Halbmesser grösser ist als der Abstand der Mittelpunkte (§ 35).

Uebrigens können wir das hier auch anders beweisen. Wenn wir in dem Dreiecke BDC (Fig. 48) die eine Seite, zum Beispiel BD, verlängern, indem wir die Verlängerung AD der andern Seite DC gleich machen, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck ADC, wo die Winkel an den Punkten A und C gleich sind. Folglich ist in dem $\triangle ABC$ der Winkel bei C grösser als der Winkel bei A und daher die Seite $AB = BD + DC > BC$.

Ueberhaupt ist eine Seite eines Vielecks kleiner als die Summe der übrigen, weil das Vieleck allmählich entsteht, wenn wir mit einem Dreiecke beginnend jedesmal eine Seite durch zwei ersetzen, deren Summe grösser ist.

Daher ist es in diesem Sinne richtig zu sagen, dass durch eine gerade Linie der kürzeste Abstand zweier Punkte gemessen wird. [268 53]

§ 56.

Senkrecht auf einer Ebene heisst eine Gerade, wenn sie die Ebene so trifft, dass sie auf zwei Geraden der Ebene senkrecht steht. Sie steht dann immer auf allen Geraden senkrecht, die auf der Ebene von dem Treffpunkte aus gezogen sind.

Die beschriebene Eigenschaft kommt der Geraden zu, die zwei Pole der Ebene verbindet. Es seien A und A' (Fig. 27) die Pole, $BDB'D'$ ein erzeugender Kreis auf der Ebene, wo C der Mittelpunkt des Kreises $BDB'D'$ und der Ursprung aller Kreise sei. Wenn die Pole A und A' ihre Plätze wechseln, so kann jeder Punkt E des Kreises den seinigen beibehalten. Das bedeutet, dass $\angle ECA = \angle ECA' = \frac{1}{2}\pi$ ist. So werden überhaupt alle Geraden der Ebene, die durch C gezogen sind, auf der Geraden AA' senkrecht stehen.

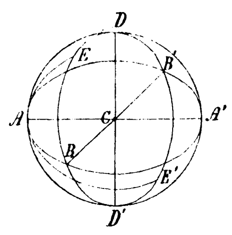


Fig. 27.

Nehmen wir nunmehr umgekehrt an, dass die Gerade AB (Fig. 49) auf den beiden BC und BD senkrecht steht, die nicht eine einzige Gerade bilden; indem wir AB über den Punkt B hinaus verlängern, die Verlängerung $BA' = BA$ und sodann $BC = BD$ machen und die Endpunkte durch Gerade mit A und A' verbinden, erhalten wir eine Figur von Geraden, in der $AC = AD$, $A'C = A'D$ ist, denn das $\triangle ACA'$ deckt das $\triangle ADA'$, einmal weil die rechten Winkel ABC und ABD gleich sind und dann weil die Geraden BC und BD gleich sind. In dieser Figur ersetzen die Geraden einander, wenn die Punkte [54 A und A', C und D mit einander vertauscht werden, denn die Ebenen der Dreiecke ADA' und ACA' fallen auf einander, die Gleichheit von AB und $A'B$ bewirkt, dass der Punkt B seinen Platz behält, die Gleichheit der rechten Winkel erfordert, dass die Gerade BC auf BD kommt und umgekehrt BD auf BC, und endlich bringt die Gleichheit von BC und BD den Punkt C nach D, D nach C; folglich ist $AC = AD = A'C = A'D$.

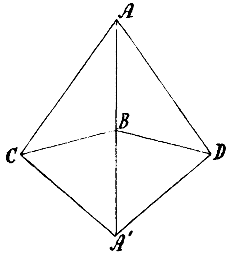


Fig. 49.

Daher geht die Ebene, die A und A' zu Polen hat, durch die Punkte D und C in gleichen Abständen von A und A' hindurch und ebenso durch den Punkt B, als den Ursprung der Kreise auf der Ebene (§ 22). Durch drei Punkte B, C, D, die nicht in einer geraden

Linie angenommen sind, kann man aber keine andre Ebene legen (§ 33), demnach steht die Gerade AA', die die Pole verbindet, auf dieser Ebene senkrecht.

§ 57.

Von einem Punkte auf einer Ebene kann nur eine Senkrechte ausgehen, und ebenso giebt es auch von einem Punkte ausserhalb einer Ebene nur ein Loth auf diese Ebene.

Es versteht sich von selbst, dass die Verlängerung einer Senkrechten nach der andern Seite der Ebene gleichfalls auf der Ebene senkrecht ist (§ 47).

Es mögen jetzt zwei Gerade, von denen keine die Verlängerung der andern ist, von einem Punkte ausgehen. Wir denken uns die [55 Ebene durch sie (§ 33) und deren Schnittlinie mit der gegebenen. [269 Die ersten Geraden können nicht beide auf dieser letzteren senkrecht stehen (§ 47 und 48), folglich dürfen sie nicht gleichzeitig auf der Ebene senkrecht sein (§ 56).

§ 58.

Auf einer Ebene kann man in jedem Punkte ein Loth errichten.

Die Möglichkeit, auf einer Ebene in jedem Punkte ein Loth zu errichten, folgt daraus, dass auf der Ebene jeder Punkt als Ursprung von Kreisen dient (§ 29) und dass sich sodann zu diesem Ursprunge zwei Pole finden lassen, deren Verbindungslinie durch den gegebenen Punkt geht und auf der Ebene senkrecht steht (§ 56).

Sollte verlangt werden, das Loth zu errichten, indem man sich dazu des Zeichnens von geraden Linien und von Kreisen in Ebenen bedient, so nennen wir A die gegebene Ebene, a den auf dieser gegebenen Punkt, und legen durch diesen beliebig eine Gerade α in der Ebene A, sodann durch α beliebig eine neue Ebene B, die gegen die frühere A unter irgend einem Winkel geneigt ist. Von a aus errichten wir Lothe auf α, das eine β in der Ebene A, das andre γ in der Ebene B; endlich errichten wir in der Ebene, in der β und γ liegen, von a aus auf β das Loth δ, das nunmehr das Loth auf der gegebenen Ebene A sein wird. Hier ist α senkrecht zu β und γ, folglich [56 zugleich zu der Ebene dieser Geraden und in dieser zu δ (§ 56), das mithin auf α und β senkrecht sein wird und daher auch auf der Ebene, in der α und β liegen.

§ 59.

Eine Ebene steht auf einer andern senkrecht, wenn sie durch eine auf der letztern senkrechte Gerade geht.

Umgekehrt ist eine Senkrechte zu der Schnittlinie zweier senkrechter Ebenen, wenn sie sich in der einen von beiden Ebenen befindet, auf der andern senkrecht.

Es sei ab (Fig. 51) auf der Ebene AB senkrecht. Durch ab gehe die Ebene CD, die die erste in der Geraden BC schneidet, die in dem Punkte b auf ab senkrecht steht (§ 56). In der Ebene AB ziehen wir von dem Endpunkte b aus zu der Geraden BC die Senkrechte bc, die also mit ab einen rechten Winkel bilden muss, der dem Ebenenwinkel gleich ist (§ 43).

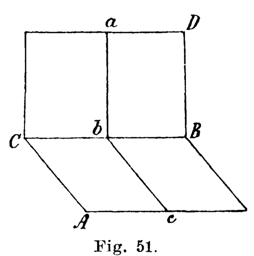


Fig. 51.

Werden nun umgekehrt die Ebenen AB und CD zu einander senkrecht vorausgesetzt, so werden die in diesen Ebenen auf der Schnittlinie BC errichteten Senkrechten ab und bc auch zu einander senkrecht sein (§ 43). Auf diese Weise wird ab zu BC und bc senkrecht, folglich auch zu der Ebene AB selbst.

Wir schliessen hieraus, dass zwei Ebenen, die auf einer [57 dritten senkrecht stehen, einander in einer auf der letzteren senkrechten Geraden schneiden, weil die von dem gemeinsamen Schnittpunkte ausgehende Senkrechte zu der dritten Ebene sowohl [270 in der einen als in der andern Ebene liegen und folglich die Schnittlinie beider sein muss.

§ 60.

Auf eine Ebene kann man von jedem Punkte aus ein Loth fällen.

Jeden Punkt ausserhalb der Ebene kann man als Pol dieser Ebene betrachten, indem man den gegenüberliegenden auf der andern Seite findet (§ 28). Die Gerade zwischen den beiden Polen wird das Loth von dem gegebenen Punkte auf die Ebene sein (§ 56).

Sollte verlangt werden, das Loth zu fällen, indem man dazu nur gerade Linien sowie Kreise in Ebenen benutzt, so möge A der gegebene Punkt sein (Fig. 50), von dem aus das Loth auf die Ebene BC gefällt werden soll. Wir ziehen in der Ebene

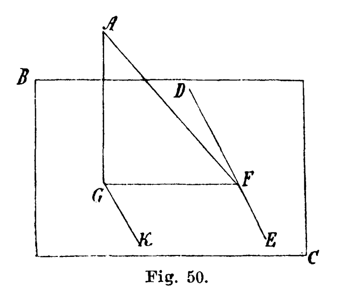


Fig. 50.

die Gerade DE beliebig, fällen auf diese von dem gegebenen Punkte A aus das Loth FA, sodann ziehen wir von F aus, wo dieses Loth auftrifft, zu ED noch eine zweite Senkrechte FG in der gegebenen Ebene; endlich fällen wir von A aus auf FG das Loth AG, das auf der Ebene senkrecht stehen wird. Hier ist DE auf FG und

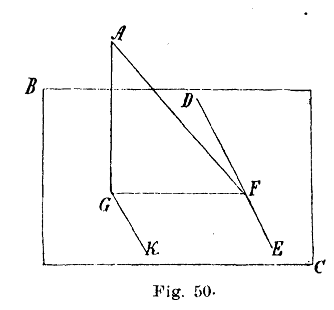


Fig. 50.

FA senkrecht, folglich auch auf der Ebene des Dreiecks FAG, die auf diese Weise zu der Ebene BC senkrecht wird (§ 59). [58 Der rechte Winkel zwischen beiden Ebenen ergiebt zugleich einen rechten Winkel zwischen GA und der Geraden GK, die in der Ebene BC senkrecht zu FG gezogen ist. Daher ist AG zu FG und zu GK senkrecht, folglich auch zu der Ebene BC.

§ 61.

Zwei Gerade, die auf einer Ebene senkrecht stehen, sind in einer Ebene enthalten.

Es seien AB und CD (Fig. 52) beide zu der Ebene FE senkrecht; in dieser verbinden wir die Endpunkte B und D durch die Gerade BD, durch die wir uns eine zu EF senkrechte Ebene denken. Auf dieser müssen die in den Punkten B und D errichteten Senkrechten zu der Ebene FE liegen (§ 59), also auch die Geraden AB und CD selbst (§ 57).

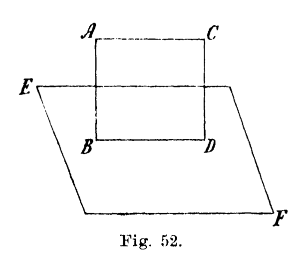


Fig. 52.

Die Gerade einer Ebene, in der alle Lothe von einer andern Geraden aus auftreffen, werden wir Spur oder Projektion dieser andern nennen. Eine Gerade auf eine Ebene projiciren soll bedeuten, dass man die Lothe fällt, um die Projektion zu konstruiren. So ist hier DB die Projektion der Geraden CA auf die Ebene FE.

Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene bedeutet den Winkel, den die Gerade mit ihrer Projektion auf die Ebene bildet.

§ 62.

Auf einer Kugelfläche ist der Bogen eines grössten Kreises zu einem andern senkrecht, wenn er mit diesem letzteren nach beiden Seiten hin rechte Winkel bildet.

Auf einem Bogen kann man von einem gegebenen Punkte aus nur eine Senkrechte errichten, weil die Bogen grösster [59 Kreise dadurch entstehen, dass die Kugelfläche von Ebenen ge- [271 schnitten wird, die durch den Mittelpunkt gehen. Aus demselben Grunde kann von einem Punkte aus auf einen gegebenen Kreisbogen nur ein Loth gefällt werden, das jedoch den ganzen Kreis, auf dem der Bogen angenommen worden ist, sowie überhaupt alle grössten Kreise auf der Kugelfläche in zwei Punkten schneidet. Dieser

Durchschnitt entsteht in den Enden eines Durchmessers der Kugelfläche, folglich machen die beiden Senkrechten zu einem Kreise zusammen π aus.

Den Abstand eines Punktes werden wir auf der Kugelfläche durch den Bogen eines grössten Kreises messen, der entweder nach einem andern Punkte gezogen ist oder senkrecht zu dem Bogen eines andern grössten Kreises. Der Abstand eines Poles von den Punkten seines Kreises ist überall gleich und beträgt $\frac{1}{2}\pi$, weil der Durchmesser zwischen den Polen auf der Ebene des Kreises senkrecht steht (§ 56). Von jedem andern Punkte aus, der kein Pol ist, giebt es zwei Abstände bis zu dem Kreise und diese bilden zusammen einen halben Kreis, folglich ist der eine von ihnen immer $< \frac{1}{2}\pi$, der andre $> \frac{1}{2}\pi$.

§ 63.

Zwei symmetrische gleichschenklige Dreiecke auf einer Kugelfläche sind immer kongruent.

Es sei ABC (Fig. 53) ein sphärisches Dreieck, in dem die Seite $AB = AC$ ist. Es sei $A'B'C'$ das dazu symmetrische Dreieck, so dass hier A', B', C' die Endpunkte der von A, B, C aus gezogenen [60 Durchmesser darstellen (§ 44), und folglich $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$. Wenn wir jetzt bei diesen beiden Dreiecken zunächst die Kugelmittelpunkte und dann die Punkte A und A' vereinigen, indem wir AB auf $A'C'$ legen, so muss, weil die Ebenenwinkel an den Punkten A und A' und ausserdem die Seiten AB und $A'C'$, AC und $A'B'$ gleich sind, der Punkt C' auf B und B' auf C fallen.

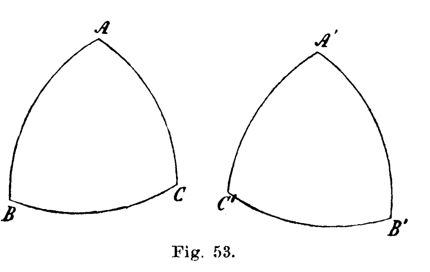


Fig. 53.

§ 64.

Im sphärischen Dreiecke liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber; umgekehrt liegen gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Es seien die beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ (Fig. 53) zu einander symmetrisch, so dass die Punkte A, B, C den Punkten A', B', C' des andern Dreiecks entsprechen. Wenn wir überdies $AB = AC$ annehmen, so müssen die beiden Dreiecke einander decken, wenn wir sie so auf einander legen, dass der Punkt A auf A' und B auf C' fällt (§ 63). Das bedeutet: $\angle B = \angle C' = \angle C$.

Wenn wir nun $\angle B = \angle C$ annehmen und folglich $\angle B = \angle C'$, $\angle C = \angle B'$, so müssen wir die Dreiecke so auf einander legen, dass der Punkt B' auf C und C' auf B fällt. Da die Ebenenwinkel gleich sind, so wird die Seite $C'A'$ in BA, $B'A'$ in CA übergehen, so dass sie einander in dem gemeinsamen Punkte A' schneiden, demnach ist: $BA = C'A' = CA$.

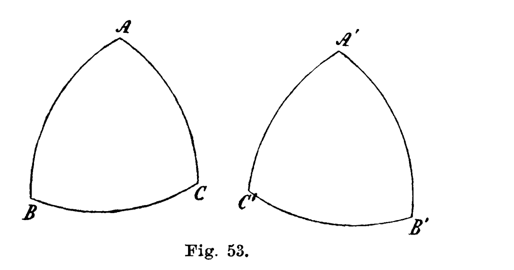


Fig. 53.

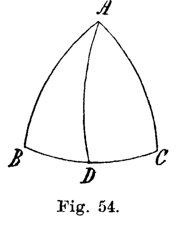


Fig. 54.

§ 65. [61

Im gleichschenkligen sphärischen Dreiecke halbirt die Senkrechte von der Spitze aus die Grundlinie.

In dem $\triangle ABC$ (Fig. 54) sei die Seite $AB = AC$ und der [272 Bogen AD verbinde die Spitze A mit der Mitte D der Grundlinie BC. Wenn wir jetzt das $\triangle ABC$ mit dem zugehörigen symmetrischen Dreiecke bedecken, indem wir auf BC die entsprechende Seite legen, so kommen auf D und A die ihnen entsprechenden Punkte (§ 63), während der Winkel ADC den Ort seines Nebenwinkels ADB einnimmt. Das bedeutet: $\angle ADC = \angle ADB = \frac{1}{2}\pi$.

§ 66.

Der Bogen, der durch die Spitzen zweier gleichschenkliger Dreiecke auf einer Kugelfläche geht, ist stets senkrecht zur gemeinsamen Grundlinie beider und halbirt diese zugleich, ausser in dem Falle, wo die Seiten des einen Dreiecks die Verlängerungen der Seiten des andern sind.

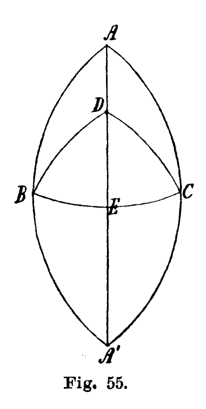


Fig. 55.

Es seien ABC und BDC (Fig. 55) zwei gleichschenklige Dreiecke mit der gemeinsamen Grundlinie BC, von deren Mitte aus wir nach den Spitzen A und D Bogen ziehen. Diese müssen auf BC senkrecht sein (§ 65) und daher in einem Bogen ADE zusammenfallen (§ 62), mögen nun die Spitzen auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Grundlinie BC liegen. Wenn sich überdies die beiden Spitzen nicht mit dem Mittelpunkte der Kugelfläche in einer geraden Linie befinden, so lässt sich keine andre Ebene durch [62

diese drei Punkte legen, folglich auch kein andrer Bogen durch A und D (§ 33), und deshalb muss der Bogen ADE zu BC senkrecht sein. Wenn dagegen die gleichen Seiten AB und AC für das andre gleichschenklige Dreieck $BA'C$ die Verlängerungen [der Seiten] sind, so liegen die Spitzen A, A' und der Mittelpunkt der Kugelfläche in einer Geraden, folglich kann man auch von A nach A' eine Menge von Bogen ziehen.

Ueberhaupt wollen wir bemerken, dass wenn in einem gleichschenkligen Dreiecke die Spitze nicht zugleich Pol des Kreises ist, dem die Grundlinie angehört, dass dann von der Spitze auf die Grundlinie nur eine Senkrechte möglich ist (§ 62), folglich ist die Lage dieser Senkrechten genügend bestimmt. Unter den vier Eigenschaften des Bogens: dass er auf der Grundlinie senkrecht steht, dass er durch die Spitze geht, dass er den Winkel an der Spitze halbirt und dass er die Grundlinie halbirt, ziehen demnach je zwei die übrigen als nothwendige Folgen nach sich.

Wenn daher verlangt wird, den Bogen BC zu halbiren, so beschreibt man um die Endpunkte B und C mit einem beliebigen Abstande AB Kreisbögen, macht sodann dasselbe mit einem andern Abstande BD und verbindet endlich die Schnittpunkte A und D gleicher Kreise durch den Bogen AD, der, wenigstens wenn er verlängert wird, durch die Mitte E der Grundlinie gehen muss. Man [63 kann die Punkte A und D in dieser Weise auf derselben oder auf gegenüberliegenden Seiten des Bogens BC suchen und hat nur den Fall zu vermeiden, wo die Bogen der einen Kreise sich als die Verlängerungen der andern herausstellen.

Wird verlangt, den Winkel BAC zu halbiren, so macht man [273 die Seiten AB und AC gleich, sodann zeichnet man von den Endpunkten B und C aus gleiche Kreise, deren Schnittpunkt D man mit dem Scheitel A durch den Bogen AD verbindet.

Von einem Punkte A aus fällt man die Senkrechte auf den Bogen BC, indem man BC durch einen Kreis um A in zwei Punkten B, C schneidet, sodann von den Punkten B, C aus mit irgend einem Bogen $BD = CD$ gleiche Kreise zeichnet und endlich deren Schnittpunkt mit dem Punkte A durch den Bogen AD verbindet, den man, falls es nöthig sein sollte, verlängert, bis er mit BC zusammentrifft.

Um auf dem Bogen BC in dem Punkte E die Senkrechte zu errichten, nimmt man von E aus nach beiden Seiten hin gleiche Bogen $BE = EC$ an, von den Endpunkten B und C aus zeichnet man gleiche Kreise mit einem beliebigen Bogen $BA = AC$ und verbindet deren Schnittpunkt A mit dem Punkte E durch den Bogen AE.

Die mit einem Bogen auf der Kugelfläche entworfene Linie haben

wir hier Kreis genannt. Es ist das in der That keine andre Linie als die, die entsteht, wenn man die gegebene Kugelfläche durch eine andre schneidet, als deren Mittelpunkt der feste Endpunkt des Bogens [*64* und als deren Halbmesser die Sehne des Bogens benutzt wird. Diesen Kreis nennt man parallel zu dem grössten Kreise, der auf der Kugelfläche den festen Endpunkt des Bogens zum Pole hat. Er entsteht auch als Schnitt der Kugelfläche mit einer Ebene, die auf dem Durchmesser, der die Pole verbindet, senkrecht errichtet ist.

Der grösste Kreis auf der Kugelfläche zeigt im Vergleich mit den übrigen Kreisen ähnliche Eigenschaften, wie sie auf der Ebene die gerade Linie im Vergleich mit allen Kreisen zeigt. So schneiden gleiche Kreise um zwei feste Punkte auf der Kugelfläche einander auf einem grössten Kreise, auf dem der kleinste und der grösste Abstand eines solchen Punktes senkrecht stehen, weil die damit beschriebenen Kreise den grössten Kreis nicht mehr schneiden sondern ihn nur berühren dürfen, sonst könnte nämlich ein gleichschenkliges Dreieck entstehen, in dem durch die Mitte der Grundlinie eine neue Senkrechte ginge (§ 62 und 65).

§ 67.

Regelmässiges Vieleck nennt man ein solches geradliniges oder sphärisches Vieleck, in dem sowohl alle Seiten als alle Winkel gleich sind.

Im Innern eines regelmässigen Vielecks befindet sich ein Punkt, der Mittelpunkt, von dem aus die Abstände sowohl nach allen Ecken als nach den Seiten gleich sind. Im geradlinigen Dreiecke bestimmen die Geraden, die die Winkel halbiren, den Mittelpunkt, [*65* indem sie einander schneiden. Nach dem Mittelpunkte eines sphärischen Vielecks laufen die Bogen zusammen, in denen die Halbirungsebenen der Winkel die Kugelfläche schneiden. In einem geradlinigen Vielecke zum Beispiel erstrecken sich die Geraden AC und BC [274 (Fig. 55a), die die Winkel an den Punkten A und B halbiren, nach dem Mittelpunkte, indem sie ein gleichschenkliges Dreieck bilden, das an sich selbst angelegt das regelmässige Vieleck erzeugt. Es ist klar, dass AC und BC einander jedesmal schneiden, da jede von ihnen verlängert den begränzten ebenen Flächenraum in zwei Theile zerlegt, die bei jeder von beiden Geraden kongruent ausfallen müssen. Dasselbe

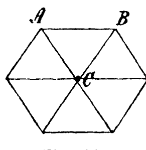


Fig. 55a.

ist von den regelmässigen Vielecken zu sagen, die aus den Bogen grösster Kreise auf einer Kugelfläche bestehen. Wenn daher bei einem regelmässigen Vielecke die Zahl der Seiten n ist, so muss am Mittelpunkte jeder Winkel zwischen den Geraden, die von den Endpunkten einer Seite aus dahin gezogen sind, gleich $2\pi : n$ sein. Der Kreis, der

mit dem Abstande des Mittelpunktes von dem Endpunkte einer Seite beschrieben ist, wird folglich durch die Scheitel aller Winkel gehen, der Kreis aber, der mit der Senkrechten beschrieben ist, oder, was ganz dasselbe ist, mit dem Abstande von der Mitte einer Seite, wird jede Seite in deren Mitte berühren.

Kapitel V.

[275
66

Die Messung körperlicher Winkel mit Hülfe von Ebenenwinkeln.

§ 68.

Ein dreiseitiger körperlicher Winkel ist gleich der halben Summe seiner Ebenenwinkel weniger einen Rechten.

Zu dem Principe, das wir für geometrische Messungen angenommen haben (§ 37), fügen wir noch ein neues, das ebenso nothwendig ist, wie wir bereits früher (§ 2) gelegentlich bemerkt haben. Zwei Grössen betrachten wir als gleich, wenn wir beide aus gleichen Theilen, wenn auch in verschiedener Anordnung zusammensetzen können. Demnach bleibt dann nur übrig, die Theile selbst auszumessen.

In dem sphärischen Dreiecke ABC (Fig. 56) sei jede Seite $< \pi$. Wir halbiren AB und BC in den Punkten D und E und legen durch diese den Bogen $FDEG$. Das vom Punkte B auf diesen Bogen gefällte Loth BH möge im Innern des Dreiecks ABC verlaufen. In diesem Falle müssen die von A und C aus auf denselben Bogen gefällten Lothe ausserhalb des Dreiecks ABC liegen, indem sie gewisse Dreiecke AFD, CEG bilden, die den Dreiecken DBH, BHE kongruent sind. Wir können uns davon überzeugen, indem wir zum

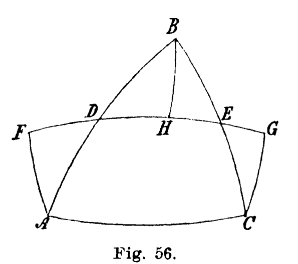


Fig. 56.

Beispiel das Dreieck DBH um den Punkt D drehen, bis BD sich mit DA deckt. Dann bewirkt die Gleichheit der Scheitelwinkel, dass die Seite HD auf DF fällt und hier im Punkte F endigt, weil der [67 Bogen $DE < \pi$ ist (§ 46) und es daher von A aus auf den Bogen FD nur das eine Loth AF geben kann (§ 62). Stützen wir uns daher auf das eben angenommene Princip, so müssen wir das Dreieck ABC seiner Grösse nach als dem Vierecke $AFGC$ gleich betrachten. Wir wollen hierzu bemerken, dass wenn wir die Summe aller Winkel des Dreiecks ABC mit S bezeichnen, im Vierecke $AFGC$ diese Summe

$S + \pi$ sein wird, weil hier zu den Winkeln BAC und BCA noch hinzukommen: $FAD + ECG = ABC$ und ausserdem $AFD + EGC = \pi$.

Wenn das von B auf DE gefällte Loth in E auftrifft (Fig. 57), [276 so ist hier $\triangle BDE$ kongruent dem $\triangle AFD$, folglich ist der Flächeninhalt des $\triangle ABC$ wieder derselbe, wie der des Vierecks $AFEC$, in dem die Summe aller Winkel abermals $S + \pi$ beträgt.

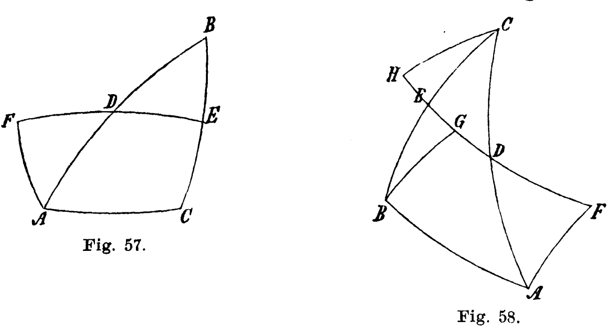


Fig. 57.

Fig. 58.

Wenn das von C aus auf DE gefällte Loth CH ausserhalb des Dreiecks ABC verläuft (Fig. 58), so ist hier, wie schon im ersten Falle, $\triangle AFD$ kongruent dem $\triangle DCH$, $\triangle BGE$ dem $\triangle ECH$, folglich ist wieder der Flächeninhalt des Vierecks $AFGB$ gleich dem des $\triangle ABC$, zu dem das $\triangle AFD$ hinzugefügt wird, das der Summe der beiden weggenommenen DCE und BGE gleich ist. In dem Vierecke $ABGF$ ist wieder die Summe aller Winkel gleich $S + \pi$, weil mit den Dreiecken der Winkel FAD anstatt der Summe der beiden [68 Winkel ACB und GBC hinzukommt und ausserdem die rechten Winkel an den Punkten F und G zugefügt werden.

Daher ist in jedem Falle der Flächeninhalt des Dreiecks ABC (Fig. 56) ebenso gross, wie der Flächeninhalt des Vierecks $AFGC$, das von der Seite $AC < \pi$ des Dreiecks und von den Lothen AF und CG begränzt wird, die von den Endpunkten dieser Seite aus auf den durch die Mitten der beiden übrigen Seiten gezogenen Bogen gefällt sind. In diesem Vierecke ist die Summe aller Winkel um zwei Rechte grösser als die Winkelsumme des Dreiecks. Hieraus folgt, dass Winkelsumme und Grösse des Flächeninhalts in allen Dreiecken gleich gross ausfallen, die über derselben Seite $AC < \pi$ errichtet sind, während ihre Spitze im Scheitel des dritten Winkels jedesmal von dem Bogen, der durch die Mitten der Schenkel dieses dritten Winkels gezogen ist, gleichen Abstand hat.

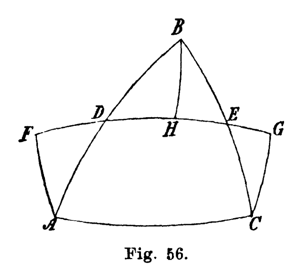


Fig. 56.

In dem gegebenen Dreiecke ABC (Fig. 59) ziehen wir durch die Punkte D, E, die in den Mitten der Seiten AB, BC angenommen sind, den Bogen DE und zu diesem parallel den Kreis BF, bis dieser einen Punkt F auf der nach derselben Richtung verlängerten Seite ACF trifft. Alsdann wird das von F aus auf den Bogen DEG gefällte Loth FG dem Lothe gleich sein, das vom Punkte B aus auf denselben Bogen gefällt ist (§ 66), folglich sind Flächeninhalt und Winkelsumme bei dem Dreiecke ABC ebenso gross wie bei dem Dreiecke, das wir erhalten, wenn wir F mit den Punkten A und C durch Bogen verbinden, und zwar ziehen wir dabei den ersten Bogen durch die Mitte H des Bogens KG zwischen den darauf senkrechten Bogen AK und FG. Jedoch dieses letztere Dreieck verwandelt sich in den Ausschnitt $AHFCA$, da ja gleichzeitig der Winkel [69 bei C gleich π wird. In diesem Ausschnitte ist die Summe der beiden Winkel $S - \pi$, folglich muss die Grösse des Dreiecks ABC gleich $\frac{1}{2}(S - \pi)$ sein.

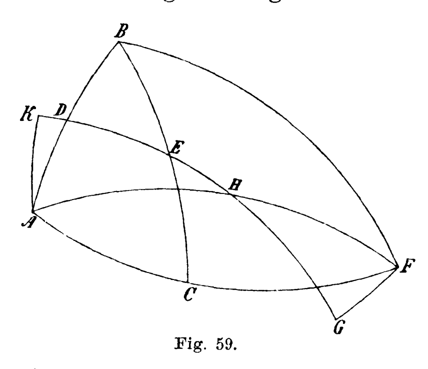


Fig. 59.

In dem Dreiecke sei die Summe aller Winkel wieder gleich S, jedoch wollen wir darin eine Seite grösser als den halben Kreis annehmen. Indem wir diese Seite durch ihre Ergänzung zum Vollkreise ersetzen, bilden wir mit den beiden andern ein neues Dreieck; in diesem ist daher die Summe der drei Winkel $4\pi - S$ und die Grösse des Flächeninhalts, nämlich $\frac{1}{2}(3\pi - S)$, muss zusammen mit der Grösse des Flächeninhaltes in dem früheren Dreiecke π ausmachen. Hieraus finden wir den Flächeninhalt des gegebenen Dreiecks wieder gleich $\frac{1}{2}(S - \pi)$.

Man beweist diesen Satz gewöhnlich anders. Wir nennen [277 A, B, C die Winkel des sphärischen Dreiecks ABC (Fig. 60), verlängern in diesem die Seite AB, bis ein voller Kreis entsteht, und sodann auch die beiden andern Seiten über ihren gemeinsamen Punkt C hinaus, bis sie mit diesem Kreise zusammentreffen. Ausser dem gegebenen Dreiecke, das wir mit L bezeichnen werden, entstehen auf diese Weise noch drei M, N, P, so dass die Summe aller: $L + M + N + P = \pi$ ist. Indessen ist: $L + P = C$, $L + M = A$, $L + N = B$, demnach: $L = \frac{1}{2}(A + B + C - \pi)$.

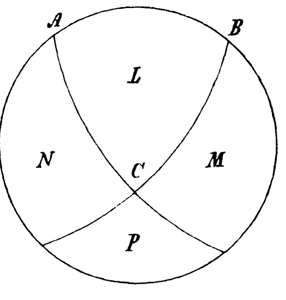


Fig. 60.

Der Mangel dieses Beweises liegt darin, dass man die Grösse der Dreiecke voraussetzen muss, während man das Verfahren zur Messung unbestimmt lässt, und überdies müsste in der Gleichung: $P + L = C$ [70 an Stelle von P eigentlich das zugehörige symmetrische Dreieck stehen.

Aus unserm Satze folgt nunmehr ganz von selbst, dass bei symmetrischen Dreiecken die Flächeninhalte gleich sind. Uebrigens kann man zu diesem Schlusse auf einem andern Wege gelangen, ohne die eigentliche Grösse der Dreiecke in Betracht zu ziehen.

Die Bogen $A'D$, $B'D$, $C'D$, die in dem sphärischen Dreiecke ABC (Fig. 61) senkrecht zu den Seiten von deren Mitten A', B', C' ausgehen, treffen einander in einem gemeinsamen Punkte D in gleichen Abständen AD, BD, CD von den Ecken. In der That, wenn wir anstatt des Dreiecks BDA' das dazu symmetrische nehmen und dessen Seite BA' vom Punkte A' aus auf $A'C$ legen, so bewirkt der in beiden Dreiecken an DA' anliegende rechte Winkel, dass sich BD mit CD deckt. Auf ähnliche Weise können wir zeigen, dass $BD = AD$ ist, wenn die beiden Lothe $A'D$ und $C'D$ einander in D schneiden. Nach demselben Punkte hin muss auch das Loth $B'D$ gehen (§ 65). So zerfällt das gegebene Dreieck ABC in die gleichschenkligen ADB, BDC, CDA, denen im symmetrischen dieselben entsprechen

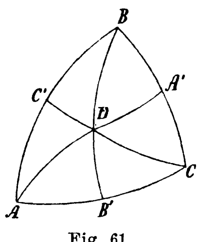


Fig. 61.

Der Beweis ändert sich auch in dem Falle nicht, wenn der Punkt D ausserhalb des Dreiecks liegt, nur ist jedoch zur Zusammensetzung des Dreiecks erforderlich, dass man entweder das eine gleichschenklige Dreieck von der Summe der beiden andern abzieht, oder umgekehrt die Summe zweier von dem dritten.

§ 69. [71

Ein sphärisches Vieleck können wir aus Dreiecken zusammensetzen, indem wir von einem beliebig angenommenen Punkte der Kugelfläche aus nach allen Ecken Bogen ziehen. Nach dieser Bemerkung ist leicht zu sehen, dass die Grösse des Vielecks von der Summe seiner Winkel abhängt.

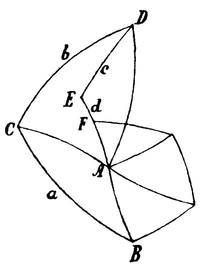


Fig. 62.

Von dem irgendwo im Innern des Vielecks angenommenen Punkte A aus (Fig. 62) ziehen wir die Bogen AB, AC, AD, AE nach den Endpunkten der Seiten a, b, c des Vielecks. Es kann vorkommen, dass ein neu gezogener Bogen, zum Beispiel AD, zu dem früheren Dreiecke ABC ein andres ACD hinzufügt. Das wird eintreten, wenn mit dem neuen

Bogen AD der Winkel um A herum durch Hinzufügung von DAC wächst. Es kann ferner vorkommen, dass ein neu gezogener Bogen, zum Beispiel AE, von dem früheren Flächeninhalte das Dreieck [278 AED wegnimmt. Das wird damit zusammentreffen, dass DAE von dem Winkel um A herum abgezogen wird. Endlich deckt sich zuweilen der nach einer neuen Ecke gezogene Bogen mit dem vorherigen, wie zum Beispiel AE mit AF, dann kommt weder zu dem Flächeninhalte des Vielecks noch zu dem Winkel um A herum etwas hinzu.

Es sei jetzt n die Zahl der Seiten des Vielecks, dessen sämmtliche Winkel S zur Summe haben mögen; m sei die Zahl der Dreiecke, die addirt werden und M die Summe der in ihnen enthaltenen Winkel; p sei die Zahl der abgezogenen Dreiecke und P die Summe der zugehörigen Winkel; folglich ist $n - m - p$ die Zahl der Seiten, die mit den von A aus nach den Ecken gezogenen Bogen zusammenfallen. Der Flächeninhalt aller Dreiecke, die addirt werden, muss $\frac{1}{2}(M - m\pi)$ sein, ebenso wird auch der Flächeninhalt der abge- [72 zogenen $\frac{1}{2}(P - p\pi)$ sein, demnach finden wir die Grösse des ganzen Vielecks:

$$\tfrac{1}{2}(M - P) - \tfrac{1}{2}(m - p)\pi.$$

Indessen, wenn der Winkel um A herum wächst, so kommen zu den Winkeln des Vielecks gewisse Dreieckswinkel hinzu, was bei allen diesen Dreiecken M ausmacht. Ferner werden, sobald der Winkel um A herum abnimmt, von den Winkeln des Vielecks gewisse Dreieckswinkel abgezogen, aber so, dass jedesmal 2π hinzugefügt wird, folglich geht in den Bestand der ganzen Summe $2\pi p - P$ ein. Endlich wird jedesmal, wenn der nach einer Ecke gezogene Bogen mit einer Seite zusammenfällt, zu den Winkeln des Vielecks π hinzugefügt, im Ganzen also $(n - m - p)\pi$, und ausserdem muss man den Winkel 2π um A herum abziehen, der nicht zu den Winkeln des Vielecks gehört; in diesem muss daher die Summe aller Winkel sein:

$$\begin{aligned} S &= M + 2p\pi - P + (n - m - p)\pi - 2\pi \\ &= M - P + (n - m + p - 2)\pi. \end{aligned}$$

Entnehmen wir hieraus den Werth von $M - P$, so erhalten wir die Grösse des sphärischen Vielecks gleich:

$$\tfrac{1}{2}\{S - (n - 2)\pi\}. \qquad [73$$

Dasselbe hätten wir gefunden, wenn wir den Punkt A ausserhalb des Vielecks angenommen hätten oder auf einer Seite zwischen zwei Ecken oder in einer Ecke selbst. Im zweiten dieser beiden Fälle muss man die Zahl der Dreiecke um eins kleiner annehmen, indem man bei den Dreiecken von der Gesammtsumme der Winkel den Winkel π

abzieht, der beim Punkte A auftritt, aber dem Vielecke nicht angehört. In den beiden andern Fällen ist es nicht erforderlich, die Gesammtsumme der Winkel in den Dreiecken zu ändern, aber wenn der Punkt ausserhalb des Vielecks angenommen ist, so darf man beim letzten Dreiecke nicht 2π zu den Winkeln hinzufügen, weil hier zwar der Winkel um A herum abnimmt, aber das Dreieck ganz ausserhalb des Vielecks liegt. Wenn dagegen der Punkt A in einer Ecke selbst angenommen ist, so muss man die Zahl der Dreiecke um zwei kleiner ansetzen.

Daher kann ein körperlicher Winkel nicht entstehen, [279 falls die Zahl n der Ebenenwinkel und die Summe S aller dieser Winkel so beschaffen sind, dass $S-(n-2)\pi$ keine positive Zahl wird.

Das bis jetzt Gesagte bezieht sich auf Vielecke mit einer einzigen Begränzung. Ist die Begränzung zweifach, so verbinden wir die äussere mit der inneren durch eine Linie und dürfen dann die Begränzung als eine einzige betrachten, indem wir die Verbindungslinie als Seite benutzen, auf der wir von der einen Begränzung zur andern über- [74 gehen und sodann wieder zur ersten zurückkehren müssen. Daher verwandelt sich jetzt in dem allgemeinen Ausdrucke für den Flächeninhalt die Zahl n in $n+2$.

Zu demselben Schlusse gelangen wir, wenn wir das gegebene Vieleck als die Differenz zweier betrachten. Es sei n' die Seitenzahl der äusseren Begränzung, n'' die der innern; S' sei die Winkelsumme in dem grösseren, S'' die in dem kleineren Vielecke, folglich:

$$n=n'+n'', \quad S=S'+2n''\pi-S''.$$

Der Flächeninhalt des grösseren Vielecks ist:

$$\tfrac{1}{2}\{S'-(n'-2)\pi\},$$

der des kleineren:

$$\tfrac{1}{2}\{S''-(n''-2)\pi\}.$$

Der Unterschied beider giebt den Flächeninhalt des Vielecks mit zweifacher Begränzung:

$$\tfrac{1}{2}\{S-n\pi\}.$$

Da wir hier von der Zerlegung sphärischer Vielecke in Dreiecke reden, so ist es angebracht, zu bemerken, dass die Zerlegung gerad- [75 liniger Vielecke genau so geschieht. Es können sogar sowohl die einen als die andern in Dreiecke zerlegt werden, die alle addirt werden.

Die Seite a eines beliebig angenommenen Winkels drehen wir, nachdem wir sie wenn nöthig verlängert haben, nach der nächsten b hin soweit, bis wir irgendwo in der Entfernung c von dem gemein-

samen Punkte der Linien a und b eine Ecke treffen. Es kann vorkommen, dass der Endpunkt der Seite b zugleich eben die Ecke ist, die wir bei der Drehung der Linie a zuerst treffen, dann ist also c dasselbe wie b. Jetzt schneidet eine dritte Linie, die die Endpunkte der beiden Linien a und c verbindet, ein Dreieck ab, innerhalb dessen keine andern Ecken und Seiten des Vielecks liegen. Sollten a und b der einen Begränzung angehören, während die Linie c mit der andern Begränzung des Vielecks zusammentrifft, so brauchen wir nach Wegnahme des Dreiecks keinen Unterschied mehr zwischen den beiden Begränzungen zu machen und diese vereinigen sich solchergestalt [280 zu einer einzigen. Wir wollen noch bemerken, dass die Linie c ein Vieleck mit einer Begränzung stets in zwei zerlegt, deren jedes nunmehr weniger Seiten enthält als das gegebene. Fahren wir daher in dieser Weise fort, so können wir schliesslich das ganze Vieleck in Dreiecke zerlegen. Setzen wir deren Zahl gleich m und die Seitenzahl des Vielecks gleich n, so sind in der Zahl $3m$ aller Dreiecksseiten nothwendig die n Seiten des Vielecks enthalten, deren jede nur in einem Dreiecke auftritt, während die übrigen $3m - n$ je zweien gemeinsam sind. Nun aber wird das Vieleck mit nur einer Begränzung in m derartige Dreiecke zerlegt, die $m - 1$ Seiten gemeinsam haben [76 müssen. Demnach ist

$$\tfrac{1}{2}(3m - n) = m - 1,$$

woraus sich $m = n - 2$ ergiebt als die kleinste Zahl von Dreiecken, in die ein Vieleck mit n Seiten zerlegt werden kann. Dagegen müssen bei dem Vielecke mit zweifacher Begränzung m von dessen Dreiecken m gemeinsame Seiten haben, folglich ist hier: $3m - n = 2m$, woraus $m = n$ folgt. Die Winkel aller dieser Dreiecke setzen sich in dem einen und in dem andern Falle zu den Winkeln des Vielecks selbst zusammen und da beim sphärischen Dreiecke die doppelte Oberfläche gleich der um π verminderten Winkelsumme ist, so muss bei einem sphärischen Vielecke mit n Seiten in einer einzigen Begränzung die doppelte Oberfläche gleich der um $(n - 2)\pi$ verminderten Summe aller Winkel sein, wie schon vorhin gezeigt worden ist.

§ 70.

Die Seitenflächen eines regelmässigen körperlichen Winkels schneiden eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt der Scheitel des Winkels ist, in einem regelmässigen Vielecke (§ 67). Axe dieses Winkels ist die vom Scheitel aus durch den Mittelpunkt des regelmässigen Vielecks gezogene Gerade. Regelmässiger Körper heisst ein solcher, den kongruente regelmässige Vielecke begränzen, indem jedesmal gleich

viele von ihnen sich derart zusammenschliessen, dass sie regelmässige körperliche Winkel bilden. Der Mittelpunkt eines derartigen Körpers steht von allen Ecken gleich weit ab und liegt in dem Schnitt- [77 punkte sowohl der Axen als der Senkrechten, die auf den Flächen in deren Mittelpunkten errichtet werden.

Wir denken uns zwei benachbarte Flächen A und B und ziehen durch deren Mittelpunkte die geraden Linien p und q senkrecht zu den Ebenen der Flächen, sowie a und b senkrecht zu der gemeinsamen Kante c nach deren Mitte (§ 52). Die Ebene, in der a und b liegen, steht auf c senkrecht (§ 56) und ebenso auf den Flächen A und B (§ 59); sie muss auch die auf diesen Flächen in deren Mittelpunkten errichteten Senkrechten p und q enthalten (§ 59) und schneidet daher die Oberfläche des Körpers in einem Vielecke, indem sie entweder stets Kanten der Flächen senkrecht in den Kantenmitten trifft oder abwechselnd durch die Ecke einer Fläche und dann wieder senkrecht durch eine Kantenmitte geht. Der erste Fall tritt dann ein, wenn die Seitenzahl der Flächen gerade ist, der zweite dann, wenn sie un- [281 gerade ist. Im ersten Falle trifft die Ebene durch die Senkrechten p und q, indem sie der Richtung der Linien a, b folgt, die Seiten der Flächen jedesmal in gleicher Weise und schneidet somit die Oberfläche des Körpers in einem regelmässigen Vielecke, nach dessen Mittelpunkte die Geraden p und q zusammenlaufen müssen (§ 67). Ist dagegen die Seitenzahl der Flächen ungerade, so geht die Ebene in der Richtung der Linien a, b zuerst durch je eine Ecke der beiden Flächen A und B, also durch die Scheitel der zugehörigen beiden regelmässigen körperlichen Winkel und durch die zugehörigen Axen, deren Spuren auf den Flächen hier die Winkel halbiren und somit, weil sie sich nach dem jeweiligen Mittelpunkte hin erstrecken, die Verlängerungen der Linien a, b sind. Die Ebene geht ferner, sobald sie in die benachbarte Fläche eintritt, wieder durch deren Mittelpunkt und dann von Neuem senkrecht durch eine Kantenmitte. So entsteht durch den Schnitt [78 zwischen der Ebene und der Oberfläche des Körpers ein Vieleck, in dem alle Seiten gleich sind und abwechselnd unter zwei verschiedenen Winkeln zusammenstossen. Nun theilt eine Gerade, die irgend einen dieser Winkel halbirt, jedesmal zugleich das Vieleck in zwei kongruente Theile, demnach müssen diese Geraden nothwendig in einem gemeinsamen Punkte zusammentreffen, wovon man sich leicht überzeugen kann, indem man das Vieleck mit den Schenkeln gleicher Winkel auf sich selbst legt.

Nachdem wir das gezeigt haben, betrachten wir in dem Vielecke drei auf einander folgende Seiten α, β, γ (Fig. 63). Auf diesen müssen

die Mittelpunkte der Flächen in gleichen Abständen von den Ecken liegen, wie wir vorhin gesehen haben. In diesen Mittelpunkten errichten wir innerhalb der Ebene des Vielecks auf den Seiten α, β, γ Senkrechte. Die auf α und β errichteten seien dieselben, die wir bisher p und q genannt haben, und die Senkrechte zu der dritten γ werden wir r nennen. Mit n und m wollen wir die Geraden bezeichnen, die die Winkel zwischen α und β und zwischen β und γ halbiren. Die Senkrechte q geht daher von der Seite β eines Dreiecks aus, dessen beide andre Seiten n und m sind. Wenn q mit m zusammentrifft, so trifft die Senkrechte r in demselben Punkte damit zusammen, weil die auf β und γ liegenden Flächenmittelpunkte von dem β und γ gemeinsamen Punkte gleich weit abstehen. Wenn dagegen q mit n zusammentrifft, so trifft p in demselben Punkte damit zusammen, weil die auf α und β liegenden Flächenmittelpunkte von dem α und β gemeinsamen Punkte gleich weit abstehen. Bis jetzt ist also sicher, dass wir zwei benachbarte Flächen finden können, bei denen die im Mittelpunkte errichteten [79 Senkrechten einander schneiden.

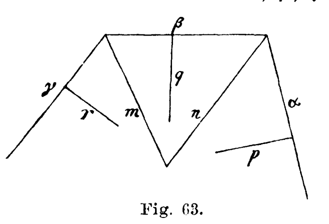


Fig. 63.

Wie beschaffen nun auch die beiden benachbarten Flächen seien, mögen sie eine Seite oder nur einen Punkt gemein haben, sie gehören immer einem körperlichen Winkel an und die auf ihnen errichteten Senkrechten, von denen jede mit der Axe dieses Winkels in einer Ebene liegt, können einander nur auf dieser Axe schneiden. Da aber eine Fläche eine andre ohne Unterschied ersetzt, während zugleich die auf der einen errichtete Senkrechte die Stelle der Senkrechten auf der andern einnimmt, so müssen die auf den Flächen dieses körperlichen Winkels errichteten Senkrechten überhaupt alle nach einem Punkte zusammenlaufen. Indem wir zwei Flächen mit einer gemeinsamen Seite beibehalten, können wir zu einem andern körperlichen Winkel übergehen und so fortfahren bis zum letzten. Wir schliessen hieraus, dass alle in den Mitten der Seitenflächen auf diesen errichteten [282 Senkrechten in einem Punkte zusammenkommen, der auch ein gemeinsamer Punkt der Axen ist und sowohl von allen Flächen als auch von allen Ecken des Körpers gleich weit absteht.

§ 71.

Den körperlichen Winkel, der am Mittelpunkte von den durch die Seiten der Flächen gehenden Ebenen gebildet wird, werden wir den Centriwinkel im Innern des regelmässigen Körpers nennen.

Dieser Winkel muss daher immer ein genauer Theil von 2π sein. Es sei n die Zahl der Flächen, jede mit m Seiten, r sei die Zahl, die angiebt, wie viele Flächen sich jedesmal auf der Oberfläche des regelmässigen Körpers zu einem körperlichen Winkel zusammenschliessen. Den Werth des körperlichen Winkels am Mittelpunkte finden wir aus den zugehörigen Ebenenwinkeln (§ 69) und auf diese Weise erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2}\left\{m\frac{2\pi}{r} - (m-2)\pi\right\},$$ [80

die ergiebt:

$$n = \frac{4r}{4-(m-2)(r-2)}. \tag{4}$$

Hier kann sowohl die Zahl m der Seiten einer Fläche, als die Zahl r, die angiebt, wie viele Flächen sich jedesmal zusammenschliessen, nicht kleiner als 3 sein. Andrerseits darf n nicht negativ oder unendlich gross sein, folglich kann weder m noch r grösser als 5 angenommen werden. Prüfen wir hiernach die ganzen Zahlen m und r innerhalb dieser Gränzen, so finden wir alle Fälle:

$m = 3$, $r = 3$, $n = 4$, der Körper heisst Vierflach (Tetraeder)
$m = 3$, $r = 4$, $n = 8$, „ „ „ Achtflach (Oktaeder)
$m = 3$, $r = 5$, $n = 20$, „ „ „ Zwanzigflach (Ikosaeder)
$m = 4$, $r = 3$, $n = 6$, „ „ „ Sechsflach (Hexaeder)
$m = 5$, $r = 3$, $n = 12$, „ „ „ Zwölfflach (Dodekaeder).

Demnach beträgt die Zahl der regelmässigen Körper nicht mehr als fünf, während die Zahl der regelmässigen Vielecke unendlich gross ist. Bei den letzteren ist die Zahl der Seiten ebenso gross wie die der Winkel, während bei den regelmässigen Körpern, abgesehen [81 vom Vierflach, die Zahl der Flächen von der Zahl der körperlichen Winkel verschieden ist. Es sei t die Zahl dieser Winkel, dann muss die Zahl nm aller Ebenenwinkel in den körperlichen Winkeln am Mittelpunkte nothwendig ebenso gross sein wie die Zahl tr der Winkel um die Axen herum. Auf diese Weise finden wir:

$$t = \frac{4m}{4-(m-2)(r-2)},$$

woraus sich als Zahl aller Ecken ergiebt: [283

beim Tetraeder . . . 4
„ Hexaeder . . . 8
„ Oktaeder . . . 6
„ Dodekaeder . . . 20
„ Ikosaeder . . . 12.

§ 72.

Nehmen wir überhaupt einen Körper an, bei dem die Zahl der Flächen n ist, die der körperlichen Winkel t und die aller Kanten p. Es möge sich im Innern ein Punkt ermitteln lassen, nach dem man Ebenen durch die Seiten der Flächen legen kann, die die Oberfläche des Körpers nicht zwei Male schneiden und also auf diese Weise von jeder Fläche aus um den gemeinsamen Punkt herum körperliche Winkel bilden, deren Summe folglich im Ganzen 2π beträgt. Wir nennen α die Zahl der Flächen mit a Seiten, β die Zahl der mit b, γ die Zahl der mit c Seiten und so fort. Alsdann ist:

$$n = \alpha + \beta + \gamma + \cdots$$ [82

$$2p = \alpha a + \beta b + \gamma c + \cdots.$$

Indem wir bemerken, dass die Summe aller Ebenenwinkel um die Ecken des Körpers herum gleich $2\pi t$ ist, finden wir einen andern Ausdruck für die Summe der körperlichen Winkel um den gemeinsamen Punkt im Innern des Körpers (§ 69). Wir erhalten so die Gleichung:

$$4\pi = 2\pi t - \alpha(a-2)\pi - \beta(b-2)\pi - \gamma(c-2)\pi - \cdots.$$

Hieraus schliessen wir mit Hülfe der Werthe von n und p:

$$p = n + t - 2. \tag{5}$$

Die regelmässigen Körper gehören zu dem Falle, den wir hier betrachtet haben. Bei ihnen wissen wir bereits, wie gross die Zahl der Flächen und der körperlichen Winkel sein kann. Demnach finden wir die Zahl der Kanten:

beim Tetraeder . . . 6
„ Hexaeder . . . 12
„ Oktaeder . . . 12
„ Dodekaeder . . . 30
„ Ikosaeder . . . 30.

Die Abhängigkeit zwischen der Zahl der Flächen und der [83 Zahl der Kanten und der körperlichen Winkel eines Körpers hat zuerst Euler in den Schriften der St. Petersburger Akademie von 1758 bekannt gemacht; dann hat Legendre einen andern Beweis ge- [284 geben (Éléments de Géometrie), endlich auch Herr Cauchy (Journal de l'École Polytechnique, Tome IX, p. 76). Jedoch darf man diesen Satz nicht in voller Allgemeinheit annehmen. Zum Beispiel bilden Körper, bei denen Flächen mit zweifacher Begränzung vorkommen, eine Ausnahme. Wenn die Oberfläche des Körpers aus den sechs

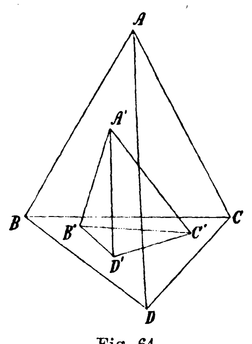


Fig. 64.

vollständigen Dreiecken: ABC, ABD, ACD, $A'B'C'$, $A'B'D'$, $A'C'D'$ besteht (Fig. 64) und aus einem unvollständigen BCD, wo das ausgeschnittene Dreieck $B'C'D'$ die innere Begränzung bestimmt, so erfüllen hier die Zahlen: $p = 12$, $n = 7$, $t = 8$ die Gleichung (5) nicht.

§ 73.

Um bei jedem Körper zu finden, wie die Zahl der Kanten durch die Zahl der Flächen und der körperlichen Winkel bestimmt wird, müssen wir ein Vieleck aus Dreiecken zusammensetzen können und ein Vielflach aus Tetraedern. So können wir für Körper, bei denen jede Fläche nur eine Begränzung hat, unmittelbar zur Gleichung (5) gelangen und dann bei regelmässigen Körpern sogar zur Gleichung (4).

Ein geradliniges Vieleck wird in Dreiecke zerlegt, die um einen Punkt derselben Ebene herum liegen und theils addirt, theils abgezogen werden, in der Weise, wie wir die Vielecke auf der Kugelfläche haben zusammensetzen sehen (§ 69), und zwar kann das Vieleck eines mit blos einer äusseren Begränzung sein oder eines, das auch noch eine innere Begränzung hat. Wir brauchen nur jedesmal die letztere [*84* mit der äusseren zu verbinden und die Verbindungsgeraden als zusammenfallende Seiten desselben Vielecks zu betrachten (§ 69).

Ebenso wie man ein Vieleck in Dreiecke zerlegt, zerlegt man alle vielflächigen Körper in Tetraeder. Nehmen wir einen Körper mit nur einer äusseren Begränzung, die in Dreiecke zerlegt sei. Wir legen durch deren Seiten Ebenen nach einem, irgendwo angenommenen Punkte und bilden so um diesen Punkt herum körperliche Winkel und mit den Dreiecken auf der Oberfläche Tetraeder, die zusammengefügt ebenfalls den Körper erzeugen, gerade so wie die Dreiecke dessen Oberfläche liefern. Hat man eine Fläche durch lauter von einem Punkte derselben Ebene nach den Ecken gezogenen Gerade in Dreiecke zerlegt, so werden die Tetraeder gleichzeitig mit den Dreiecken durch Addition und Subtraktion zusammengefügt, so dass jedesmal, wenn der geradlinige Winkel um jenen Punkt der Ebene herum wächst, auch der Ebenenwinkel um die Gerade herum zunimmt, die den gemeinsamen Punkt der Dreiecke mit dem gemeinsamen Punkte der Tetraeder verbindet. Wie daher in der Ebene die Fläche aus den Dreiecken entsteht, so verbinden sich auch die Tetraeder zu einem Körper, den man P y r a m i d e nennt und bei dem sich gewisse Dreiecke, die S e i t e n, in einem Punkte, der S p i t z e, zusammenschliessen,

während sie ausserdem alle an die übrig bleibende Fläche, die Grundfläche, anstossen. Das Tetraeder selbst gehört zu den Pyramiden und heisst dreiseitig, während die übrigen Pyramiden nach der Zahl [85 ihrer Seiten: vierseitig, fünfseitig sind und so weiter.

Sind nunmehr die Pyramiden gebildet, so folgt ihre Zu- [285 sammenfügung, die den gegebenen Körper erzeugen muss. Es ist klar, dass die Pyramiden hier zu addiren oder zu subtrahiren sind, jenachdem die körperlichen Winkel an der Spitze wachsen oder abnehmen. Hieraus schliessen wir: Ein Körper mit ebenen Seitenflächen entsteht durch Zusammenfügung dreiseitiger Pyramiden, die um ihre gemeinsame Spitze herum liegen, und zwar entsteht er in der Weise, dass jede zur Figur der früheren Pyramiden neu hinzugefügte Pyramide eine, zwei oder drei Seiten dieser Pyramiden bedeckt, während sich ihre Grundfläche an eine Ebene anlegt, auf der ihr Dreieck mit einer, mit zwei oder mit allen Seiten an die Figur der vorhergehenden anstösst.

Wir können sogar das Vielflach in lauter solche Pyramiden zerlegen, die addirt werden, ähnlich wie es sich bei der Zerlegung eines Vielecks im Dreiecke verhält (§ 69). Indem wir nämlich mit irgend einem ebenen Winkel beginnen, müssen wir dessen eine Fläche nach der andern hin drehen, bis wir eine Ecke treffen; diese wählen wir zur Spitze und die Fläche selbst in ihrer früheren Lage zur Grundfläche und sondern auf diese Weise bereits eine Pyramide ab. Indem wir so fortfahren, zerlegen wir zuletzt überhaupt den ganzen Körper in Pyramiden, die, wenn ihre Grundflächen in Dreiecke zerlegt werden, zugleich selbst noch in dreiseitige zerfallen.

Wir bezeichnen die Zahl der Flächen mit n, die der Kanten mit p und die der körperlichen Winkel mit t, indem wir hier unter den Flächen alle Dreiecke auf der Oberfläche des Körpers verstehen, [86 keines ausgenommen, unter den Kanten alle Seiten dieser Dreiecke und unter den körperlichen Winkeln alle die, die durch Zusammenfügung von Dreiecken um einen Punkt herum entstehen. Ferner lassen wir in jedem einzelnen Falle nur dann eine Verminderung der Zahlen n, p, t zu, wenn sie eine nothwendige Folge davon ist, dass Seiten einer Pyramide bedeckt werden.

Wenn wir jetzt eine neue Pyramide mit einer ihrer Seiten hinzufügen, so wächst die Zahl n der Flächen um zwei, die Zahl t der körperlichen Winkel um Eins, die Zahl p der Kanten um drei, folglich bleibt $p - n - t$ dasselbe. Wenn wir die Pyramide mit zweien ihrer Seiten zugleich hinzufügen, so ändern sich n, t und p nicht. Wenn wir endlich die Pyramide mit allen ihren drei Seiten hinzufügen,

so verwandeln sich n, t, p in $n-2$, $t-1$, $p-3$, so dass $p-n-t$ wieder die alte Zahl ist. Da diese Differenz $p-n-t$ bei Hinzufügung einer Pyramide konstant bleibt, darf sie sich infolgedessen auch bei Wegnahme von Pyramiden nicht ändern. Beim Tetraeder finden wir diese Differenz gleich -2, demnach müssen wir nunmehr überhaupt bei allen Körpern mit dreieckigen Flächen $p-n-t=-2$ annehmen.

Es bleibt noch die Zusammenfügung mehrerer Dreiecke zu einer Fläche zu betrachten. Wenn die beiden Dreiecke einer Ebene angehören, so gehen die Zahlen n und p in $n-1$ und $p-1$ über, während sich die Zahl t nicht ändert. Ueberhaupt bleibt die Zahl t der körperlichen Winkel immer ungeändert, wenn mehrere benachbarte Dreiecke in einer Ebene vorkommen, während n und p um gleichviel abnehmen. Wenn dagegen m Dreiecke um einen Punkt herum zusammen eine [87 Fläche bilden, so verwandeln sich die Zahlen: n, t, p in: $n-m+1$, $t-1$, $p-m$. Wenn endlich m Dreiecke auf einer Ebene ein [286 Vieleck mit zweifacher Begränzung bilden, so verwandeln sich die Zahlen n, t, p diesmal in: $n-m+1$, t, $p-m$.

Daher ist die Gleichung (5) für jeden Körper richtig, sobald dieser keine Fläche mit zweifacher Begränzung enthält, oder wenn er nicht aus zwei Körpern besteht, die einander nur in Ecken und Kanten berühren.

Fügen wir zu der Gleichung (5) die andre (§ 71):

$$nm = tr$$

hinzu und bemerken wir überdies, dass bei einem regelmässigen Körper $2p = nm$ ist, so finden wir leicht die Gleichung (4) wieder.

§ 74.

Die Summe zweier Winkel eines sphärischen Dreiecks ist stets zugleich mit der Summe der beiden gegenüberliegenden Seiten: $>\pi$, $=\pi$, $<\pi$.

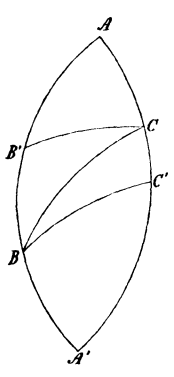


Fig. 65.

In dem Dreiecke ABC (Fig. 65) sei die Seitensumme: $AB + AC = \pi$. Wir verlängern die Seiten über die beiden Punkte B und C hinaus, bis sie von Neuem in A' zusammentreffen. Auf diese Weise entsteht ein andres Dreieck $A'BC$, dessen Seiten denen des früheren gleich sind, nämlich die Seite BC ist beiden gemeinsam, und ferner ist $A'B = AC$, [88 $A'C = AB$ (§ 33). Die Dreiecke ABC und $A'BC$ sind kongruent, wovon wir uns überzeugen können, indem wir das eine mit den gleichen Winkeln an den Punkten A und A' auf das andre legen. Hieraus

folgt, dass die beiden Winkel ACB und $A'BC$ gleich sind, und sodann:

$$\angle ACB + \angle ABC = \angle A'BC + \angle ABC = \pi.$$

Statt des Punktes B nehmen wir einen andern B' auf derselben Seite AB, aber näher an A. So entsteht ein Dreieck $AB'C$, in dem $AC + AB' < \pi$ ist, und man findet die Winkelsumme:

$$ACB' + AB'C = ACB - BCB' + \pi - BB'C$$
$$= 2\pi - ABC - BCB' - BB'C < \pi \quad (\S\ 68).$$

Auf dem Bogen ACA' nehmen wir einen Punkt C', näher an A', als C es ist. So entsteht ein Dreieck ABC', in dem die Seitensumme $AB + AC' > \pi$ ist. Die Summe der gegenüberliegenden Winkel ist:

$$AC'B + ABC' = AC'B + ABC + CBC'$$
$$= AC'B + BCC' + CBC' > \pi \quad (\S\ 68).$$

Hieraus folgt:

Im sphärischen Dreiecke ist der durch Verlängerung einer Seite entstehende Aussenwinkel grösser als ein innerer [der nicht sein Nebenwinkel ist] oder gleich diesem oder kleiner, jenachdem die Summe der beiden ihnen nicht gemeinsamen Seiten $< \pi$, $= \pi$, $> \pi$ ist.

In dem Dreiecke ABC (Fig. 66) sei BD die Verlängerung der Seite BC über den Punkt B hinaus. So entsteht der Winkel

$ABD > ACB$, wenn $AB + AC < \pi$;
$ABD = ACB$, wenn $AB + AC = \pi$;
$ABD < ACB$, wenn $AB + AC > \pi$.

Auch ist

$ABD > BAC$, wenn $AC + BC < \pi$, [89
$ABD = BAC$, wenn $AC + BC = \pi$,
$ABD < BAC$, wenn $AC + BC > \pi$.

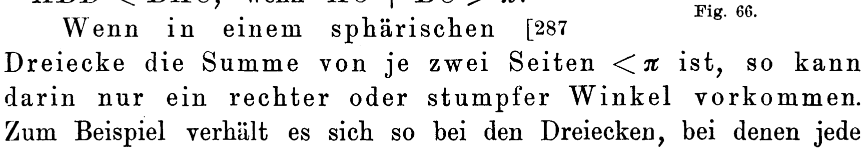


Fig. 66.

Wenn in einem sphärischen [287 Dreiecke die Summe von je zwei Seiten $< \pi$ ist, so kann darin nur ein rechter oder stumpfer Winkel vorkommen. Zum Beispiel verhält es sich so bei den Dreiecken, bei denen jede Seite kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ ist.

§ 75.

Wenn in einem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke eine Kathete $< \pi$ ist, so ist die andre zugleich mit dem gegenüberliegenden Winkel $> \frac{1}{2}\pi$, $= \frac{1}{2}\pi$, $< \frac{1}{2}\pi$.

Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 67) die Seite $AB < \pi$ und die an ihr liegenden Winkel CAB und CBA Rechte, folglich die

beiden andern Seiten: $AC = \frac{1}{2}\pi$, $BC = \frac{1}{2}\pi$ (§ 59). Wird der Bogen AC nach AB hin gedreht, so kann er, solange er von demselben Punkte A ausgeht, die Seite AB nicht schneiden, ohne vorher den Bogen BC irgendwo in C' zu treffen. Wird er nach der andern Seite gedreht, so schneidet er die Verlängerung des Bogens BC irgendwo in C'', bevor er die Verlängerung des Bogens AB erreicht. Daher ist in dem Dreiecke ABC' die Seite BC' zugleich mit dem gegenüberliegenden Winkel $< \frac{1}{2}\pi$; in dem Dreiecke ABC ist die Seite $BC = \frac{1}{2}\pi$, während der gegenüberliegende Winkel $CAB = \frac{1}{2}\pi$ ist; in dem Dreiecke ABC'' ist die Seite $BC'' > \frac{1}{2}\pi$, während der gegenüberliegende Winkel $BAC'' > \frac{1}{2}\pi$ ist.

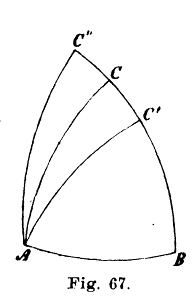


Fig. 67.

Hieraus folgt, dass ein Loth, das $< \frac{1}{2}\pi$ ist, auf die Seite [90] des spitzen Winkels fällt, ein Loth, das $> \frac{1}{2}\pi$ ist, in die Oeffnung des stumpfen.

§ 76.

Im sphärischen Dreiecke liegt der grösseren Seite der grössere oder der kleinere Winkel gegenüber, jenachdem die dritte Seite $< \pi$ oder $> \pi$ ist.

Wir nennen a, b, c die Seiten des Dreiecks (Fig. 68) gegenüber den Winkeln A, B, C und setzen: $c > a$, $b < \pi$ voraus. Wir verlängern b und c über die Ecken B und C hinaus, bis sie in dem Punkte A' zusammentreffen. So entsteht ein Dreieck $A'BC$, in dem die Summe zweier Seiten:

$$a + \pi - c < \pi$$

ist, folglich ist der Winkel: $BA'C = A < C$ (§ 74).

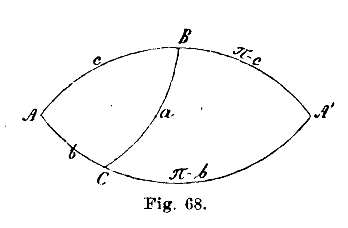


Fig. 68.

Wenn dagegen die Seite $b > \pi$ ist, so ersetzen wir sie durch ihre Ergänzung zu einem vollen Kreise und erhalten dadurch ein Dreieck, in dem den Seiten a und c die Winkel $\pi - A$ und $\pi - C$ gegenüberliegen und die dritte Seite: $2\pi - b < \pi$ ist, also ist: $\pi - C > \pi - A$, woraus: $A > C$ folgt.

Die Umkehrung dieses Satzes versteht sich hier bereits ganz von selbst. Im sphärischen Dreiecke liegt dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber, wenn überdies die dritte Seite $< \pi$ ist, erstens deshalb, weil Ungleichheit der Seiten mit Ungleichheit der Winkel verbunden sein muss (§ 64) und ferner deshalb, weil jede andre Annahme dem vorhin Bewiesenen widerspräche.

§ 77. [91

Im sphärischen Dreiecke ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte, wenn diese selbst kleiner als π ist.

In dem Dreiecke ABC (Fig. 69) nennen wir die den Ecken A, B, C gegenüberliegenden Seiten a, b, c und setzen überdies $b < \pi$ voraus, folglich auch den Winkel $B < \pi$ (§ 46). Wir verlängern a über C hinaus, bis die Verlängerung [288 CC' gleich b wird. So entsteht ein Dreieck ACC', in dem die den Seiten b gegenüberliegenden Winkel CAC' und $AC'C$ gleich sind (§ 64), folglich ist der Winkel $BAC' > BC'A$; sodann ist in dem Dreiecke ABC' die Seite $AC' < \pi$ (§ 46) und daher die Seite $BC' > AB$ (§ 76), oder $a + b > c$.

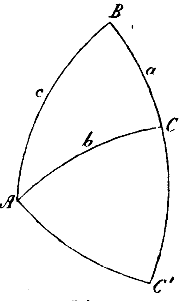


Fig. 69.

Da auf der Kugelfläche der Abstand zweier Punkte, die nicht in den Endpunkten desselben Durchmessers angenommen sind, kleiner ist als ein Halbkreis, so müssen wir, indem wir den Bogen immer durch zwei andre zwischen denselben Punkten ersetzen, schliessen, dass der Bogen eines grössten Kreises den kleinsten Abstand zwischen zwei Punkten einer Kugelfläche darstellt.

§ 78.

Eine auf einer Kugelfläche gezogene Senkrechte ergiebt, wenn sie kleiner ist als $\frac{1}{2}\pi$, den kürzesten Abstand eines Punktes von einem Kreise, so dass jeder andre Bogen zwischen dem Punkte und dem Kreise um so grösser ist, je näher er der gegenüberliegenden Senkrechten kommt, die den grössten Abstand von dem Kreise misst und immer $> \frac{1}{2}\pi$ ist.

Es sei ABC ein Halbkreis (Fig. 70), [92 auf dem noch ein andrer halber Kreis CDA senkrecht steht, so dass ein Theil DA von diesem $< \frac{1}{2}\pi$ ist, der andre $CD > \frac{1}{2}\pi$. Den Endpunkt der Senkrechten DA verbinden wir mit irgend einem Punkte B auf dem ersten Halbkreise durch den Bogen DB. So entsteht ein rechtwinkliges Dreieck DBA, in dem die Seite $BA < \pi$, $AD < \frac{1}{2}\pi$ ist, also der Winkel $DBA < \frac{1}{2}\pi$ (§ 75), folglich die Seite $DB > DA$ (§ 76). Wenn wir jetzt auf demselben Halbkreise ABC einen andern Punkt B' nehmen, der aber von A weiter entfernt ist als B, so ent-

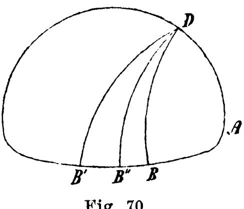


Fig. 70.

steht ein Dreieck BDB', in dem der Winkel $DBB' > \frac{1}{2}\pi$ und $DB'B < \frac{1}{2}\pi$ ist, folglich $B'D > BD$. Auf diese Weise wächst der Bogen BD, während er von A aus auf dem Kreise bis zum gegenüberliegenden Punkte C vorrückt, dessen Abstand CD von dem Punkte D am grössten ist und auf dem Kreise CBA senkrecht steht.

Dieser Satz ist unmittelbar in einem von denen enthalten, die früher (§ 66) bewiesen worden sind; hier aber können wir noch einen neuen hinzufügen:

Der kürzeste Abstand von einem Kreise ist zugleich der kleinste Winkel, den ein von einem gegebenen Punkte aus gezogener Bogen mit dem Kreise bildet.

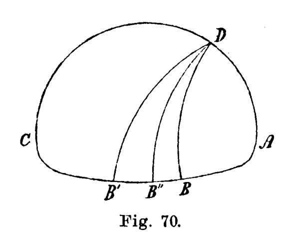


Fig. 70.

Es möge der auf DA senkrechte Bogen DB'' den Kreis ABC in dem Punkte B'' treffen; dann ist: $DB'' = \frac{1}{2}\pi$, $AB'' = \frac{1}{2}\pi$ und also der Winkel $DB''A$ gleich dem Bogen AD (§ 43). Jetzt ist in dem Dreiecke DBB'' die Seitensumme: $DB + DB'' < \pi$, folglich der Winkel $DBA > DB''A$ (§ 74). In dem [93 Dreiecke $DB''B'$ ist dagegen $DB' + DB'' > \pi$, folglich der Winkel $DB''A < DB'A$ (§ 74).

Hieraus folgt:

Wenn in einem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke die eine Kathete $< \frac{1}{2}\pi$ ist, so ist die andre stets gleichzeitig mit der Hypotenuse $< \frac{1}{2}\pi$, $= \frac{1}{2}\pi$, $> \frac{1}{2}\pi$. Wenn dagegen die eine Kathete $> \frac{1}{2}\pi$ ist, so ist die andre entweder kleiner als $\frac{1}{2}\pi$, wenn die Hypotenuse $> \frac{1}{2}\pi$ ist, oder gleich $\frac{1}{2}\pi$ zugleich mit der Hypotenuse, oder endlich grösser als $\frac{1}{2}\pi$, wenn die Hypotenuse $< \frac{1}{2}\pi$ ist.

In dem Dreiecke $DB'A$ ist die Kathete $DA < \frac{1}{2}\pi$, die andre $AB' > \frac{1}{2}\pi$, die Hypotenuse $DB' > \frac{1}{2}\pi$. In dem Dreiecke DCB' [289 ist die Kathete $DC > \frac{1}{2}\pi$, die andre $CB' < \frac{1}{2}\pi$, die Hypotenuse $DB' > \frac{1}{2}\pi$ und so fort.

§ 79.

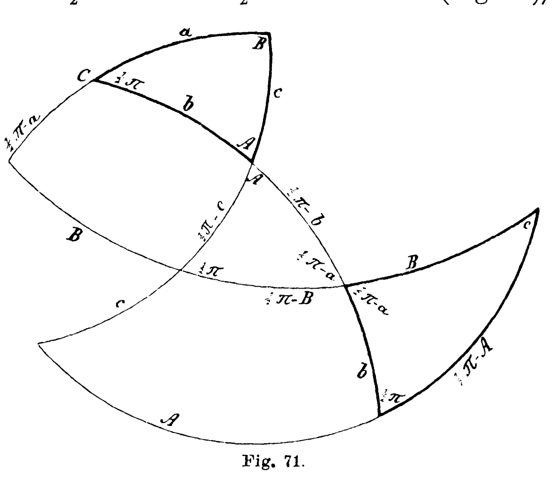
Wenn in einem sphärischen Dreiecke jede Seite kleiner ist als der halbe Kreis, so kann man ein Dreieck konstruiren, in dem die Seiten gleich sind den Ergänzungen der Winkel des gegebenen zu einem halben Kreise und umgekehrt die Winkel gleich sind den Ergänzungen der Seiten des gegebenen.

Der Satz besteht darin, dass, wenn $a < \pi$, $b < \pi$, $c < \pi$ die Seiten eines Dreiecks sind, A, B, C die ihnen gegenüberliegenden Winkel,

ein Dreieck konstruirt werden kann, in dem $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$ die Seiten und $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$ die gegenüberliegenden Winkel sind.

Wir wollen bemerken, dass wir, sobald ein Dreieck aus den Seiten A, B, $\pi - C$ mit den gegenüberliegenden Winkeln a, b, $\pi - c$ [94 konstruirt ist, nur noch die Seiten A und B über die Seite $\pi - c$ hinüber zu verlängern brauchen, bis sie mit einander zusammentreffen, um ein Dreieck mit den Seiten $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$ und den gegenüberliegenden Winkeln $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$ zu erhalten. Von diesem letzteren Dreiecke gelangen wir umgekehrt zu Dreiecken entweder mit den Seiten A, $\pi - B$, C und den gegenüberliegenden Winkeln a, $\pi - b$, c oder mit den Seiten $\pi - A$, B, C und den gegenüberliegenden Winkeln $\pi - a$, b, c.

Setzen wir zunächst $C = \frac{1}{2}\pi$, $a < \frac{1}{2}\pi$, $b < \frac{1}{2}\pi$ voraus, so dass also auch $c < \frac{1}{2}\pi$ ist (§ 78). Wir verlängern a und c über b hinüber, bis die Verlängerungen gleich $\frac{1}{2}\pi - a$ und $\frac{1}{2}\pi - c$ werden (Fig. 71), und verbinden deren Endpunkte durch den Bogen B. Jetzt verlängern wir die Bogen b und B über die Seite $\frac{1}{2}\pi - c$ hinüber, bis sie einander treffen. Hier entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\frac{1}{2}\pi - b$, den Katheten $\frac{1}{2}\pi - c$, $\frac{1}{2}\pi - B$ und den gegenüberliegenden Winkeln $\frac{1}{2}\pi - a$, A. In diesem Dreiecke verlängern wir die Seiten $\frac{1}{2}\pi - b$ und $\frac{1}{2}\pi - c$ über die Seite $\frac{1}{2}\pi - B$ hinüber, machen die Verlängerungen gleich b und c und verbinden deren Endpunkte durch den Bogen A, den wir zugleich mit der Seite $\frac{1}{2}\pi - B$ über b hinüber soweit verlängern, bis beide zusammentreffend ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse B, den Katheten b, $\frac{1}{2}\pi - A$ und den gegenüberliegenden Winkeln c, $\frac{1}{2}\pi - a$ bilden. Es ist nicht nöthig, auf die Richtung Gewicht zu legen, in der die Seiten hier auf einander folgen, weil sich die Richtung stets in die entgegengesetzte verwandelt, [95 wenn das Dreieck in ein dazu symmetrisches übergeht (§ 44).


Fig. 71.

Es sei überhaupt $a < \frac{1}{2}\pi$, $b < \frac{1}{2}\pi$, $c < \pi$ (Fig. 72). In einem solchen Dreiecke müssen sich zwei spitze Winkel befinden (§ 74), zum Beispiel A und B, die es im Falle $c > a$, $> b$ sogar nothwendig sind.

Von der Ecke C aus fällen wir das Loth $p < \frac{1}{2}\pi$ auf die Seite c, die auf diese Weise in zwei Theile zerlegt wird: x unterhalb a, $c - x$ unterhalb b (§ 75), gegenüber den Theilen X und $C - X$ des Winkels C. Bemerken wir überdies, dass hier $x < \frac{1}{2}\pi$, $c - x < \frac{1}{2}\pi$ (§ 78) und auch $X < \frac{1}{2}\pi$, $C - X < \frac{1}{2}\pi$ (§ 75). Gestützt auf das zuvor Bewiesene können wir zwei rechtwinklige Dreiecke konstruiren: das eine mit den Katheten [290 p, $\frac{1}{2}\pi - X$, den gegenüberliegenden Winkeln a, $\frac{1}{2}\pi - x$ und der Hypotenuse B, das andre mit den Katheten p, $\frac{1}{2}\pi - C + X$, den gegenüberliegenden Winkeln b, $\frac{1}{2}\pi - c + x$ und der Hypotenuse A. Legen wir das eine Dreieck mit der Kathete p an das andre, so erhalten wir eines, in dem A, B, $\pi - C$ die Seiten sind und a, b, $\pi - c$ die gegenüberliegenden Winkel. Von diesem Dreiecke gelangen wir, wie wir vorhin bemerkt haben, zu einem andern, das die Seiten $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$ und die gegenüberliegenden Winkel $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$ besitzt, und ebenso können wir auch Dreiecke mit den Seiten A, $\pi - B$, C und den Winkeln a, $\pi - b$, c oder mit den Seiten $\pi - A$, B, C und den gegenüberliegenden Winkeln $\pi - a$, b, c konstruiren, so dass wir alle hier neu konstruirten Dreiecke zulassen müssen, sobald sich in dem gegebenen zwei Seiten [96 befinden, die beide $< \frac{1}{2}\pi$ sind, wofern nur die dritte $< \pi$ ist.

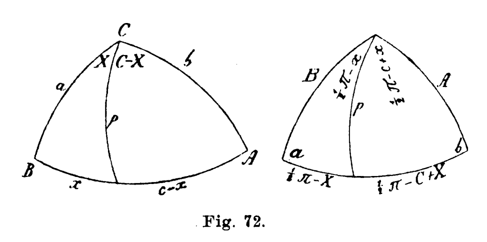


Fig. 72.

Es sei $a = \frac{1}{2}\pi$, $b < \pi$, $c = \frac{1}{2}\pi$, folglich $A = \frac{1}{2}\pi$, $C = \frac{1}{2}\pi$, $B = b$. Indem wir a und b über c hinüber bis zu ihrem Durchschnitte verlängern, erhalten wir hier ein Dreieck mit den Seiten $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\pi - B$ und den gegenüberliegenden Winkeln: $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\pi - b$. Der Satz bestätigt sich demgemäss in diesem Falle.

Es sei $a = \frac{1}{2}\pi$, $b < \frac{1}{2}\pi$, $c > \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$. Auf die Seite c legen wir von der Ecke B aus den Bogen $\frac{1}{2}\pi$ (Fig. 73), dessen Endpunkt wir mit der Ecke C verbinden. So entsteht ein Dreieck mit den Seiten b, B, $c - \frac{1}{2}\pi$ und den gegenüberliegenden Winkeln $\frac{1}{2}\pi$, A, $C - \frac{1}{2}\pi$. Ueberdies ist hier $c - \frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2}\pi$, $B < \frac{1}{2}\pi$, $A < \frac{1}{2}\pi$ (§ 75), folglich kann auch ein rechtwinkliges Dreieck bestehen, in dem A die Hypotenuse, B und $\pi - C$ die Katheten und b und

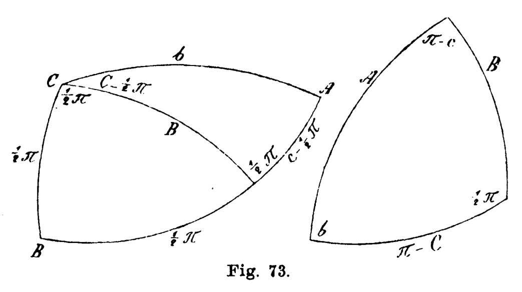


Fig. 73.

$\pi - c$ die gegenüberliegenden Winkel sind. Indem wir A und B über $\pi - C$ hinüber bis zum Durchschnitte verlängern, erhalten wir ein Dreieck mit den Seiten $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$ und den gegenüberliegenden Winkeln $\frac{1}{2}\pi$, $\pi - b$, $\pi - c$.

Es sei $a > \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$; $b < \pi$; $c > \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$. Wir verlängern a und c über b hinüber, bis sie einander schneiden. So entsteht ein Dreieck (Fig. 74) mit den Seiten $\pi - a < \frac{1}{2}\pi$, $b < \pi$, $\pi - c < \frac{1}{2}\pi$ und den gegenüberliegenden Winkeln $\pi - A$, B, $\pi - C$. Von diesem Dreiecke können wir daher zu einem andern mit den [97 Seiten A, $\pi - B$, C und den gegenüberliegenden Winkeln a, $\pi - b$, c übergehen und sodann zu einem Dreiecke mit den Seiten $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$ und den gegenüberliegenden Winkeln $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$.

Fig. 74.

So ist der Satz in allen Fällen bewiesen, wenn die Seiten a, b, c sämmtlich $< \pi$ sind. Hieraus ist leicht zu schliessen, dass in einem solchen Dreiecke die Summe aller Seiten stets kleiner ist als der volle Kreis (§ 68).

§ 80.

Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks ist stets kleiner als die kleinste Seite, sobald die Summe je zweier Seiten kleiner ist als der halbe Kreis.

In dem Dreiecke ABC (Fig. 75) sei von den drei Seiten a, b, c, wenn sie ungleich sind, c die grösste, a die kleinste oder überhaupt c nicht kleiner, a nicht grösser als die andern; ausserdem sei die Summe [291 von je zweien $< \pi$ und folglich den Seiten a, b gegenüber die Winkel A, B spitz (§ 74). Das von der Ecke C auf die Seite c gefällte Loth p ist kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ (§ 75) und zerlegt c in zwei Theile: x unterhalb b, $c - x$ unterhalb a (§ 75); ferner sind b und x, sowie a und $c - x$ sämmtlich kleiner als der Viertelkreis, endlich ist $a > p$ (§ 78). Die beiden halben Kreise $A'ABB'$ und $A'CB'$, die auf p in dessen Endpunkten senkrecht stehen, begränzen einen Ausschnitt, dessen Flächeninhalt gleich p ist und in dem das gegebene Dreieck ABC enthalten ist, folglich ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks kleiner als p und um so mehr kleiner als a.

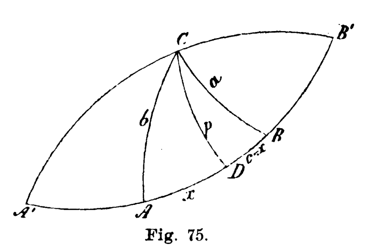


Fig. 75.

Wenn daher die eine Seite abnimmt, während die Summe der [98 beiden andern $< \pi$ ist, so nimmt der Flächeninhalt des Dreiecks ohne

Gränze ab, und die Summe aller Winkel kommt π so nahe, wie wir wollen.

Nehmen zwei Seiten ab, so nimmt gleichzeitig die dritte Seite ohne Gränze ab, weil die Summe der beiden ersten grösser wird als die letztere und die Summe je zweier zuletzt beständig $< \pi$ bleibt. Hieraus schliessen wir, dass durch Verkleinerung zweier Seiten der Flächeninhalt des Dreiecks beliebig klein und die Summe der Winkel darin beliebig nahe gleich π gemacht werden kann.

Kapitel VI.

[292/3]

Die Kongruenz von Dreiecken.

§ 81.

Zur Kongruenz zweier Dreiecke ist erforderlich, dass alle Winkel und Seiten des einen ebenso angeordnet und auch ebenso gross sind, wie die Winkel und Seiten des andern. Zuweilen jedoch zieht bei gleicher Anordnung schon die Gleichheit gewisser Stücke — so werden wir überhaupt Seiten und Winkel von Dreiecken und Vielecken nennen — die Gleichheit der übrigen nach sich und bedingt die Kongruenz [4 der Dreiecke selbst. Die Untersuchung der Fälle dieser Art bildet den Gegenstand dieses Kapitels, in dem wir der Kürze halber immer sagen werden, welche und wie viele gleiche Theile vorhanden sind, während wir eigentlich darunter verstehen, dass alle diese Theile in der einen Figur den entsprechenden Theilen in der andern gleich sind. Indem wir überdies die Figuren durch Buchstaben unterscheiden, werden wir die Kongruenz durch das Zeichen $\backsim$ ausdrücken.

Bei einem geradlinigen Vielecke ist es ganz gleich, nach welcher Richtung die Seiten in ihrer Ordnung aufeinanderfolgen, weil die eine Richtung in die andre übergeht, sobald wir die Ebene auf die andre Seite herumdrehen. Bei sphärischen Vielecken ändert sich diese Richtung beim Uebergange zum symmetrischen Vielecke, das dem körperlichen Scheitelwinkel entspricht, der durch Fortsetzung der Ebenen über den Mittelpunkt der Kugelfläche hinaus entsteht. Jedoch werden wir hier, sobald wir von Kongruenz sprechen, von zwei symmetrischen Vielecken ohne Unterschied das eine anstatt des andern nehmen.

Die Konstruktion der Vielecke, der geradlinigen sowohl als der sphärischen, stellen wir uns so vor, dass wir jedesmal eine Seite unter einem bestimmten Winkel an eine andre anlegen, bis schliesslich die letzte sich an die erste anschliesst. Seiten und Winkel müssen daher

die wesentlichen Theile sein, die die Kongruenz bewirken und damit zugleich alle übrige Zubehör sowie überhaupt alle Eigenschaften [5 eines Vielecks bestimmen. Es ist klar, dass die letzte unter den Seiten mit ihren Neigungen gegen die beiden, die ihr im Vielecke [293 benachbart sind, durch die Grösse aller andern Winkel und Seiten bestimmt wird.

Die Konstruktion der Vielecke aus deren aufeinanderfolgenden Seiten und Winkeln führt demgemäss zu den Sätzen:

Vielecke sind kongruent, wenn von der Zahl n aller Seiten $n-1$ gleich sind und ausserdem $n-2$ an diesen liegende Winkel.

Vielecke sind kongruent, wenn von der Zahl n aller Seiten $n-2$ gleich sind und ausserdem $n-1$ an diesen liegende Winkel.

Ueber Dreiecke insbesondere, geradlinige sowohl wie sphärische, ist Folgendes zu sagen:

Dreiecke sind kongruent, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich sind.

Dreiecke sind kongruent, wenn eine Seite und die an ihr liegenden Winkel gleich sind.

Hieraus folgt: [6

Rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn die Katheten gleich sind, weil die Gleichheit der rechten Winkel sich dabei mitversteht.

Rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn eine Kathete und der anliegende Winkel gleich ist.

Im Kreise liegen gleichen Winkeln gleiche Sehnen gegenüber, weil hier die Gleichheit der Halbmesser die Kongruenz der Dreiecke vollständig macht.

§ 82.

Geradlinige Dreiecke sind kongruent, wenn die drei Seiten gleich sind.

In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ (Fig. 76) setzen wir voraus, dass die Seite $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. Es sei AB die unter den Seiten, bei der die anliegenden Winkel A, B spitz sind (§ 49). Wir legen das Dreieck $A'B'C'$ an das

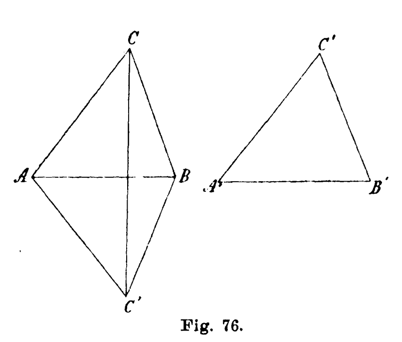


Fig. 76.

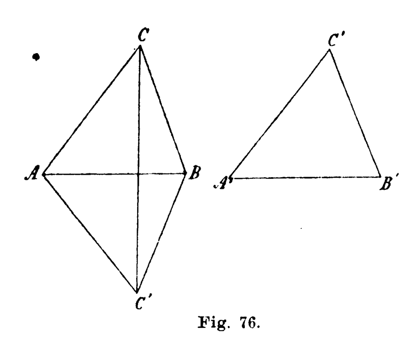


Fig. 76.

Dreieck ABC mit der Seite $A'B'$ an die ihr gleiche AB, so dass der Punkt A' auf A und B' auf B fällt. Jetzt verbinden wir die Ecken C und C' durch eine Gerade, die zwischen den Endpunkten A, B senkrecht zu der Seite AB hindurchgehen muss, weil sie die Grundlinie zweier gleichschenkliger Dreiecke ACC' und BCC' ist, durch deren Spitzen die Seite AB geht (§ 52). In den Dreiecken ACB und $AC'B$ sind die Winkel an den Punkten C und C' gleich, da sie aus gleichen Stücken [7 bestehen (§ 50), folglich sind die Dreiecke selbst kongruent (§ 81), das bedeutet: $\triangle\, ACB \cong A'C'B'$.

§ 83.

Sphärische Dreiecke sind kongruent, wenn die drei Seiten gleich sind.

Von den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ (Fig. 77) nehmen wir an, dass die Seite $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. Wir legen das Dreieck $A'B'C'$ so an das Dreieck ABC, dass der Punkt A' auf A und B' auf B fällt, sodann verbinden wir die Ecken C und C' [294 durch einen Bogen, der die Seite AB schneiden möge. So entstehen

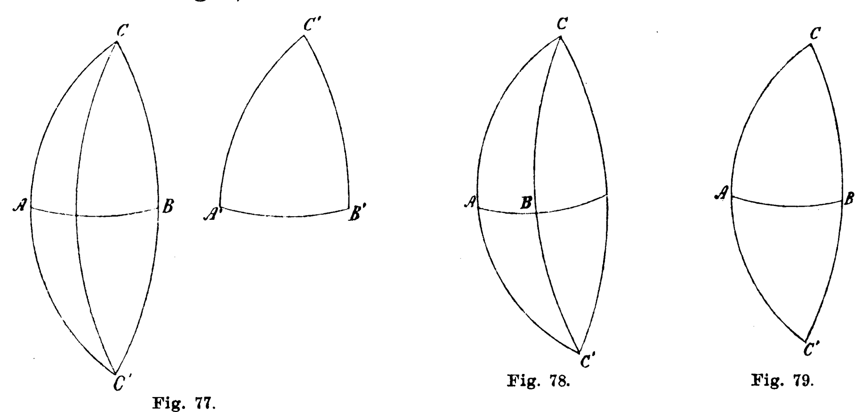


Fig. 77. Fig. 78. Fig. 79.

zwei gleichschenklige Dreiecke ACC' und BCC', in denen die Winkel an den Punkten C und C' gleich sind (§ 64), folglich gilt von den Dreiecken ACB und $AC'B$ dasselbe, wie überhaupt jedesmal, mag nun den Bogen im Innern der Dreiecke verlaufen oder ausserhalb (Fig. 78), oder mag er endlich mit einer der Seiten zusammenfallen (Fig. 79). In allen Fällen wird $\triangle\, ABC \cong ABC' \cong A'B'C'$ (§ 81).

§ 84.

Geradlinige Dreiecke sind kongruent, wenn zwei Seiten und der der grösseren gegenüberliegende Winkel gleich sind.

In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ (Fig. 80) sei Seite $BC = B'C'$, $AC = A'C'$, $AC > BC$, Winkel $B = B'$. Wir legen das Dreieck $A'B'C'$ auf das Dreieck ABC, so dass die kleinere Seite $B'C'$ auf BC fällt, der Punkt B' auf B und C' auf C. Dann muss die Seite $A'B'$, die der Richtung von BA folgt, in A endigen, weil der Punkt A' weder auf der einen noch auf der andern Seite liegen kann. Sonst [8 entstände ein gleichschenkliges Dreieck ACA' mit spitzen Winkeln an der Grundlinie AA', von deren stumpfen Nebenwinkeln entweder dem Dreiecke ABC oder dem Dreiecke $A'BC$ einer angehörte, wo er zugleich der grösste Winkel wäre (§ 49), während er der kleineren Seite, BC oder $B'C'$, gegenüberläge (§ 54).

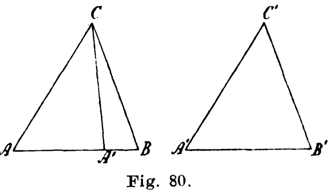


Fig. 80.

Hieraus folgt, dass rechtwinklige Dreiecke kongruent sind, wenn eine Kathete und die Hypotenuse gleich sind, weil der rechte Winkel in beiden nicht nur gleich ist, sondern überdies der grösseren Seite gegenüberliegt.

§ 85.

Geradlinige Dreiecke sind kongruent, wenn zwei Seiten und der der kleineren gegenüberliegende Winkel gleich und überdies beide Dreiecke zu gleicher Zeit spitzwinklig oder stumpfwinklig sind.

Es sei in den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ (Fig. 81) Seite $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, $AC > BC$ und Winkel $A = A'$. Von den Winkeln müssen wir voraussetzen, dass entweder alle spitz sind oder irgend einer stumpf und die beiden andern spitz.

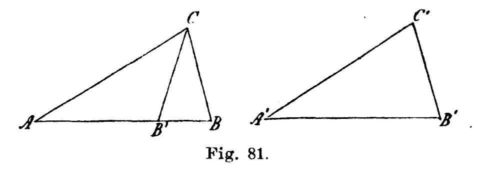


Fig. 81.

Im ersten Falle decken die Dreiecke einander, wenn wir sie so auf einander legen, dass A' auf A und C' auf C fällt. Der dritte Punkt B' kann nämlich weder zwischen A und B liegen noch auf der andern Seite von B auf der Verlängerung von AB, sonst entstände ein gleichschenkliges Dreieck CBB' mit spitzen Winkeln an der Grundlinie BB', von deren stumpfen Nebenwinkeln entweder dem Drei- [9 ecke ABC oder dem Dreiecke $AB'C$ einer angehörte.

Wenn in den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ je ein Winkel stumpf ist, so muss er der grössten Seite gegenüberliegen, folglich entweder der Seite $AC = A'C'$ oder den Seiten AB und $A'B'$. In dem einen und im andern Falle kann, wenn wir die Dreiecke auf einander [295 legen, der Punkt B' nirgends anderswohin fallen als nach B, sonst entstände ein gleichschenkliges Dreieck BCB', von dessen spitzen Winkeln entweder einer im Dreiecke ABC gegenüber AC läge oder einer im Dreiecke $AB'C$ gegenüber AC oder einer einen stumpfen Nebenwinkel hätte, der dem gegebenen Dreiecke angehörte ausser den stumpfen Winkeln an den Punkten C und C'.

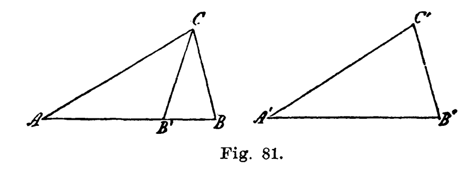


Fig. 81.

Wenn daher die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ nicht kongruent sein sollen, obgleich bei ihnen Seite $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ und $\angle A = \angle A'$, so kann ihre Verschiedenheit nur daher kommen, dass in dem einen der grösseren Seite ein stumpfer Winkel gegenüber liegt, in dem andern dagegen ein spitzer. Es sei zum Beispiel in dem Dreiecke ABC der Winkel $B < \frac{1}{2}\pi$, während $AC > BC$ ist. Indem wir um C mit dem Halbmesser CB einen Kreis beschreiben, finden wir noch einen Schnittpunkt B' zwischen den beiden Endpunkten A und B (§ 51). So entsteht ein Dreieck $AB'C$, das dem Dreiecke $A'B'C'$ kongruent sein muss und in dem folglich B' ein stumpfer Winkel ist.

§ 86. [10

Sphärische Dreiecke sind kongruent, wenn zwei Seiten und ein gleichen Seiten gegenüberliegender Winkel gleich sind, jedoch unter der Bedingung, dass die den beiden andern gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleichzeitig $< \frac{1}{2}\pi$, $= \frac{1}{2}\pi$, $> \frac{1}{2}\pi$ sind.

In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ (Fig. 82) sei Seite $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $\angle A = \angle A'$. Mit dem Halbmesser BC beschreiben wir auf der Kugelfläche einen Kreis um den Punkt B. Dieser kann den Bogen AC entweder nur in dem Punkte C berühren oder abgesehen von C den Kreis, von dem AC einen Theil bildet, noch in einem Punkte schneiden (§ 66). Im ersten Falle ist BC zu AC senkrecht und ebenso auch in dem Dreiecke $A'B'C'$ die Seite $B'C'$ senkrecht zu $A'C'$. Mag nun im andern Falle der Schnittpunkt in C' zwischen den

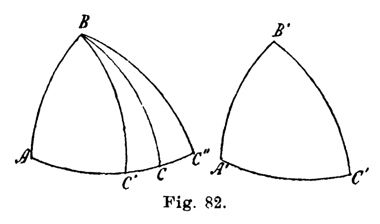


Fig. 82.

Endpunkten A, C liegen oder in C'' auf der Verlängerung von AC über die Ecke C hinaus, immer entsteht ein gleichschenkliges Dreieck BCC' oder BCC'', in dem die Winkel an der Grundlinie gleich sind. Ferner kann das Dreieck ABC' dem Dreiecke $A'B'C'$ nicht kongruent sein, weil, wenn Winkel $B'C'A' = BC'A$ ist, folgt:

$$\angle B'C'A' + \angle BCA = \angle BC'A + \angle BCA = \pi.$$

Das Dreieck $A'B'C'$ kann aber auch dem Dreiecke ABC'' nicht kongruent sein, weil, sobald $\angle B'C'A' = \angle BC''A$ ist, folgt:

$$\angle B'C'A' + \angle BCA = \angle BC''A + \angle BCA = \pi.$$

Als nothwendig bleibt nur die Kongruenz der Dreiecke $A'B'C'$ und ABC übrig.

Hieraus folgt, dass Dreiecke kongruent sind, wenn zwei Seiten und der der einen von ihnen gegenüberliegende rechte oder stumpfe Winkel gleich sind, vorausgesetzt, dass die [11 Summe der beiden Seiten kleiner ist als der halbe Kreis, denn der andern Seite muss dann in jedem von beiden Dreiecken ein spitzer Winkel gegenüberliegen (§ 74).

§ 87.

Geradlinige Dreiecke sind kongruent, wenn eine Seite, ein anliegender Winkel und der ihr gegenüberliegende gleich sind.

In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ (Fig. 81) sei Seite [296 $AC = A'C'$ und Winkel $A = A'$, $B = B'$. Wenn wir das Dreieck $A'B'C'$ auf das Dreieck ABC legen mit den gleichen Seiten $AC = A'C'$ und mit dem Punkte A' auf A, so fällt die Seite $A'B'$ in die Richtung von AB und muss in dem Punkte B endigen, sonst entstände ein Dreieck BCB', in dem einer der gleichen Winkel B, B' an der Linie BB' ein innerer, der andre aber ein Aussenwinkel wäre, während doch dieser immer grösser ist als der innere (§ 53).

Fig. 81.

Daher sind rechtwinklige Dreiecke kongruent, wenn die Hypotenuse und ein spitzer Winkel gleich sind oder eine Kathete und der gegenüberliegende Winkel, denn die Gleichheit der rechten Winkel vervollständigt die Kongruenz.

§ 88.

Sphärische Dreiecke sind kongruent, wenn bei ihnen gleich sind: eine Seite, ein anliegender und der gegenüber-

liegende Winkel unter der Bedingung, dass die Summe [12 der beiden andern, den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten nicht den halben Kreis ausmacht.

In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ (Fig. 82) sei Seite $AB = A'B'$ und Winkel $A = A'$, $C = C'$. Wenn wir das Dreieck $A'B'C'$ so auf das Dreieck ABC legen, dass die gleichen Seiten $A'B'$ und AB auf einander fallen, so kommt die Seite $A'C'$ von A ausgehend auf AC zu liegen und kann weder in C' auf der einen noch in C'' auf der andern Seite des Punktes C auf der Verlängerung von AC endigen; sonst entstände entweder ein Dreieck CBC' oder eines CBC'', in dem, weil der äussere Winkel dem inneren am Bogen AC'' gleich ist, die Summe der gegenüberliegenden Seiten, also $BC + B'C'$, nothwendig π betrüge (§ 74).

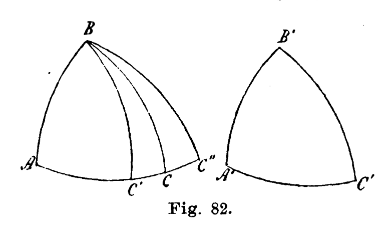


Fig. 82.

Wenn hierbei der Winkel $C = \frac{1}{2}\pi$ ist, also auch $C' = \frac{1}{2}\pi$, so werden die Dreiecke BCC' und BCC'' gleichschenklig, was erfordert, dass $BC = B'C' = \frac{1}{2}\pi$, sowie $AB = A'B' = \frac{1}{2}\pi$ ist, endlich Winkel $A = A' = \frac{1}{2}\pi$ (§ 62). Daher sind rechtwinklige sphärische Dreiecke kongruent, wenn die Hypotenuse und ein spitzer Winkel gleich sind.

§ 89.

Sphärische Dreiecke sind kongruent, wenn die drei Winkel gleich sind.

In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ (Fig. 83) sei Winkel $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$. Das zieht die Gleichheit der Flächeninhalte beider [13 Dreiecke nach sich (§ 68); wenn wir daher das Dreieck $A'B'C'$ mit den Schenkeln zweier gleicher Winkel auf das Dreieck ABC legen, zum Beispiel mit denen der Winkel A und A', so müsste, falls die Dreiecke nicht kongruent wären, jedes mit einem Theile aus dem andern heraustreten. Es sei $A'B' < AB$, folglich $A'C' > AC$, so dass $B'C'$, das auf der Seite AB im Innern des Dreieckes anfängt, BC in einem Punkte D schneidet und sodann auch die Verlängerung von AC über den Punkt C hinaus in dem Punkte C' trifft. So entstehen zwei Dreiecke BDB' und CDC', in denen $BD + B'D = \pi$, $CD + C'D = \pi$ ist (§ 74), folglich ist $BC + B'C' = 2\pi$; da aber BC und $B'C'$ zugleich mit dem Winkel A entweder $< \pi$, oder $= \pi$, [297

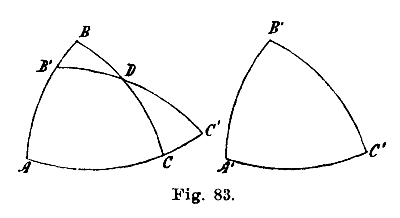


Fig. 83.

oder $> \pi$ sein müssen (§ 46), so können wir nur $BC = B'C' = \pi$ zulassen. In diesem letzteren Falle werden jedoch die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ Kugelflächenausschnitte und sind daher wegen der Gleichheit der Ebenenwinkel kongruent.

§ 90.

In einem geradlinigen Dreiecke kann die Summe aller Winkel nicht grösser als π sein.

Wir nennen die Summe aller Winkel des Dreiecks S. Sind die Winkel nicht gleich, so nehmen wir an, dass A der kleinste ist oder überhaupt nicht grösser als die beiden andern. Wir haben gesehen (§ 53), dass jedes Dreieck ABC (Fig. 47) in ein andres AFC verwandelt werden kann, in dem die Summe aller Winkel dieselbe bleibt, während die Summe: $ABC + ACB$ irgend zweier aus dem ersten Dreiecke in dem [14 neuen den einen Winkel ACF bildet, und folglich der dritte Winkel BAC in dieses derart übergeht, dass er in zwei: AFC und FAC zerfällt.

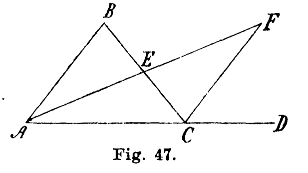


Fig. 47.

Es sei also ABC eben das Dreieck, bei dem die Summe aller Winkel S ist, ferner sei der Winkel $BAC = A$ nicht grösser als die beiden andern. In dem neuen Dreiecke AFC ist die Summe aller Winkel wieder S, und einer von den Winkeln an den Punkten A, F muss $\leqq \frac{1}{2} A$ sein. In dem Dreiecke ACF ist jedoch:

$$\begin{aligned} S &= \angle ACF + \angle FAC + \angle AFC \\ &= \pi - \angle FCD + A \\ &< \pi + A. \end{aligned}$$

Indem wir in dem letzteren Dreiecke die dem Winkel $\leqq \frac{1}{2} A$ gegenüberliegende Seite halbiren und auf diese Weise immer fortfahren das eine Dreieck in ein andres zu verwandeln, müssen wir überhaupt schliessen, dass

$$S < \pi + 2^{-n} . A$$

ist, wo die ganze positive Zahl n beliebig gross und damit zugleich $2^{-n}A$ beliebig klein sein kann. Demnach können wir unmöglich zulassen, dass $S - \pi$ irgend ein positiver Winkel sei, sondern wir dürfen blos entweder $S = \pi$ oder $S < \pi$ annehmen.

Diesen Satz hat zuerst Legendre in seiner Geometrie (Éléments [15 de Géométrie) bewiesen, indem er vorher bemerkte, dass in einem Dreiecke eine Seite zugleich mit dem gegenüberliegenden Winkel wächst. So sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 84) die Seite $BC \gtreqqless AB$, folglich der Winkel BCA spitz. Wir geben der Seite BC eine neue Lage

BD, indem wir den Winkel ABC verkleinern. So entstehen zwei Dreiecke: das gleichschenklige BCD mit dem spitzen Winkel BDC und das Dreieck BDA mit dem spitzen Winkel BDA gegenüber der Seite AB, folglich ist die Summe [298 der Winkel ADB und BDC kleiner als π. Das bedeutet, dass sich die Punkte B und D auf gegenüberliegenden Seiten der Geraden AC befinden, die auf diese Weise mit AD und CD ein Dreieck ADC bildet, in dem der Winkel $ACD = BDC - BCA < ADC$ ist, demnach ist die Seite $AD < AC$ (§ 54).

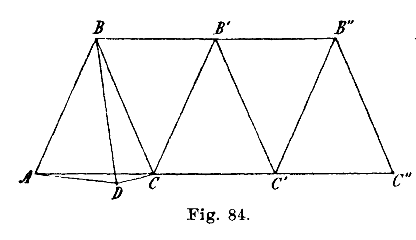


Fig. 84.

Jetzt nennen wir in dem Dreiecke ABC die den Ecken B und C gegenüberliegenden Seiten b und c. Die Seite b verlängern wir nach der einen Richtung hin über den Punkt C hinaus und auf der Verlängerung tragen wir ununterbrochen b ab, indem wir zugleich das Dreieck ABC in der Richtung von A nach C bewegen, so dass in allen den kongruenten Dreiecken ABC, $CB'C'$, $C'B''C''$, ... Seite $AC = CC' = C'C'' = \cdots$, sowie Seite $AB = CB' = C'B'' = \cdots$, Seite $BC = B'C' = B''C'' = \cdots$, Winkel $BAC = B'CC' = B''C'C'' = \cdots$, $BCA = B'C'C = B''C''C' = \cdots$. Indem wir die Spitzen aller dieser Dreiecke der Reihe nach durch die Geraden BB', $B'B''$, ... verbinden, erhalten wir noch die Dreiecke: BCB', $B'C'B''$, ..., in denen die Winkel an den Punkten C, C' ... kleiner sein müssen als ABC, wenn wir die Summe der drei Winkel in dem Dreiecke ABC grösser [16 als π voraussetzen. Dann werden alle Seiten BB', $B'B''$, ... unter einander gleich und jede $< b$. Bezeichnen wir die Seite BB' mit dem Buchstaben a und mit dem Buchstaben n die Zahl dieser Seiten, so müssen wir erhalten (§ 55):

$$2c > n(b - a),$$

was nicht für jedes ganze positive n möglich ist.

Hieraus folgt, dass der durch Verlängerung einer Seite entstehende Aussenwinkel entweder der Summe der beiden inneren Winkel des Dreiecks, die nicht seine Nebenwinkel sind, gleich sein kann oder grösser als diese.

§ 91.

Wenn in einem Dreiecke die Summe aller Winkel π beträgt, so ist sie in jedem andern Dreiecke ebenso gross.

In dem Dreiecke ABC (Fig. 85) setzen wir die Winkel A und C als spitz voraus und die Summe aller gleich π. Von der Ecke B aus

fällen wir das Loth p auf die Seite AC, die auf diese Weise in zwei Theile q und r zerlegt wird, während das Dreieck selbst in zwei rechtwinklige zerfällt: das eine mit den Katheten p und q, in dem wir die Summe der drei Winkel gleich $\pi - \alpha$ setzen, das andre mit den Katheten p und r, in dem diese Summe gleich $\pi - \beta$ sei. In dem gegebenen Dreiecke ABC muss die Summe aller Winkel gleich $\pi - \alpha - \beta = \pi$ sein, da es aber unmöglich ist α und β als negative Zahlen anzunehmen (§ 90), so ist $\alpha = \beta = 0$. Das bedeutet, dass in jedem [17 der beiden rechtwinkligen Dreiecke die Summe der drei Winkel gleich π und die Summe der beiden spitzen gleich $\frac{1}{2}\pi$ ist.

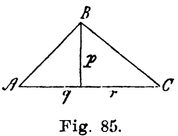


Fig. 85.

Fügen wir zu dem Dreiecke mit den Katheten p und q ein ebensolches, Hypotenuse an Hypotenuse und überdies noch so, dass die gleichen Seiten nicht zusammenstossen, sondern einander gegenüberliegen, so erhalten wir ein Viereck mit rechten Winkeln (Fig. 86), das man aus diesem Grunde **Rechteck** nennt. Aus n derartigen Rechtecken, die wir Seite p [299 an p aneinander legen, bilden wir ein neues $ABCD$, in dem Seite $AD = BC = p$ und $AB = DC = nq$ ist. Auf ähnliche Weise gelangen wir zu einem Rechtecke $ABFE$, in dem Seite $AB = EF = nq$ und $AE = BF = mp$ ist, unter n und m beliebige ganze Zahlen verstanden. Durch die Gerade BE zerlegen wir das Rechteck $ABFE$ in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke ABE und BEF (§ 81), bei denen die Summe der drei Winkel jedesmal dieselbe ist, folglich in jedem gleich π.

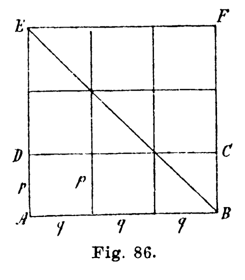


Fig. 86.

Was nunmehr auch für ein Dreieck ABC (Fig. 87) mit einem rechten Winkel BAC gegeben sein mag, immer können wir die ganzen Zahlen n und m so gross nehmen, dass die Kathete $AB < m.p$ ist und $AC < n.q$. Wenn wir daher AB und AC über die Punkte B und C hinaus verlängern und $AD = mp$, $AE = nq$ machen, so erhalten wir ein Dreieck DAE, in dem die Summe aller Winkel π ist und in dessen Innern das Dreieck ABC enthalten ist, so dass wir durch Ziehung der Geraden DC das Dreieck ADE in die drei: DCE, BCD und ABC zerlegen. Wenn wir in diesen letzteren Dreiecken die Winkelsummen gleich $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$ annehmen, so muss sie in dem Dreiecke ADE gleich $\pi - \alpha - \beta - \gamma = \pi$ [18 herauskommen, da, nachdem alle Winkel addirt sind, an den Punkten

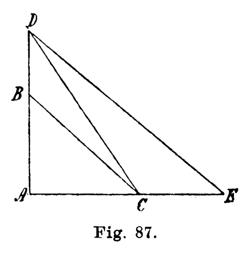


Fig. 87.

B und C 2π wegfällt. Indessen, α, β und γ können nicht negativ sein, folglich ist: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Nachdem wir uns überzeugt haben, dass $\gamma = 0$ ist, haben wir damit zugleich bewiesen, dass in jedem rechtwinkligen Dreiecke die Summe der drei Winkel gleich π ist, da aber überhaupt jedes Dreieck in zwei rechtwinklige zerfällt, so muss die Summe der drei Winkel in jedem Dreiecke gleich π sein.

Diesen Satz hat auch Legendre bewiesen (Éléments de Géométrie), wir aber werden ausserdem, indem wir jetzt die Geometrie erweitern, sowohl die eine als die andre der beiden Annahmen zulassen, die bis jetzt noch möglich bleiben. Die gewöhnliche Geometrie nimmt in Uebereinstimmung mit den wirklichen Messungen in den Dreiecken die Summe der drei Winkel gleich zwei Rechten an. Als Grundlage für die imaginäre Geometrie, die wir nur in unserm Verstande begreifen können, dient die andre Annahme, dass in jedem Dreiecke die Summe der drei Winkel kleiner als zwei Rechte sein muss. Die genannte Summe wächst in diesem Falle, sobald die Seiten des Dreiecks abnehmen; wie beschaffen zum Beispiel auch der Winkel BAC (Fig. 87) sein mag: wenn in dem Dreiecke ABC die Summe aller drei Winkel gleich $\pi - \alpha$ ist, in dem Dreiecke BCD gleich $\pi - \beta$ und in dem Dreiecke DCE gleich $\pi - \gamma$, so finden wir sie in dem Dreiecke ADE gleich $\pi - \alpha - \beta - \gamma$.

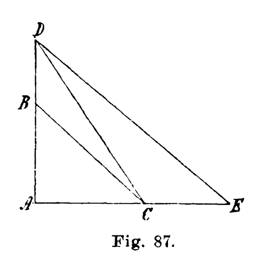


Fig. 87.

Wenn wir dagegen in allen Dreiecken [19 die Summe der drei Winkel gleich π annehmen, so ist in einem Vielecke mit nur einer Begränzung und mit n Seiten die Winkelsumme gleich $(n - 2)\pi$, da $n - 2$ die kleinste Zahl solcher Dreiecke ist, in die sich das gegebene Vieleck zerlegen lässt (§ 69). Das folgt auch aus dem Ausdrucke für den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks (§ 69), den man dann als null betrachten muss.

§ 92. [300

Geradlinige Dreiecke sind kongruent, wenn in ihnen drei Winkel gleich sind, deren Summe wir als von π verschieden annehmen.

In den geradlinigen Dreiecken ABC und $A'B'C'$ (Fig. 88) sei Winkel $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$ und $A + B + C < \pi$. Wenn wir das Dreieck $A'B'C'$ mit den Schenkeln der gleichen Winkel A, A' auf das Dreieck ABC legen, so kann keines der beiden Dreiecke in dem andern enthalten sein (§ 91). Wenn nun das eine auch nur mit einem Theile aus dem andern heraustritt, wenn zum Beispiel der Punkt B' auf die Seite AB zwischen die Endpunkte A und B fällt, während

der Punkt C' aus dem Dreiecke ABC heraus auf die Verlängerung von AC zu liegen kommt, so erzeugt die Seite $B'C'$, indem sie BC in dem Punkte D schneidet, zwei Dreiecke BDB' und CDC', in deren jedem die Summe der drei Winkel $\pi + \angle BDB'$ beträgt, was unmöglich ist (§ 90).

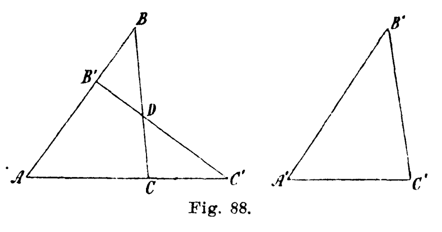


Fig. 88.

Bei der Annahme, dass die Summe der drei Winkel gleich π [20] ist, können Dreiecke sehr gut nicht kongruent sein, ungeachtet in ihnen die drei Winkel gleich sind, denn das bedeutet eigentlich nur die Gleichheit von zwei Winkeln, während eine Seite willkürlich bleibt (§ 81).

Kapitel VII. [301 21]

Parallele Linien.

§ 93.

Die Linien, die von einem Punkte ausgehen, werden eine in derselben Ebene gegebene Gerade entweder schneiden oder niemals mit ihr zusammentreffen, wie weit sie auch verlängert werden mögen. Man muss daher bei diesen Linien in Beziehung zu einer gegebenen Geraden unterscheiden zwischen den schneidenden oder konvergirenden und den nichtschneidenden oder nichtkonvergirenden, zu denen die parallelen gehören, die den Uebergang von den einen zu den andern, den divergirenden, bilden. Die beiden Parallelen zu einer gegebenen Geraden zerlegen die Ebene in vier Theile: in zwei einander gegenüberliegenden sind die konvergirenden Geraden enthalten, in den beiden übrigen die divergirenden.

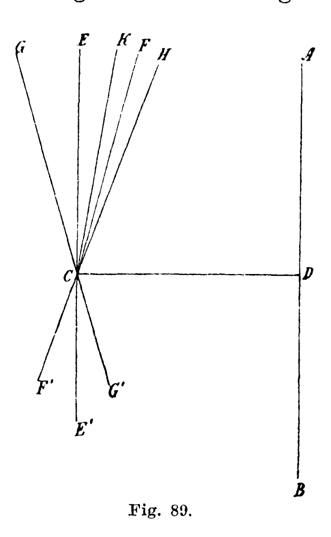


Fig. 89.

In einer Ebene sei die Gerade AB (Fig. 89) sowie der Punkt C gegeben, dann müssen alle Linien, die von dem Punkte C ausgehen, entweder AB schneiden, wie zum Beispiel das auf AB gefällte Loth CD, oder mit AB gar nicht zusammentreffen, wie zum Beispiel das auf CD errichtete Loth CE (§ 48). Wird diese Linie

CD um den Punkt C herum gedreht, so geht sie von den schneidenden im Winkel FCG' zu den nicht schneidenden im Winkel FCG über, sodann wiederum in dem Winkel GCF' zu denen, deren Verlängerung über den Punkt C hinaus AB schneidet, endlich im Winkel $F'CG'$ zu den nicht schneidenden. Hier entstehen die Schenkel der vier Winkel dadurch, dass die beiden Linien FF' und GG' einander schneiden, und diese, die den Uebergang von den schneidenden zu den [22 nicht schneidenden darstellen, werden zu AB parallel sein. Bemerken wir überdies, dass alle Linien schneidend oder nichtschneidend bleiben wie zuvor, wenn sie unter demselben Winkel auf die andre Seite des Lothes CD übergehen. Daher werden uns beide Parallelen bekannt sein, sobald wir wissen, wie die eine von ihnen, CF, in dem rechten Winkel ECD liegt. Dann liefert CG, unter demselben Winkel $GCE = ECF$ auf der gegenüberliegenden Seite von EC gezogen, die andre Parallele zu AB. Endlich bilden die beiden Parallelen CF [302 und CG mit ihren Verlängerungen CF' und CG' über C hinaus zwei Scheitelwinkel GCF und $G'CF'$, innerhalb deren alle von AB divergirenden Geraden enthalten sind.

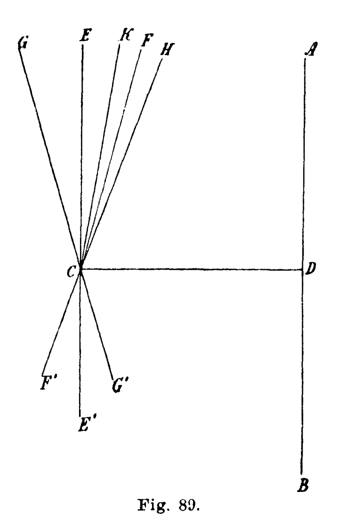


Fig. 89.

Wenn wir sagen, dass eine Gerade zu einer andern parallel ist, so werden wir darunter im Folgenden nur den Fall verstehen, dass beide nach derselben Seite irgend einer dritten, sie verbindenden Linie gezogen sind. So ist CF parallel zu DA, CG' zu DB, da sich beide jedesmal auf derselben Seite der Linie CD befinden. Von einem gegebenen Punkte aus kann es daher zu jeder Geraden nur eine Parallele geben, deren unterscheidendes Merkmal darin besteht, dass sie bei der kleinsten Abweichung nach der einen Seite zu einer konvergirenden, nach der andern Seite aber zu einer divergirenden wird. Wenn zum Beispiel CF zu DA parallel ist, so ist CH eine mit DA konvergirende Gerade, CK eine divergirende, wie klein dabei auch die Winkel FCH und FCK sein mögen.

Unter diesem Gesichtspunkte erscheint der Parallelismus nun- [23 mehr in voller Allgemeinheit. Euklid, ausser Stande einen befriedigenden Beweis zu geben, liess in der gewöhnlichen Geometrie den besonderen Fall zu, dass zwei Parallelen zugleich auf einer dritten Geraden senkrecht stehen müssen. Auf diese Weise verschwindet hier

der Winkel ECF, sowie der ganze Winkel GCF mit seinem Scheitelwinkel $F'CG'$, folglich müssen alle Linien, mit Ausnahme der parallelen, AB schneiden, wenn sie nach der einen oder der andern Seite hin genügend verlängert werden. Euklids Nachfolger haben die Sache nur erschwert, indem sie ergänzende Bestimmungen hinzufügten, die entweder willkürlich oder vollständig dunkel waren, und indem sie sich bemühten, von der Richtigkeit einer angenommenen Wahrheit zu überzeugen, die nach dem eigensten Wesen der Geometrie zu beweisen unmöglich ist.

Die Neigung einer Geraden gegen das Loth, das auf eine andre, zur ersten parallele gefällt ist, werden wir den zu diesem Lothe gehörigen Parallelwinkel nennen. Den Winkel selbst werden wir mit $\Pi(p)$ bezeichnen, wenn p das Loth ist. Jedoch wollen wir bemerken, dass der Ausdruck $\Pi(p)$ einstweilen keine analytische Funktion darstellt, sondern nur als ein Zeichen dient, das auf die Zugehörigkeit des Winkels $\Pi(p)$ zu der Linie p hinweist.

§ 94.

Zwei Gerade schneiden einander nicht, wenn eine dritte sie auf derselben Seite unter gleichen Winkeln trifft.

Die Gerade AB (Fig. 90) treffe die beiden Linien CD und BE [24 auf derselben Seite unter den Winkeln: $ACD = ABE$. Sind diese Winkel Rechte, so dürfen CD und BE einander nicht schneiden (§ 48); sind sie spitz, so sind ihre Nebenwinkel stumpf. Setzen wir daher den Winkel ABE als spitz voraus, so enthält dessen Oeffnung das von der Mitte F der Linie BC auf BE gefällte Loth FG, während von derselben Mitte aus die Gerade FH die Verlängerung von DC in H senkrecht trifft. So entstehen zwei [303 rechtwinklige Dreiecke $CHF \cong GFB$, weil $CF = FB$ und $\angle FCH = \angle FBG$ ist (§ 87); folglich müssen die beiden Winkel CFH und BFG einander gleich und Scheitelwinkel sein, die vermöge des Schnittes zwischen den Geraden BC und GH entstehen; auf der zweiten GH von diesen beiden stehen aber die Geraden DH und GE senkrecht und können daher einander nicht schneiden.

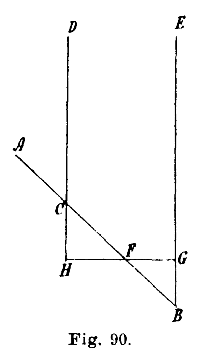


Fig. 90.

§ 95.

Auf einer Geraden kann man jeden Punkt als den Anfangspunkt betrachten, von dem aus sie zu einer andern parallel läuft.

Es sei AB (Fig. 91) das Loth auf die Gerade BC von dem Punkte A aus, von dem die zu BC parallele Gerade AD ausgeht. Das heisst, jede andre Gerade AC, die von A aus innerhalb des Parallelwinkels gezogen ist, schneidet BC. Zu zeigen ist, dass, wenn auf der Linie AD nebst ihrer Verlängerung AE' über A hinaus der Punkt E irgendwo auf der einen oder der Punkt E' auf der andern Seite des Punktes A angenommen wird, dass dann immer die auf BC ge- [25 fällten Lothe EF und $E'F'$ mit $E'D$ den Parallelwinkel DEF oder $DE'F'$ bilden, innerhalb dessen Oeffnung jede Linie, die von dem Scheitel E oder E' aus gezogen ist, $F'C$ schneidet.

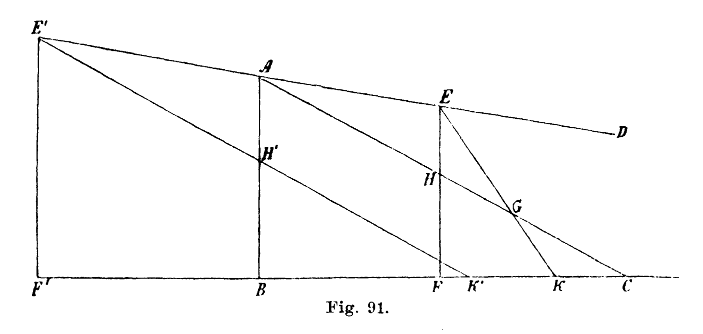


Fig. 91.

In der Oeffnung des Winkels DEF ziehen wir von dem Scheitel E aus irgend eine Gerade EG. Solange diese BC nicht trifft, verbinden wir ihren Endpunkt G mit A durch die Gerade AG, die bei ihrer Verlängerung EF irgendwo in H und sodann auch BC irgendwo in C treffen muss. So entsteht ein Dreieck FHC, in das EG eintritt, und da diese Gerade unmöglich weder HF noch HC ein zweites Mal treffen kann, so muss sie irgendwo in K durch FC hindurchgehen.

In der Oeffnung des Winkels $DE'F'$ ziehen wir von dem Scheitel E' aus beliebig die Gerade $E'K'$, die innerhalb des Vierecks $ABF'E'$ weder $E'F'$ noch $E'A$ zum zweiten Male treffen kann, sondern entweder durch die Seite BF' gehen muss oder durch AB irgendwo in einem Punkte H'. Indem wir diesen letzteren Fall betrachten, nehmen wir an, dass in dem Dreiecke ABC, in das die Gerade $E'H'$ eintritt, die Seite AC gegen die Parallele AD unter dem Winkel $DAC = DE'K'$ geneigt ist, da ja der erste von diesen Winkeln vollkommen willkürlich ist. Nunmehr muss $E'K'$, das AC gar nicht mehr (§ 94) und auch AB nicht zum zweiten Male trifft, mit der Dreiecksseite BC in irgend einem Punkte K' zusammentreffen.

Wenn wir daher $p = AB$, EF oder $E'F'$ setzen, so erhalten wir den Winkel $\Pi(p) = DAB$, DEF oder $DE'F'$, wo auch die [26 Punkte A, E, E' auf der Parallelen angenommen sein mögen.

§ 96.

Wenn eine Linie einer andern parallel ist, so ist auch umgekehrt diese zweite der ersten parallel.

Von dem Punkte A aus (Fig. 92) seien Gerade gezogen, AB parallel und AC senkrecht zu CD. Es ist klar, dass jede Gerade CE, die von CD abweicht, aber nicht nach der Seite, auf der AB liegt, AB auch nicht schneiden [304 kann. Es bleibt daher zu zeigen, dass jede Gerade CF, die von CD nach der entgegengesetzten Seite abweicht, AB sicher trifft, wie klein auch der Neigungswinkel DCF sein mag.

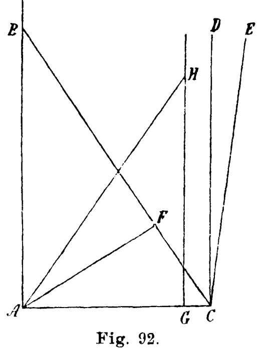


Fig. 92.

Wir fällen von dem Punkte A aus auf CF das Loth AF, machen $AG = AF$, errichten auf AC im Endpunkte G der Linie AG das Loth HG und ziehen sodann von A aus AH unter dem Winkel $HAG = BAF$ mit AG. Die Gerade AH muss CD schneiden (§ 93), folglich muss sie auch GH irgendwo in einem Punkte H schneiden. So entsteht ein rechtwinkliges Dreieck AHG, dessen Hypotenuse AH den Abstand AB bestimmt, in dem CF bei seiner Verlängerung AB trifft; denn $\triangle ABF \cong \triangle AHG$ (§ 81).

Demnach ist der Parallelismus zweier Geraden immer gegenseitig.

§ 97. [27

Zwei Parallelen sind der dritten Geraden parallel, in der zwei durch die beiden ersten Geraden gelegte Ebenen einander schneiden.

Die Parallelen AB und CD (Fig. 93) mögen in Ebenen liegen, deren Schnittlinie FE sei. Von einem beliebigen Punkte E dieser letzteren aus ziehen wir EA so, dass es auf AB in A senkrecht steht, sodann von hier aus wieder AC senkrecht zu CD und endlich die Linie CE, die mit den beiden Senkrechten das Dreieck ACE bildet. Der Winkel BAC zwischen den Geraden AB und AC kann spitz oder ein Rechter sein (§ 93), folglich muss das von C aus auf AB gefällte Loth irgendwo in einem Punkte G auftreffen, der entweder eben der Punkt A ist oder in einem gewissen Abstande AG von A liegt. Die Verbindungslinie GE der Punkte G und E muss ebenfalls

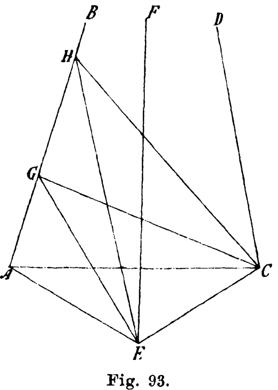


Fig. 93.

entweder mit AE zusammenfallen oder in der Oeffnung des Winkels AEF verlaufen.

Nunmehr haben wir den Parallelismus der Linien EF und AB zu beweisen, indem wir uns davon überzeugen, dass jede Gerade AB schneidet, sobald sie innerhalb des Winkels AEF von dessen Scheitel E ausgeht. Es ist klar, dass es in dem Theile AEG des ganzen Winkels AEF, der dem Dreiecke AEG angehört, nicht anders sein kann. Ziehen wir in dem übrigen Theile FEG die Gerade EH und denken uns dann durch diese sowie durch EC eine Ebene, so erhalten wir als Schnitt mit der Ebene BAC eine Linie CH, die in dem Winkel DCG die zu CD parallele Gerade AB irgendwo in einem Punkte H treffen muss, nach dem folglich auch die Linie EH gelangt, wie klein [28 auch der Winkel HEF sein mag. Auf ähnliche Weise wird der Parallelismus von EF und CD bewiesen.

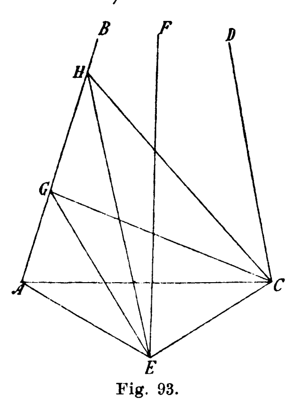


Fig. 93.

Wenn daher auf einer Ebene eine Parallele zu einer ausserhalb der Ebene gegebenen Geraden gezogen werden kann, so erzeugt jede andre Ebene, die durch die gegebene Gerade geht, bei ihrem Schnitte mit der gegebenen Ebene eine Parallele zu der gegebenen Geraden. In diesem Falle sagt man, dass die gegebene Ebene und die gegebene Gerade einander parallel sind. [305

§ 98.

Von einem Punkte aus kann man stets eine Gerade derart ziehen, dass sie mit einer gegebenen Geraden einen beliebig kleinen Winkel bildet.

Es sei AB (Fig. 94) das von A aus auf die Gerade BC gefällte Loth. Wir wissen bereits, dass der Winkel ADB um so kleiner ausfällt, je weiter der Punkt D von dem Endpunkte B des Lothes AB

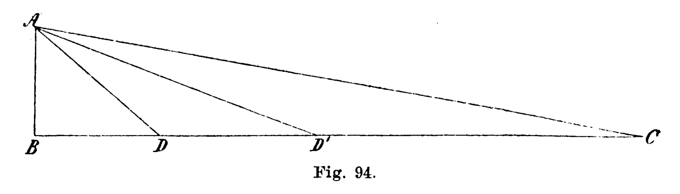


Fig. 94.

angenommen wird (§ 53). Nunmehr bleibt noch zu zeigen, dass er mit zunehmendem BD kleiner gemacht werden kann als jeder gegebene Winkel.

In dem Dreiecke ABD verlängern wir die Seite BD und auf dem Schenkel DC des so entstehenden Aussenwinkels ADC machen wir $DD' = AD$, wodurch das gleichschenklige Dreieck ADD' entsteht, in dem die Winkel an AD' gleich sind, folglich ist der Winkel $ADB \geqq 2AD'D$ (§ 90). Indem wir $CD' = AD'$ machen, erhalten wir den Winkel $ACD \leqq \frac{1}{4} BDA$, und so fortfahrend können wir [29 den Winkel, den die Gerade BC mit einer von ihr aus nach dem gegebenen Punkte A gezogenen Geraden bildet, unbegränzt verkleinern.

§ 99.

Zwei Gerade, die einer dritten parallel sind, sind unter einander parallel.

Wir betrachten zuerst drei Gerade AB, CD und EF (Fig. 95) in einer Ebene. Unter der Voraussetzung, dass die äusserste AB zu den beiden andern parallel ist, fällen wir von dem auf AB beliebig angenommenen Punkte A aus die Lothe: AC auf CD und AE auf EF. Das zweite dieser Lothe schneidet die mittlere Linie CD irgendwo in G, entweder zwischen den Endpunkten C und D, wenn nämlich der Winkel $DGE < \frac{1}{2}\pi$ ist, oder, mit AC zusammenfallend, in dem Punkte C, wenn der Winkel $DGE = \frac{1}{2}\pi$ ist. In der Oeffnung des Winkels DGE möge von dem Punkte G die Linie GG' ausgehen und mit DG irgend einen Winkel DGG' bilden. Auf DC können wir den Punkt A' so weit ab von C annehmen, dass der Winkel $AA'C$ kleiner wird als DGG' (§ 98). Dessenungeachtet muss die Verlängerung der Linie AA' über A' hinaus EF irgendwo in F' treffen, da AB und EF parallel sind. Demnach entsteht ein Dreieck AEF', dessen Seite AF' gegen die Linie $A'D$ unter dem Winkel $DA'F' < DGG'$ geneigt ist. Machen wir nun den Winkel $DA'F'' = DGG'$, so kann $A'F''$ unmöglich GE schneiden, da es mit GG' nicht zusammentrifft, sondern geht irgendwo zwischen F' und E auf FE durch F'', indem es so ein Viereck $A'GEF''$ begränzt, wo GG', da es $A'F''$ nicht schneidet [30 (§ 94), mit EF'' in irgend einem Punkte G' zusammentreffen muss.

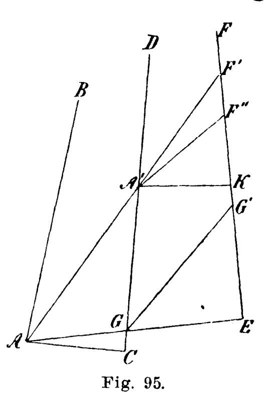


Fig. 95.

Sind dagegen die beiden äussersten Linien AB und EF parallel zu der mittleren DC, so muss jede Gerade AA', die in der Oeffnung des Winkels BAE von dem Scheitel A aus gezogen ist, DC irgendwo in einem Punkte A' schneiden, von dem aus das Loth $A'K$ auf FE gefällt sei. Jetzt liegt die Verlängerung $A'F'$ von AA' ausserhalb

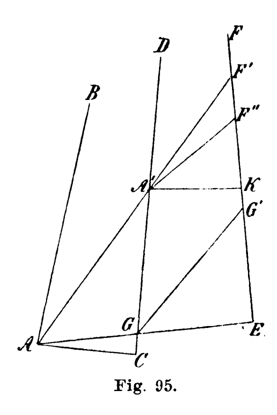


Fig. 95.

des Vierecks $AA'KE$, folglich in der [306 Oeffnung des Winkels $DA'K$ und schneidet daher EF als Parallele zu $A'D$ (§ 96), wie klein auch der Winkel BAA' sein möge.

Nehmen wir endlich an, dass AB und CD zu EF parallel sind in verschiedenen Ebenen, so können wir AB als die Schnittlinie zweier Ebenen $BACD$ und $BAEF$ betrachten, die durch die beiden Parallelen CD und EF gelegt sind, folglich muss die dritte Gerade AB auch zu CD parallel sein (§ 97).

§ 100.

Wenn drei Ebenen einander in parallelen Geraden schneiden, so ist die Summe der Ebenenwinkel gleich π.

Die drei Ebenen mögen einander in den parallelen Linien AA', BB' und CC' schneiden (Fig. 96). Wir nehmen auf diesen die Punkte A, B und C beliebig an, verbinden sie durch die Geraden AB, AC [31 und BC und denken uns durch sie eine Ebene, sowie noch eine andre Ebene $AB'C$ durch die Punkte A, C und durch B' irgendwo auf BB'; endlich beschreiben wir um diese drei Punkte Kugelflächen und zeichnen die Bogen, in denen sie die Ebenen $A'AB'$, $AB'C$, $B'CC'$, $A'ACC'$ schneiden. Die Ebenenwinkel zwischen den ersten drei Ebenen durch die Parallelen AA', BB', CC' nennen wir α, β, γ, mit δ bezeichnen wir den Neigungswinkel der Ebene $AB'C$ gegen $A'ACC'$, mit p, q, r die körperlichen Winkel def, $d'e'f'$, abc, deren Scheitel in A, C, B' liegen. Den Ebenenwinkel def finden wir (§ 68) gleich:

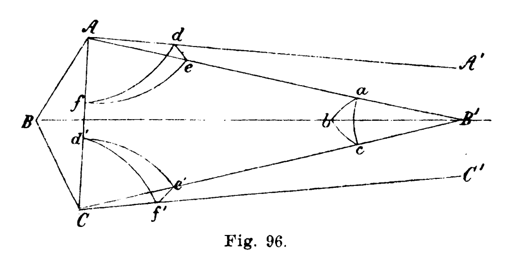


Fig. 96.

$$2p + \pi - \alpha - \delta,$$

den Winkel $d'e'f'$ gleich:

$$2q + \pi - \gamma - \delta.$$

Demnach ist der körperliche Winkel:

$$r = \delta - p - q - \tfrac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta - \gamma).$$

Den Winkel δ können wir beliebig klein annehmen und zugleich mit ihm die Bogen de und $e'f'$ unbegränzt verkleinern, wenn wir den Punkt B' von B entfernen (§ 93). Bei dieser Bewegung des Scheitels

B' verschwinden schliesslich die Bogen ab und bc, folglich auch der körperliche Winkel r selbst (§ 80), der Ebenenwinkel δ und die körperlichen Winkel $p < \delta$, $q < \delta$, mithin ist:

$$\pi = \alpha + \beta + \gamma. \qquad [32$$

§ 101.

Wenn in den Dreiecken die Summe der drei Winkel gleich π ist, so sind zwei Gerade, die auf einer dritten senkrecht stehen, unter einander parallel.

Es seien AB und CD (Fig. 97) beide auf der Geraden AC senkrecht. Den Endpunkt dieser, A, verbinden wir mit irgend einem Punkte D auf CD durch die Gerade AD. In dem rechtwinkligen Dreiecke ACD ist die Summe der beiden spitzen Winkel gleich $\frac{1}{2}\pi$, ebenso ist auch [307

$$\angle CAD + \angle DAB = \tfrac{1}{2}\pi,$$

folglich der Winkel

$$BAD = ADC;$$

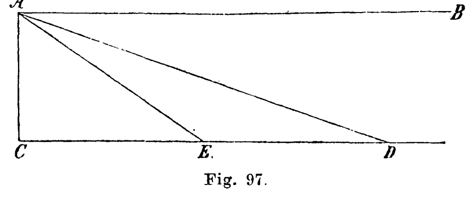


Fig. 97.

aber der letztere kann beliebig klein gemacht werden (§ 98), folglich schneidet AD die Gerade CD immer, wie wenig es auch von AB abweichen mag. Das bedeutet, dass CD und AB parallel sind (§ 93).

Daher sind überhaupt bei dieser Annahme zwei Gerade parallel, wenn eine dritte sie auf der einen Seite unter gleichen Winkeln trifft (§ 94), und folglich schneiden zwei Gerade einander jedesmal, wenn sie gegen eine dritte zwischen ihnen liegende unter solchen inneren Winkeln geneigt sind, deren Summe $< \pi$ ist.

Wenn man umgekehrt zulässt, dass irgend zwei auf einer Geraden senkrechte Linien parallel sind, so muss in den Dreiecken die Summe aller drei Winkel gleich π sein.

Sind nämlich zum Beispiel AB und CD, die beide auf AC senkrecht stehen, einander parallel, so sei in dem Dreiecke ACE [33 die Summe der drei Winkel $\pi - \alpha$, folglich der Winkel $BAE > \alpha$. Machen wir den Winkel $BAD = \alpha$, so schneidet AD die Linie CD und erzeugt ein Dreieck ADC, in dem die Summe: $\pi - \alpha + \angle ADC$ der drei Winkel entweder der Summe der drei Winkel in dem Dreiecke ACE gleich sein muss oder kleiner als diese (§ 91). Hieraus folgt:

$$\pi - \alpha + \angle ADC \leqq \pi - \alpha,$$

ein Widersinn, der nur durch die Annahme: $\alpha = 0$ beseitigt werden kann (§ 93).

§ 102.

Setzt man voraus, dass im Dreiecke die Summe aller Winkel $< \pi$ ist, so nimmt der Winkel $\Pi(a)$ mit wachsendem a allmählig ab, indem er mit dem Werthe $\Pi(a) = \frac{1}{2}\pi$ für $a = 0$ anfängt und sich für $a = \infty$ der Gränze $\Pi(a) = 0$ nähert.

Bemerken wir zuerst, dass $\Pi(a) > \Pi(b)$ ist, wenn $a < b$. Es sei $AB = a$, $AC = b$ (Fig. 98), AA' senkrecht zu AC; BB' und CC' parallel zu AA', folglich der Winkel $ABB' = \Pi(a)$, $ACC' = \Pi(b)$. Es ist unmöglich $\Pi(a) = \Pi(b)$ anzunehmen, sonst gäbe es ja zu einer Geraden zwei Senkrechte, die parallel wären (§ 94). Noch weniger kann man $\Pi(a) < \Pi(b)$ für $a < b$ zulassen, weil die Gerade BD in diesem Falle [34 CC' sogar dann schnitte, wenn man den Winkel ABD gleich ACC' machte.

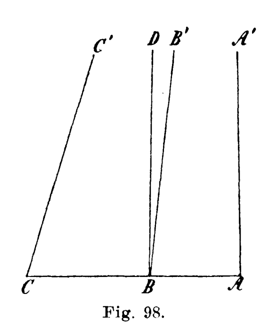


Fig. 98.

Jetzt werden wir zeigen, dass sich für jeden Winkel A zwischen den Gränzen: $A = 0$ und $A = \frac{1}{2}\pi$ eine solche Linie a finden lässt, dass $A = \Pi(a)$ wird.

Auf dem einen Schenkel des Winkels A (Fig. 99) nehmen wir irgend einen Punkt B an und fällen von diesem aus auf den andern Schenkel das Loth BB'. So entsteht ein rechtwinkliges Dreieck ABB' mit den Katheten AB' und BB', in dem die Summe der drei Winkel gleich $\pi - \alpha$ sei. Wir verlängern den Schenkel AB' und machen $B'C' = AB'$, sodann $C'D' = AC'$ und so fort. In den Punkten C', D', ... [308 errichten wir auf demselben Schenkel die Senkrechten CC', DD', ..., solange diese den andern Schenkel in gewissen Punkten C, D, ... treffen können. Indem wir die Punkte B und C', C und D', ... durch Gerade verbinden, erhalten wir: $\triangle AB'B \backsimeq \triangle B'BC'$, $\triangle ACC' \backsimeq CC'D'$, ... Ferner muss in dem Dreiecke ABC' die Summe der drei Winkel gleich $\pi - 2\alpha$ sein, in dem Dreiecke ACC' kleiner als $\pi - 2\alpha$ (§ 91), in dem Dreiecke ACD' kleiner als $\pi - 4\alpha$ und noch kleiner in dem Dreiecke ADD'. Daher müssen wir allgemein diese Summe kleiner

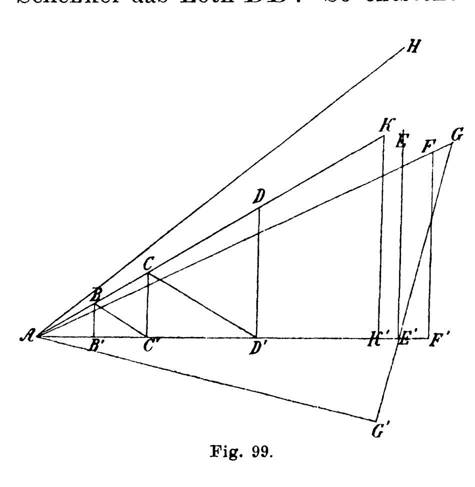


Fig. 99.

als $\pi - 2^n \alpha$ finden, wo n eine positive ganze Zahl ist. Das erfordert, dass schliesslich gewisse Senkrechte EE', FF' zu dem einen Schenkel des Winkels A mit dem andern gar nicht mehr zusammentreffen. Unter diesen sei EE' die Senkrechte zu AE', die selbst nicht mit AD zusammentrifft, während auf der einen Seite von ihr, nach dem Scheitel A hin, alle übrigen den Schenkel AD schneiden und zu- [35 gleich auf der andern Seite alle Senkrechten FF', wie weit sie auch verlängert werden mögen, nicht mit AD zusammentreffen. In diesem Falle ist der Schenkel AD zu der Senkrechten EE' parallel.

Um uns davon zu überzeugen, ziehen wir von dem Scheitel des Winkels A aus innerhalb und ausserhalb auf der andern Seite des Schenkels AD die Geraden AG und AH. Die zweite darf mit EE' nicht zusammentreffen, weil sonst ein Dreieck entstände, aus dem die Gerade AD nicht heraustreten könnte, ohne die Seite EE' zu schneiden. Ziehen wir noch ausserhalb des Winkels A von dessen Scheitel aus die Gerade AG', die gegen den Schenkel AD' unter demselben Winkel geneigt ist, wie im Innern AG gegen AD. Auf AG' fällen wir von E' aus das Loth $E'G'$ und erhalten so ein rechtwinkliges Dreieck $AE'G'$, in dem $AG' < AE'$ ist. Wenn wir daher AG' von dem Scheitel A aus auf AE' legen, so deckt sich AG mit AD und der Punkt G' fällt irgend wohin zwischen den Punkten A und E' nach K'; demnach geht die Senkrechte GG' in die Senkrechte KK' auf AE' über, die den Abstand $AK = AG$ des Punktes G bestimmt, bis zu dem die Gerade AG reichen und folglich ein Dreieck AGE' bilden muss, in dem die Gerade EE' die Seite AG schneidet. Wird daher AD um den Punkt A gedreht und mag es dabei von seiner früheren Lage noch so wenig abweichen, so schneidet es EE', sobald es nach der einen Seite geht, während es auf der gegenüberliegenden Seite nicht mit EE' zusammentrifft.

Unter Festhaltung der Stetigkeit der Aenderung wollen wir die Werthe von $\Pi(a)$ vervollständigen, indem wir $\Pi(a) = \frac{1}{2}\pi$ annehmen für $a = 0$ und $\Pi(a) = 0$ für $a = \infty$, endlich wollen wir die Be- [36 stimmung auf alle negativen Linien ausdehnen, indem wir setzen:

$$\Pi(a) + \Pi(-a) = \pi,$$

wo also die Linie a sowohl null sein kann als eine positive oder negative Zahl, die bis ins Unendliche wächst.

Obgleich der Ausdruck $\Pi(a)$, wie wir früher (§ 93) bemerkt haben, nur als Zeichen für einen Winkel dienen soll zugleich mit dem Hinweise auf die Linie a, zu der dieser Winkel gehört, so kann diese [309 Abhängigkeit immerhin, so lange sie unbekannt ist, als eine **geometrische Funktion** bezeichnet werden im Gegensatze zu einer ana-

lytischen Funktion, die entweder durch ihre Zahlenwerthe oder vermöge gewisser Bedingungsgleichungen vollständig bestimmt ist.

In der gewöhnlichen Geometrie nimmt man an, dass der Parallelwinkel beständig gleich einem Rechten ist. Man kann jedoch diesen Winkel auch als veränderlich voraussetzen, nämlich in der allgemeinen oder imaginären Geometrie, die die gewöhnliche Geometrie als einen besonderen Fall umfasst, den einzigen übrigens, den uns wirklich ausgeführte Messungen liefern.

§ 103.

In der gewöhnlichen Geometrie nennt man ein Viereck, in [37 dem gegenüberliegende Seiten parallel sind, ein Parallelogramm.

Im Parallelogramme sind gegenüberliegende Seiten gleich; auch ist ein Viereck stets ein Parallelogramm, sobald in ihm die gegenüberliegenden Seiten gleich sind oder sobald nur zwei Seiten gleich und überdies parallel sind.

Das Viereck $ABCD$ (Fig. 100) zerlegen wir in zwei Dreiecke, indem wir die Scheitel A und C zweier gegenüberliegender Winkel durch die Gerade AC, eine sogenannte Diagonale, verbinden. Ist die Seite AB zu CD parallel und AD zu BC, so ist die Diagonale AC gegen jede der beiden Parallelen unter demselben Winkel geneigt (§ 101). Daher ist: $\angle BAC = \angle ACD$, $\angle BCA = \angle CAD$, folglich $\triangle ABC \backsimeq ACD$ (§ 81) und darin: $AB = CD$, $BC = AD$.

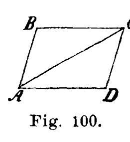


Fig. 100.

Ist ferner $AB = CD, BC = AD$, so ist wiederum $\triangle ABC \backsimeq \triangle ACD$, folglich die Winkel: $BCA = CAD$, $BAC = ACD$ und die Seite BC zu AD, AB zu CD parallel.

Ist endlich AB gleich CD und dazu parallel, so ist der Winkel $BAC = ACD$, folglich $\triangle ABC \backsimeq \triangle ACD$ (§ 81), demnach BC gleich AD und dazu parallel.

Hieraus folgt, dass die Lothe von einer Parallelen auf [38 eine andre gleich sind.

§ 104.

Unter der Voraussetzung rechter Parallelwinkel stehen parallele Linien zwischen den Schenkeln eines Winkels in demselben Verhältnisse, wie die zugehörigen Abschnitte auf den Schenkeln.

Es seien aa' und bb' (Fig. 101) zwei Parallelen zwischen den Schenkeln AB und AC des Winkels A. Der Aussenwinkel baa' des Dreiecks Aaa' ist gleich der Summe der beiden inneren aAa' und

$aa'A$, die nicht seine Nebenwinkel sind, folglich muss die Gerade ac, die durch den Endpunkt a der Linie aa' parallel zu dem Schenkel Aa' des Winkels A gezogen ist, die Linie bb' in zwei Theile, bc und $cb' = aa'$ (§ 103) zerlegen. Wir schliessen hieraus, dass die [310 Parallelen aa', bb' zwischen den Schenkeln des Winkels wachsen, wenn sie sich von dem Scheitel A entfernen. Ueberdies ist in dem Dreiecke abc der Winkel $bac = aAa'$, $abc = Aaa'$, die Seite $ac = a'b'$; wo wir daher auch den Theil ab auf dem Schenkel AB annehmen mögen, überall wachsen die drei Seiten in dem Dreiecke Aaa' in gleicher Weise, sobald wir die Seite aa' durch die dazu parallele bb' ersetzen.

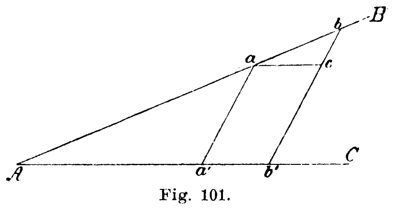


Fig. 101.

Wir bezeichnen nunmehr mit x, y, z die Seiten Aa, Aa', aa' des Dreiecks Aaa'; mit x', y', z' die Seiten Ab, Ab', bb' des Dreiecks Abb' und nehmen an, dass x in n und x' in m gleiche Theile derselben Art getheilt ist; dann ist klar, dass der Bruch $n:m$ das Verhältniss von x zu x', von y zu y' und von z zu z' ist. Machen wir ferner, falls die Linien inkommensurabel sind, die Annahme, dass

$$\frac{m}{n}x < x', \quad \frac{m+1}{n}x > x' \qquad [39$$

ist und folglich auch

$$\frac{m}{n}y < y', \quad \frac{m+1}{n}y > y',$$

dann ist, wie wir eben gezeigt haben:

$$\frac{m}{n}z < z', \quad \frac{m+1}{n}z > z'.$$

Daher liefert das Verhältniss der ganzen Zahlen n und m das Verhältniss der Linien x und x' mit derselben Genauigkeit, wie das Verhältniss von y zu y' und von z zu z'. Das bedeutet, dass in jedem Falle:

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}.$$

Hieraus folgt, dass in rechtwinkligen Dreiecken die Seiten, die gleichen spitzen Winkeln gegenüberliegen, in gleichem Verhältnisse stehen.

§ 105.

Unter der Voraussetzung rechter Parallelwinkel ist im rechtwinkligen Dreiecke das Quadrat der Hypotenuse [40 gleich der Summe der Quadrate der Katheten.

Wir nennen in dem rechtwinkligen Dreiecke die Katheten a und b, die Hypotenuse c (Fig. 102). Von dem Scheitel des rechten Winkels aus fällen wir das Loth p auf die Hypotenuse, die auf diese Weise in zwei Theile zerlegt wird, den einen x unterhalb a, den andern $c - x$ unterhalb b. Das Dreieck selbst wird in zwei rechtwinklige zerlegt: das eine mit der Hypotenuse a und den Katheten p, x, das andre mit der Hypotenuse b und den Katheten p, $c - x$. Durch Vergleichung jedes dieser Dreiecke mit dem gegebenen erhalten wir (§ 104):

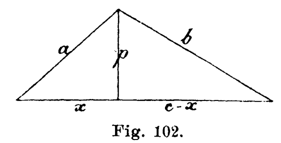


Fig. 102.

$$x = a\frac{a}{c}, \qquad c - x = b\frac{b}{c} \tag{311}$$

und hieraus finden wir nach Wegschaffung von x:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

§ 106.

Unter der Voraussetzung veränderlicher Parallelwinkel wächst das Loth schneller als der Schenkel des Winkels, von dem aus es gefällt ist, und erst recht schneller als der Schenkel, auf den es gefällt ist.

Auf dem Schenkel AB des Winkels CAB (Fig. 103) seien [41 drei Punkte D, E, B angenommen, deren Abstände, vom ersten zum zweiten und vom zweiten zum dritten, gleich sind. In den Punkten D, E, B errichten wir auf AB die Senkrechten DF, EG, BC, die den Schenkel AC in den Punkten F, G, C schneiden mögen, und zwar sei p der Abstand des ersten vom zweiten, q der des zweiten vom dritten. Wir legen das Viereck $GEBC$ mit der gemeinsamen Seite GE und mit der gleichen Seite $BE = ED$ auf das Viereck $FDEG$. Die Seite BC fällt dabei auf DF und ihr Endpunkt irgendwohin nach H ausserhalb des Dreiecks $[AEG]$, weil der Winkel $EGC > \frac{1}{2}\pi$ ist und $AGE < \frac{1}{2}\pi$. So entsteht ein Dreieck, in dem p ein kleinerer Winkel gegenüberliegt als q (§ 91), folglich ist $q > p$ (§ 54).

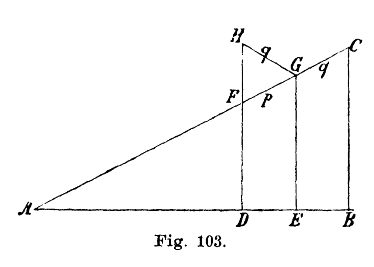


Fig. 103.

Es seien auf dem Schenkel AB (Fig. 104) drei Punkte D, E, B angenommen, so dass der Abstand des ersten vom zweiten gleich dem des zweiten vom dritten ist, $DE = EB$. Von den Punkten D, E, B aus fällen wir auf AC die Lothe DF, EG, BC. Wir machen $GH = DF$, $CK = GE$ und verbinden die Endpunkte D und H,

E und K durch die Geraden DH, EK, die gegen die Lothe unter spitzen Winkeln: $FDH = DHG$, $GEK = EKC$ geneigt sein müssen. Wir halbiren GC in L und errichten hier die Senkrechte LM, die durch die Mitte M von EK senkrecht dazu hindurchgehen und BE in N schneiden wird. Mit dieser Senkrechten NL trifft die Verlängerung von DH in O zusammen und bildet da einen spitzen Winkel DOL (§ 91), in dessen Oeffnung das von D aus auf NL gefällte Loth DP liegt. In den rechtwinkligen Dreiecken AEG und ABC ist nunmehr der [42 Winkel $AEG > ABC$, und in den ebenfalls rechtwinkligen Dreiecken DPN und EMN ist der Winkel $NEM > NDP$ und erst recht grösser als EDH. Demnach muss das Dreieck EBK die Lage DEB' annehmen, wenn wir es mit der Seite BE auf die gleiche Linie DE legen, und es muss alsdann BK, das in EB' übergeht, DH irgendwo zwischen E und B' in Q schneiden, folglich ist $BK = EB' > EQ$, $> EH$.

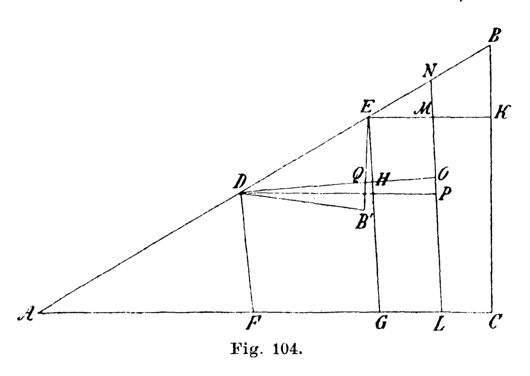


Fig. 104.

§ 107. [312

Unter der Voraussetzung veränderlicher Parallelwinkel ist im rechtwinkligen Dreiecke das Quadrat der Hypotenuse grösser als die Summe der Quadrate der beiden Katheten.

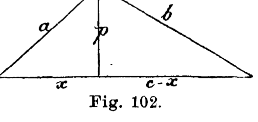


Fig. 102.

Es sei c die Hypotenuse (Fig. 102), a und b die Katheten, p das Loth von dem rechten Winkel aus auf die Hypotenuse, die es in zwei Theile zerlegt: x unterhalb a, $c - x$ unterhalb b. Indem wir uns auf das soeben Bewiesene stützen, finden wir durch Vergleichung von Dreiecken:

$$x > a\frac{a}{c}, \quad c - x > b\frac{b}{c}$$

und durch Verbindung dieser beiden Ungleichheiten schliessen wir:

$$c^2 > a^2 + b^2.$$

§ 108. [43

Unter der Voraussetzung veränderlicher Parallelwinkel gehen zwei Gerade, die auf derselben dritten senkrecht stehen,

um so weiter auseinander, je weiter sie verlängert werden, so dass das Loth von der einen auf die andre bis ins Unendliche wächst.

Es seien AB und CD (Fig. 105) auf AC senkrecht. Von irgend welchen Punkten B und E der einen aus fällen wir auf die andre CD die Lothe EF und BD, ziehen sodann von A aus senkrecht zu dem nächsten Lothe EF die Gerade AG und verlängern diese über G hinaus, bis sie BD in H schneidet, wobei sie einen Winkel $GHD < \frac{1}{2}\pi$ bildet. Die Verlängerung von GH über H hinaus liefert den ebenfalls spitzen Scheitelwinkel BHK und folglich liegt in diesem das auf HK gefällte Loth $BK < BH$. Setzen wir nunmehr: $AB = a$, $AE = b$, $EG = c$, so finden wir (§ 106):

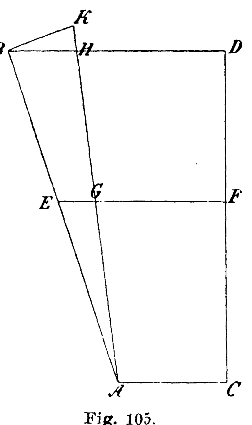


Fig. 105.

$$BK > c\,\frac{a}{b}$$

und um so mehr:

$$BH > c\,\frac{a}{b}.$$

Es ist leicht einzusehen, dass $EF > AC$ und $HD > GF$ ist, weil gleiche Lothe gegen die Gerade, die ihre Spitzen verbindet, immer unter spitzen Winkeln geneigt sind, während das eine Loth, wenn der Winkel an dem [44 andern wächst, gleichfalls zunimmt. Daher ist:

$$BD > HD + c\,\frac{a}{b}$$

$$> EF + c\,\frac{a-b}{b}.$$

Hieraus folgt, dass wir für $AB = a$ stets einen Abstand von [313 genügender Grösse derart wählen können, dass das Loth BD grösser wird als jede gegebene Linie.

Bemerken wir noch, dass hier $AB > CD$ ist und dass man folglich auch für CD stets einen genügend grossen Abstand so wählen kann, dass BD grösser wird als eine gegebene Linie.

Umgekehrt schliessen wir, dass wir zu jedem beliebigen auf CD errichteten Lothe BD immer ein andres AC finden können, das soweit davon entfernt ist, dass das von dem Endpunkte des ersten auf das zweite gefällte Loth beliebig nahe an CD auftrifft.

§ 109.

Unter der Voraussetzung veränderlicher Parallelwinkel wachsen die Abstände zwischen zwei Parallelen nach der

einen Seite hin ebenso unbegränzt wie sie nach der andern hin abnehmen.

Es sei AB parallel zu CD (Fig. 106) und von den Punkten [45 A, E der ersten aus seien auf die zweite die Lothe AC, EF gefällt, so dass also die Winkel BAC und BEF spitz sind. Wir verlängern EF über den Punkt E hinaus und ziehen in der Oeffnung des spitzen Winkels AEG die Gerade AG senkrecht zu GF, das wir stets, zugleich mit EF, beliebig klein machen können, indem wir CF vergrössern (§ 108).

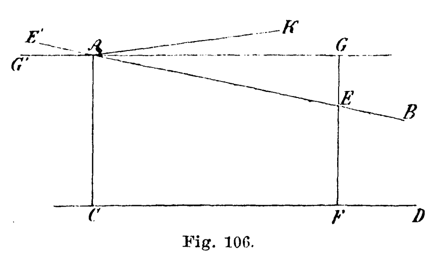


Fig. 106.

Wenn wir umgekehrt AE und AG über A hinaus verlängern, so wird die Verlängerung AE' der ersten Linie von CF noch mehr divergiren als AG', die Verlängerung von AG, bei der, wie wir gesehen haben, die auf CF gefällten Lothe ins Unendliche wachsen.

Dies der Grund, weshalb wir zwei Gerade divergirend genannt haben (§ 93), sobald sie weder zu den parallelen gehören noch zu denen, die einander schneiden. In der That, wenn die Linie AK mit AB einen Winkel bildet, so wachsen die von ihren Punkten aus auf AB gefällten Lothe in der Richtung nach dem Endpunkte K. Um so mehr muss man dies von den auf CD gefällten Lothen sagen, sobald AK einen Winkel KAC bildet, der kleiner als π ist, aber grösser als BAC.

Daher müssen wir die Seite des Parallelismus, auf der die Parallelen einander näher kommen, von der Seite der Divergenz unterscheiden, nach der hin die Abstände der beiden Parallelen bis ins Unendliche anwachsen.

§ 110. [46

Die in den Seitenmitten eines Dreiecks errichteten Senkrechten schneiden einander in dem Mittelpunkte eines Kreises, der durch die Ecken geht und deshalb der umbeschriebene Kreis des Dreiecks genannt wird. Die Senkrechten schneiden einander nothwendig bei jedem Dreiecke, sobald wir darin die Summe der drei Winkel gleich π voraussetzen.

In dem Dreiecke ABC (Fig. 107) errichten wir auf den Seiten AB, BC, AC in deren Mitten D, E, F die Senkrechten DG, EG, FG. Die beiden ersten mögen in dem Punkte G zusammentreffen, indem [314 sie die gleichschenkligen Dreiecke AGB und CGB liefern (§ 52), in

denen die Abstände AG, BG, CG des Punktes G von den drei Ecken des Dreiecks ABC die gleichen Seiten darstellen. Daher ist der mit diesem Abstande beschriebene Kreis um den Mittelpunkt G der dem Dreiecke ABC umbeschriebene Kreis. In dem gleichschenkligen Dreiecke AGC muss das Loth FG auch durch den Mittelpunkt G des Kreises gehen (§ 52).

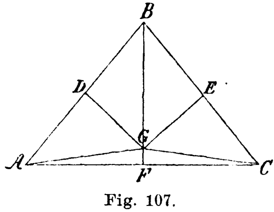


Fig. 107.

Setzen wir den Parallelwinkel als konstant, gleich einem Rechten, voraus, so schneiden die Lothe einander stets. Um das zu zeigen, ziehen wir blos die beiden Seiten AB und BC in Betracht (Fig. 108), denen die spitzen Winkel A und C gegenüberliegen. Die auf den Seiten AB und BC in deren Mitten errichteten Lothe DL und EM mögen durch die Fläche des Dreiecks gehen, ohne einander da zu treffen, während sie die dritte Seite AC in den Punkten H und K [47 schneiden, so dass die Verlängerungen HL und KM der Lothe mit dem zwischen ihnen liegenden Stücke HK der Seite AC die Winkel LHK und MKH bilden, die den Winkeln DHA und EKC in den rechtwinkligen Dreiecken ADH und KEC gleich sind. Bei diesen Neigungen gegen HK müssen aber die Linien HL und KM einander sicher schneiden (§ 101).

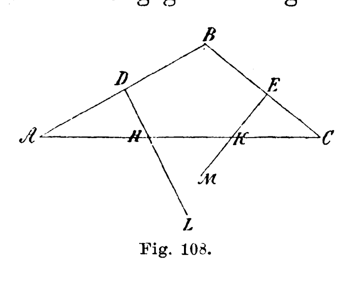


Fig. 108.

§ 111.

Unter der Voraussetzung veränderlicher Parallelwinkel können die in den Seitenmitten des Dreiecks errichteten Lothe entweder zusammentreffen, oder divergiren oder alle drei parallel sein.

In dem Dreiecke ABC (Fig. 109), wo die Winkel A und C spitz sind, muss die auf AC in der Mitte D errichtete Senkrechte DE, indem sie durch die Fläche des Dreiecks geht, entweder die beiden andern Seiten in deren gemeinsamem Punkte treffen oder wenigstens die grössere AB der Seiten irgendwo in E. Es sei ferner FG senkrecht auf AB in der Mitte F, und der Abstand FE dieser Mitte vom Punkte E sei gleich a. Wenn F zwischen die Punkte A und E fällt und überdies der Winkel $FED < \Pi(a)$ ist, so schneidet die Senkrechte FG die andre ED nothwendig irgendwo, sobald beide verlängert werden (§ 102), und

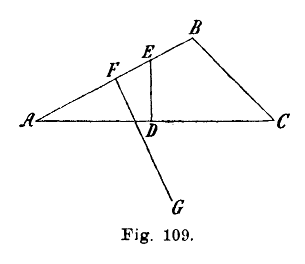


Fig. 109.

nach diesem Schnittpunkte geht daher auch die Senkrechte von der Mitte der dritten Seite BC. Ist dagegen $FED \geqq \Pi(a)$, so treffen die Senkrechten FG und DE nicht zusammen, und folglich ist es auch nicht möglich, dass sie die dritte schneiden. Wir werden jetzt zeigen, dass der Parallelismus zweier unter diesen Senkrechten stets mit [48 dem Parallelismus aller drei verbunden ist.

In dem Dreiecke ABC (Fig. 110) mögen die Senkrechten DE, FG von den Mitten D, F der Seiten AB, BC ausgehen, die den spitzen Winkeln A, C gegenüberliegen, und sie mögen innerhalb des Dreiecks mit HK, das auf der Seite AC in der Mitte H senkrecht steht, nicht zusammentreffen. Das wird der Fall sein, wenn DE und FG, indem sie durch das Dreieck hindurchgehen, die dritte Seite AC in zwei Punkten L und M schneiden, zwischen denen der Ausgangspunkt H der dritten Senkrechten HK enthalten ist. [315

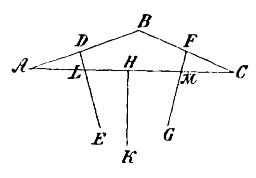


Fig. 110.

Auf diese Weise werden die ausserhalb des Dreiecks ABC liegenden Abschnitte LE, MG der Senkrechten DE, FG gegen LM unter spitzen Winkeln ELH, GMH geneigt sein. Wenn wir annehmen, dass DE und FG parallel sind, so trifft auch HK nicht mit ihnen zusammen, sondern muss, da es zwischen beiden enthalten ist, nothwendig zu ihnen parallel sein. In der That, wäre es möglich, von H aus eine andre Parallele zu LE und damit auch zu MG (§ 99) zu ziehen, so träfe HK mit einer von den Parallelen LE, MG zusammen.

Nehmen wir an, dass DE und HK parallel sind, so ist es nöthig, drei Fälle zu unterscheiden: $AB = BC$, $AB < BC$, $AB > BC$.

Im ersten dieser Fälle ist der Winkel $HLE = HMG$ und folglich MG sowie auch LE zu HK parallel.

Im Falle $AB < BC$ schneidet die Senkrechte HK (Fig. 111) [49 innerhalb des Dreiecks ABC die Seite BC irgendwo in N. Wir ziehen nach diesem Punkte von A aus die Gerade AN, machen deren Verlängerung NB' über N hinaus gleich NB und bilden so ein gleichschenkliges Dreieck BNB', in dem HN senkrecht durch die Mitte H' der Grundlinie BB' geht. In dem Dreiecke ABB' sind jetzt die beiden Senkrechten DE und $H'K$, die von den Mitten der Seiten AB und BB' ausgehen, parallel zu einander, folglich sind sie auch zu der Senkrechten PQ in der Mitte der dritten

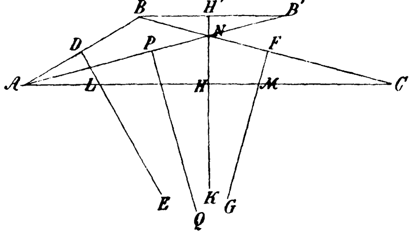


Fig. 111.

Seite AB' parallel, da aber der Winkel $PNK = FNK$ ist, so muss FG zu HK parallel sein.

Im Falle $AB > BC$ (Fig. 112) schneidet die in der Mitte von AC errichtete Senkrechte HK die Seite AB in einem Punkte N und trifft sodann in H' senkrecht auf die Mitte der Geraden BB', die wir erhalten, indem wir CNB' durch N ziehen und dabei $NB' = NB$ machen. Wenn wir jetzt auf AB und $B'C$ in den Mitten D und P die Senkrechten DE und PQ errichten, so erhalten wir den Winkel $PNK = DNK$, folglich müssen die drei Linien DE, NK, PQ alle drei parallel sein. Nun gehen in dem Dreiecke $B'BC$ die beiden [zu einander parallelen] Senkrechten $H'K$, PQ von den Mitten der Seiten BB', $B'C$ aus, und die dritte Senkrechte FG auf der Seite BC in der Mitte F wird ebenfalls zu KH' parallel sein, sobald $BB' < BC$ ist. Im entgegengesetzten Falle setzen wir:

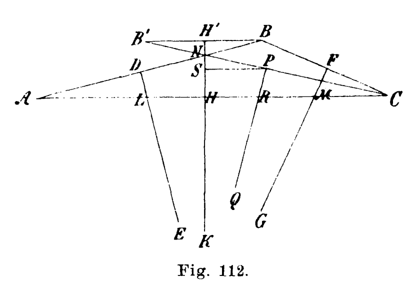


Fig. 112.

$$AB = a, \quad NP = b, \quad [HR = LH = c]$$

und finden:

$$\begin{aligned} BB' &= 2BH' \\ &< 2BN \\ &< 2DB - 2ND \\ &< a - 2NP \\ &< a - 2b. \end{aligned} \qquad [50$$

PQ möge AC in dem Punkte R schneiden und das von P aus [316 auf $H'K$ gefällte Loth treffe in dem Punkte S auf, dann ist: $NP > PS$, $> HR$ (§ 109). Indem wir so fortfahren und immer zu einem neuen Dreiecke übergehen, wie wir von dem Dreiecke ABC zu dem Dreiecke $B'BC$ übergegangen sind, ersetzen wir damit zugleich die Seite BB' durch eine Linie, die kleiner ist als $a - 2c - 2b < a - 4c$, sodann durch eine Linie, die kleiner ist als $a - 6c$, und schliesslich kommen wir bei dieser Verkleinerung zu einer Linie, die $< BC$ ist, folglich gelangen wir zu dem Falle, für den bewiesen ist, dass FG und HK parallel sind.

Kapitel VIII. [317 3

Gränzlinie, Gränzfläche und Gränzdreiecke.

§ 112.

Unter der Voraussetzung veränderlicher Parallelwinkel können wir uns eine Kurve vorstellen, die wir Gränzlinie nennen und bei der je zwei Parallelen zu einer gegebenen Geraden gegen die Sehne unter gleichem Winkel geneigt sind.

Vom Endpunkte A der Geraden AB aus (Fig. 113) ziehen wir nach allen Richtungen gerade Linien AC, die mit der gegebenen [4 Geraden AB spitze Winkel CAB bilden. Den veränderlichen Winkel CAB können wir als $\Pi(a)$ benutzen, so dass zu ihm eine Linie a gehört von $a = 0$ bis $a = \infty$ (§ 102). Machen wir jetzt $AC = 2a$, so erhalten wir Punkte C auf der Gränzlinie. Bei dieser ist demnach jede Gerade CD, die zu AB parallel ist, gegen AC wieder unter dem Winkel $\Pi(a)$ geneigt, unter dem AC gegen AB gezogen worden ist. Das Mittelloth EF der Sehne AC wird ebenfalls zu CD parallel sein, folglich muss die Senkrechte GH durch die Mitte G jeder andern Sehne CC ebenfalls zu AB [und zu CD] parallel sein (§ 111). Diese letztere Gerade, die sich somit von AB und von allen Geraden CD nicht unterscheidet, werden wir eine Axe der Gränzlinie nennen.

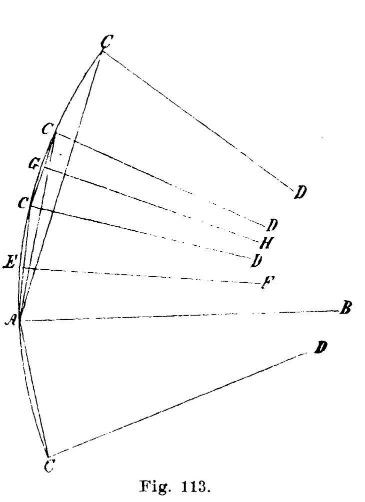


Fig. 113.

Die erste Eigenschaft, die sich jetzt bei der Gränzlinie von selbst darbietet, ist die, dass ihre Bogen, wohin sie auch auf der Gränzlinie gebracht werden mögen, mit der Kurve zusammenfallen, sobald das von den Axen gilt, sogar dann, wenn die Ebene auf die andre Seite umgewendet wird. Diese Eigenschaft der Bogen auf der Gränzlinie weist bei der Vergleichung der Bogen unter einander auf dasselbe Messverfahren hin, wie das ist, vermöge dessen wir das Verhältniss von geraden Linien und von geradlinigen Winkeln finden.

Als zweite Eigenschaft der Gränzlinie wollen wir noch erwähnen, dass das in der Sehnenmitte errichtete Loth stets zu der Axe parallel ist. Hieraus folgt, dass ein Kreis, der mit einer Gränzlinie zusammentrifft, diese entweder berühren oder sie in höchstens zwei Punkten schneiden [5

kann. Der erste Fall tritt dann ein, wenn der Kreis durch den [318 Endpunkt der Axe geht, auf der sein Mittelpunkt liegt. In zwei Punkten müssen Gränzlinie und Kreis einander dann schneiden, wenn wir die erste, deren Sehnen ohne Gränzen wachsen, im Innern der Kreisfläche konstruiren. Dass endlich eine Gränzlinie einen Kreis in drei Punkten schneide, ist deshalb unmöglich, weil die Sehnen der ersten solche Dreiecke bilden, um die sich kein Kreis beschreiben lässt (§ 111).

§ 113.

Unter der Voraussetzung rechter Parallelwinkel geht der Kreis bei wachsendem Durchmesser in eine gerade Linie über.

Es sei AB (Fig. 114) eine Gerade, auf der AC und BD senkrecht stehen. Wie klein auch die Linie BD sein mag, immer können wir einen Kreis finden, der durch den einen Endpunkt A der gegebenen Geraden AB geht und sich von dem andern im Abstande BD befindet. Wir brauchen nur die Gerade AD in E zu halbiren und hier die Senkrechte EC auf ihr zu errichten, die nunmehr AC im Mittelpunkte des verlangten Kreises schneidet.

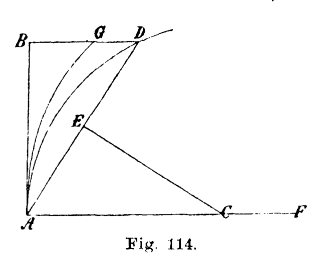


Fig. 114.

Wenn wir AC über den Punkt C hinaus verlängern und hier irgendwo einen Mittelpunkt F annehmen, so wird der mit dem Halbmesser AF beschriebene Kreis BD in G zwischen den äussersten Punkten B und D [6 schneiden. Hieraus ist zu ersehen, dass sich bei wachsendem Halbmesser AC der Kreis AD seiner Tangente AB soweit nähert, dass die Abstände zwischen beiden schliesslich verschwinden.

§ 114.

Unter der Voraussetzung veränderlicher Parallelwinkel geht der Kreis bei wachsendem Durchmesser in eine Gränzlinie über.

Es sei ABC (Fig. 115) eine Gränzlinie und AD, CE seien Axen, die mit der Sehne AC gleiche Winkel α bilden (§ 112) und deren Abstände, wie wir wissen (§ 109), auf der Seite des Parallelismus abnehmen und schliesslich kleiner werden als jede gegebene Linie. Wir können demnach um einen Punkt F auf der Axe AD einen Kreis mit einem so grossen Halbmesser AF beschreiben, dass dieser nicht nur die Sehne AC in den Punkten A und G schneidet, sondern auch die andre Axe CE irgendwo in H. Die beiden Halbmesser AF und GF werden dann mit der Sehne AG des Kreises Winkel gleich α bilden;

die beiden Halbmesser GF und HF werden gegen die zwischen ihnen liegende Sehne GH unter irgend einem Winkel β geneigt sein und der letzte Halbmesser HF innerhalb des Kreises gegen die Axe CE unter einem Winkel γ.

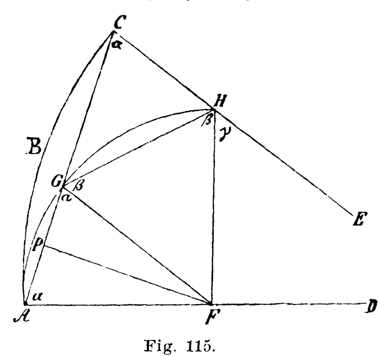


Fig. 115.

In dem Dreiecke CGH entstehen so die Winkel $CGH = \pi - \alpha - \beta$ und $CHG = \pi - \beta - \gamma$, wo α konstant ist, β und γ aber sich bei der Bewegung des Punktes F ändern. Diesen Punkt können wir immer so weit entfernt annehmen, dass der Winkel γ kleiner ausfällt als jeder gegebene, sogar dann, wenn der Punkt H an seinem Platze bleibt, um so [7 kleiner also, wenn sich H bei wachsendem Halbmesser des [319 Kreises dem Endpunkte C der Axe nähert. Es sei daher $\alpha > \gamma$, demnach $\pi - \beta - \alpha < \pi - \beta - \gamma$ und die Linie $CH < CG$; aber die letztere kann beliebig klein gemacht werden, weil die in der Mitte P von AG errichtete Senkrechte stets, indem sie AD schneidet, für jede Sehne $AG < AC$ den Mittelpunkt des Kreises bestimmt.

Die Gränzlinie können wir daher ebenso wie die gerade Linie (§ 113) als einen Kreis mit unendlichem Halbmesser betrachten, jenachdem wir die eine oder die andre Voraussetzung über die Parallelwinkel zulassen wollen.

§ 115.

Die Sehnen zweier Bogen auf einer Gränzlinie und auf einem diese berührenden Kreise unterscheiden sich um so weniger von einander, je grösser der Durchmesser des Kreises ist, so dass bei wachsendem Durchmesser der Unterschied schliesslich verschwindet.

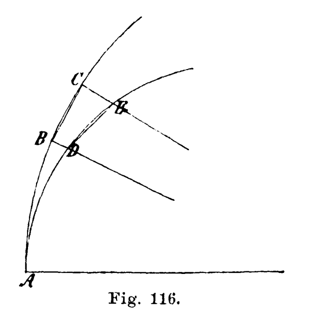


Fig. 116.

Es sei ABC (Fig. 116) eine Gränzlinie, ADE ein sie berührender Kreis; die Axen CE und BD, die von den beiden Punkten B und C auf der Gränzlinie ausgehen, mögen den Kreis in D und E treffen, indem sie auf der Gränzlinie und dem Kreise die Bogen BC und DE ausschneiden, denen die Sehnen $BC = \alpha$ und $DE = \beta$ entsprechen, die durch die Stücke: $CE = \gamma$ und $BD = \delta$ der beiden Axen verbunden sind. In dem Vierecke $BDEC$ ist (§ 55):

$$\alpha < \beta + \gamma + \delta, \quad \beta < \alpha + \gamma + \delta. \qquad [8$$

Hieraus folgt, dass die Differenz $\alpha - \beta$ ihrer Grösse nach kleiner ist als die Summe $\gamma + \delta$, in der sowohl γ als δ bei wachsendem Halbmesser kleiner gemacht werden kann als jede gegebene Linie (§ 114).

In diesem Satze können wir unter der Gränzlinie sowohl die gerade als auch die krumme Linie verstehen.

§ 116.

Das Verhältniss zweier Bogen auf einer Gränzlinie unterscheidet sich von dem Verhältnisse der zwei Bogen, die auf dem berührenden Kreise zwischen den zugehörigen Axen liegen, um so weniger, je grösser der Durchmesser ist, und bei wachsendem Durchmesser verschwindet schliesslich der Unterschied.

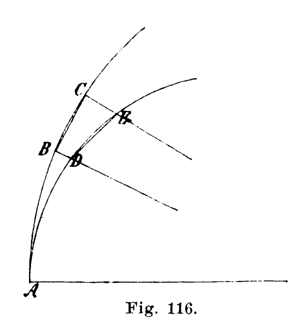


Fig. 116.

Das Verhältniss zweier Bogen auf der Gränzlinie sowohl wie auf dem Kreise wird gefunden, indem wir sie beide in gleiche Theile theilen (§ 112). Solchen Theilen möge auf der Gränzlinie die Sehne $BC = \alpha$ entsprechen (Fig. 116), die wir auf den berührenden Kreis übertragen, indem wir sie von dem Punkte D aus anlegen, durch den die vom Endpunkte B der Sehne BC ausgehende Axe geht, während die vom andern Endpunkte C ausgehende Axe auf dem berührenden Kreise in E einen Bogen mit der Sehne $DE = \beta$ abschneidet.

[320 / 9] Es seien jetzt in dieser Lage $AB = \alpha$ und $AC = \beta$ (Fig. 117) die beiden Sehnen, D der Mittelpunkt des berührenden Kreises, von dem aus die Lothe DE, DF auf die Mitten E, F der beiden Linien AB, AC gefällt sind, so dass die rechtwinkligen Dreiecke AED, AFD entstehen, wo der Winkel EAD grösser als FAD oder kleiner oder diesem gleich ist, jenachdem: $\alpha < \beta$, $= \beta$, $> \beta$. Wir wollen voraussetzen, dass α und β nicht gleich sind und überdies $\alpha < \beta$ annehmen, da keiner von beiden Fällen einen Unterschied im Beweise bedingt.

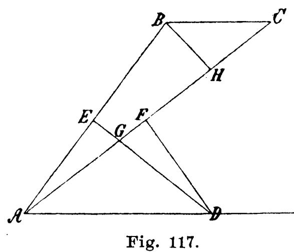


Fig. 117.

Das Loth DE muss infolgedessen AF irgendwo in G schneiden, so dass $AG > AE$ ist und demnach: $2FG < 2AF - 2AE$, $< \beta - \alpha$. Hieraus schliessen wir, dass der Abstand FG durch Vergrösserung des Halbmessers AD beliebig klein gemacht werden kann (§ 115). Wenn wir ferner die rechtwinkligen Dreiecke AEG und DFG vergleichen, indem wir GF auf GE, GD

auf GA legen, so erkennen wir leicht, dass, sobald $GD > AG$ ist, auch $GF > GE$ ist. Jedoch $AG + GD > AD$, während der Unterschied von AG und AE kleiner werden kann als jede gegebene Linie; folglich kommen wir durch Vergrösserung von AD schliesslich soweit, dass AG kleiner wird als GD und gleichzeitig $EG < GF$. Bei wachsendem Halbmesser AD verschwindet daher das Loth EG und mit ihm der Winkel EAG. Machen wir jetzt $AH = AB$, so erhalten wir ein Dreieck HBC, in dem, wie wir gesehen haben (§ 115), die Seite HC bei wachsendem Halbmesser AD unbegränzt abnimmt und die andre Seite BH ebenfalls, wenn der Winkel BAH verschwindet; die dritte Seite BC endlich, die $< BH + HC$ ist, kann weniger [*10* betragen als den m-ten Theil der Sehne AC, wie gross auch die ganze Zahl m sein mag. In diesem Falle wird sich das Verhältniss der den Sehnen AC, BC entsprechenden Centriwinkel des Kreises [von Eins] noch weniger unterscheiden, als der Bruch $1 : m$ angiebt, wenn wir daher die Sehne α auf den berührenden Kreis legen, so müssen wir für je zwei Bogen dasselbe Verhältniss finden, das für die auf der Gränzlinie zwischen denselben Axen liegenden Bogen gefunden worden ist.

§ 117.

Das Verhältniss zweier Bogen s und s' auf zwei Gränzlinien zwischen zwei Parallelen, die Axen der Gränzlinien sind, hängt von dem Abstande x der Bogen so ab, dass

$$s = s' . e^x, \tag{6}$$

ist, wo die Konstante $e > 1$ ist, wenn s' von s aus nach der Richtung des Parallelismus zu liegt.

Es seien AB und CD (Fig. 118) zwei Parallelen, die zu den zwischen ihnen liegenden Bogen: $EF = s$, $E'F' = s'$ zweier Gränzlinien als Axen gehören, so dass s' von s aus nach der Seite des Parallelismus hin (§ 109) liegt. Wir setzen den Abstand: $FF' = EE' = x$ (§ 112) und denken uns diesen in gleiche Stücke ab getheilt, die für die Zahl x als Einheiten genommen werden.

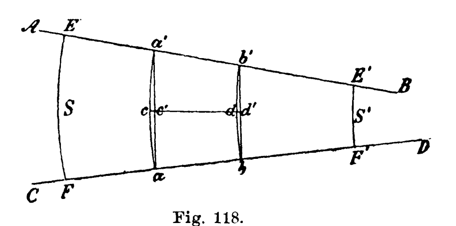


Fig. 118.

Wir wollen bemerken, dass das Verhältniss e des Bogens, [321 *11*] der von dem Punkte a auf der Axe ausgeht zu dem Bogen, der von dem andern Punkte b ausgeht, konstant sein muss, von welcher Parallelen cd, $a'b'$ zu ab die beiden Bogen auch begränzt werden

mögen. In der That, wenn wir das Verhältniss e durch den Bruch $n:m$ mit den ganzen Zahlen n und m darstellen, wenn wir ferner das Verhältniss der beiden Bogen ac, $a'c$ auf der einen Gränzlinie als das Verhältniss der ganzen Zahlen p und q betrachten und sodann ac in np, ca' in nq gleiche Theile theilen und von den Theilpunkten aus Parallelen zu ab ziehen, so erhalten wir auf den entsprechenden Bogen bd, db' je np und nq gleiche Theile; daraus aber schliessen wir, dass das Verhältniss des Bogens ac zu $a'c$ denselben Werth $p:q$ hat, wie das des Bogens bd zu $b'd$.

Nachdem wir das bewiesen haben, stellen wir uns vor, der ganze Abstand FF' sei in x gleiche Theile getheilt, und denken uns dann von jedem Theilpunkte aus einen Gränzlinienbogen zwischen den beiden Axen AB und CD; alsdann erhalten wir, indem wir der Reihe nach von dem ersten s zum zweiten, zum dritten und so fort übergehen, $e^{-1}s$, $e^{-2}s, \ldots,$ bis wir im Abstande $FF' = x$ zu dem Bogen: $s' = s \,.\, e^{-x}$ gelangen.

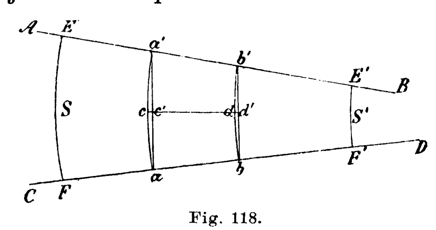


Fig. 118.

Hier müssen wir die Zahl e grösser als Eins annehmen, damit der folgende Bogen s', der von s aus nach der Seite des Parallelismus hin liegt, kleiner als s wird. Es gehe nämlich die Richtung des Parallelismus der beiden Geraden AB, CD von den Endpunkten A, C nach B, D hin. Wir ziehen irgendwo von AB nach CD zwei Gränzlinienbögen aa', bb', die in den Punkten c, d halbirt sind, so dass [12 also durch diese Punkte eine Gerade cd gehen muss, die wieder zu ab parallel ist und in den Mitten c', d' der zu den beiden Bogen gehörigen Sehnen auf diesen senkrecht steht. Hier ist die Senkrechte $ac' > bd'$, ferner gilt für die Sehnen selbst: $aa' > bb'$, sobald bb' von aa' aus nach der Seite des Parallelismus hin liegt (§ 109). Jedoch die Erzeugung der Gränzlinie erfordert, dass mit wachsender Sehne auch der Bogen selbst wächst (§ 112), folglich ist der Bogen $aa' > bb'$.

Die Wahl der Einheit für die geraden Linien ist vollständig willkürlich, wir können deshalb auch e gleich einer beliebigen Zahl setzen, wofern nur $e > 1$ ist, wie zum Beispiel die Grundzahl der Neperschen Logarithmen.

Sollen die beiden Voraussetzungen über die Parallelwinkel in allgemeinen Formeln zusammengefasst werden, so müssen wir die Zahl e unbestimmt lassen und es würde sich dabei $e > 1$ auf den einen, $e = 1$ auf den andern Fall beziehen. Für rechte Parallelwinkel, also für

$e = 1$ ergiebt die Gleichung (6) daher $s = s'$, oder die Gleichheit der Lothe zwischen zwei Parallelen.

Die Zahl e dürfen wir auch in dem einen wie in dem andern Falle bestimmt wählen, indem wir für sie zum Beispiel die Grundzahl der Neperschen Logarithmen nehmen, aber dann werden in der [322 / 13] gewöhnlichen Geometrie alle Linien unendlich klein, so dass sie in allen Gleichungen nur in ihren Verhältnissen zu einander auftreten. Zum Beispiel ergiebt die Gleichung (6) für $x = 0$ wieder $s = s'$, die Gleichheit der Senkrechten zwischen Parallelen.

§ 118.

Eine Gränzfläche liefert, wenn sie von den durch eine gewisse Gerade gehenden Ebenen geschnitten wird, Gränzlinien; diese Gerade werden wir Axe der Gränzfläche nennen und die Ebenen selbst Durchmesserebenen.

Hieraus folgt, dass die Gränzfläche die Gränze sein muss, der sich eine Kugelfläche bei wachsendem Halbmesser nähert, während die grössten Kreise auf der Kugelfläche in Gränzlinien übergehen.

Man kann sich daher die Gränzfläche als die Oberfläche vorstellen, die durch Drehung einer Gränzlinie um deren Axe entsteht. Unter der Voraussetzung rechter Parallelwinkel wird die Gränzfläche eine Ebene sein, bei der andern Voraussetzung muss man sie als eine krumme Fläche betrachten.

§ 119.

Eine Ebene schneidet eine Gränzfläche entweder in einer Gränzlinie oder in einem Kreise, je nachdem sie durch eine Parallele zur Axe geht oder nicht.

Es seien A, B, C (Fig. 119) drei Punkte auf einer Gränzfläche. Von A möge die [14 Axe AA' ausgehen, die beiden andern B und C mögen nicht mit A auf einer Gränzlinie liegen. Wir denken uns von diesen aus zu AA' die Parallelen BB' und CC' nach der einen Seite der Ebene des Dreiecks ABC gezogen, so dass also alle drei Linien AA', BB', CC' unter einander parallel sind und je zwei in einer Ebene liegen (§ 99). Wir halbiren AC, ziehen von der Mitte D aus zu AA' die Parallele DD', ferner in der Ebene des Dreiecks ABC zu AC die Senkrechte QD, die wir so gross wählen, dass

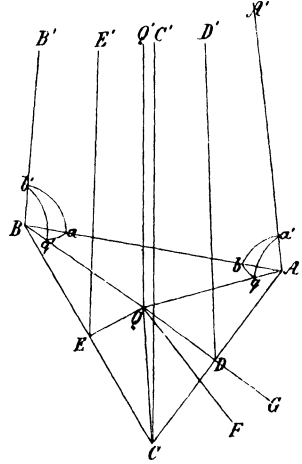


Fig. 119.

die im Endpunkte Q auf der Ebene des Dreiecks ABC errichtete Senkrechte QQ' zu DD' parallel wird (§ 102) und folglich auch zu AA', BB' und CC' (§ 99).

Durch QQ' und durch jede der drei Parallelen AA', BB', CC' denken wir uns Ebenen gelegt, die die Ebene des Dreiecks ABC in den Linien AQ, BQ, CQ senkrecht schneiden müssen (§ 59). Zwei Kugelflächen um die Punkte A und B erzeugen dann, indem sie die Ebene des Dreiecks AQB und die Ebenen der Linien AA', BB', QQ' schneiden, die sphärischen Dreiecke $b'aq'$ und $ba'q$, die kongruent sind, weil ausser den rechten Winkeln noch die Seite $b'a = ba'$ ist (§ 112), der Winkel $b'aq' = a'bq$ und überdies die Seite $qa' < \frac{1}{2}\pi$, $b'q' < \frac{1}{2}\pi$ (§ 88); demnach ist die Seite $a'q = b'q'$ und hiernach: $AQ = BQ$. Ebenso könnten wir beweisen, dass $AQ = CQ$ ist, woraus wir schliessen, dass den gleichen Seiten BQ, CQ gegenüber die Winkel QBC und QCB gleich sind.

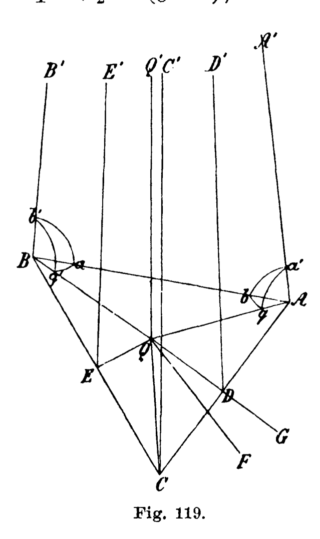


Fig. 119.

Nunmehr muss das von Q aus auf [323 BC gefällte Loth QE in der Mitte E auftreffen, die Ebene $Q'QE$ muss die Ebene der Parallelen BB', CC' in der zu BC [15 senkrechten Linie EE' schneiden (§ 59), folglich ist der Winkel $B'BC = C'CB$ (§ 102).

Sollte der Winkel $D'DQ$ gleich einem Rechten ausfallen, so würde sich der Punkt Q mit D in der Mitte der Seite AC vereinigen. Sollte der Winkel $D'DQ > \frac{1}{2}\pi$ sein, so müssten wir an Stelle von DQ die Linie DG nehmen, die auf der andern Seite von AC, ausserhalb des Dreiecks ABC zu dem Winkel $\pi - D'DQ$ gehört (§ 102). In allen diesen Fällen ändert sich der Beweis seinem Wesen nach nicht und führt zu dem Schlusse, dass eine zur Axe AA' parallele Ebene die Gränzfläche in Punkten B, C schneidet, die einer bestimmten Gränzlinie angehören. Daher ist es ganz gleich, von welchen Punkten B, C der Gränzfläche aus wir Parallelen zu AA' ziehen, sie sind sämmtlich Axen und die durch sie gelegten Ebenen sind Durchmesserebenen.

Mit der Gränzfläche deckt sich auf diese Weise jeder ihrer Theile, wohin er auch mit dreien seiner Punkte gebracht werden mag.

Wenn jetzt eine Ebene durch drei beliebige, auf der Gränzfläche angenommene Punkte A, B, C geht, ohne zu den Durchmesserebenen zu gehören, so wird für jeden vierten der Fläche und der Ebene

gemeinsamen Punkt F die hindurchgehende Parallele zu AA' auch zu dem Lothe QQ' parallel sein, und folglich wird der Abstand FQ [16 des Punktes F von dem Ursprunge Q des Lothes auf der Ebene wieder so gross sein wie die Abstände AQ, BQ, CQ. Daher ergiebt der Schnitt zwischen einer Ebene, die keine Durchmesserebene ist, und der Gränzfläche einen Kreis, der seinen Mittelpunkt in Q hat.

§ 120.

Eine auf einer Gränzfläche liegende Gränzlinie zeigt uns alle die Eigenschaften, die den geraden Linien auf einer Ebene unter der Voraussetzung konstanter Parallelwinkel zukommen, folglich dieselben Eigenschaften, die in der gewöhnlichen Geometrie angenommen sind. Der Unterschied besteht nur darin, dass auf der Ebene die Lage zweier Geraden durch einen geradlinigen Winkel bestimmt wird, während auf der Gränzfläche die Neigung einer Gränzlinie gegen eine andre durch den Ebenenwinkel zwischen den beiden Durchmesserebenen gemessen wird, auf denen die Bogen selbst liegen.

Aus diesem Grunde können bei Gränzlinien, die auf einer krummen Gränzfläche gezogen sind, alle Benennungen beibehalten werden, die sich auf die gegenseitige Lage gerader Linien beziehen. Senkrechte wird wieder eine solche Gränzlinie heissen, die eine andre so trifft, dass sie auf beiden Seiten rechte Winkel bildet. Parallele Linien werden solche sein, die, wie weit sie auch verlängert werden, niemals zusammentreffen. Eine dritte Gränzlinie schneidet sie unter demselben Winkel, wie auch umgekehrt zwei Gränzlinien, die von einer dritten unter demselben Winkel geschnitten werden, parallel [17 sein müssen (§ 101) oder, was ganz dasselbe ist, sie sind [324 parallel, wenn die Summe der inneren Winkel π ergiebt.

§ 121.

Von Gränzlinien auf einer Gränzfläche werden solche Dreiecke gebildet, in denen die Summe der drei Winkel π ist (§ 100); wir werden diese Gränzdreiecke nennen.

Wir wollen noch die Aufmerksamkeit darauf lenken, dass wir alle Eigenschaften der geradlinigen Dreiecke, wenn in ihnen die Summe der drei Winkel gleich π vorausgesetzt wird, bis jetzt einzig und allein auf Grund dessen abgeleitet haben, dass die Schenkel gleicher Winkel einander decken, wenn man die Dreiecke mit der einen oder der andern Seite auf einander legt. Auch bei Gränzdreiecken folgen die Seiten des einen der Richtung der Seiten des andern, sobald wir die Ebenenwinkel als gleich voraussetzen. Was sich auf die Betrachtung des

Dreiecks von der gegenüberliegenden Seite bezieht, das wird hier durch die Konstruktion des symmetrischen Dreiecks ersetzt, unter dem wir, wie auch auf der Kugelfläche (§ 44) ein solches verstehen werden, bei dem die Seiten in andrer Richtung auf einander folgen.

Das symmetrische geradlinige Dreieck erhalten wir, indem wir die Ebene des ursprünglichen Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite umlegen. Das symmetrische sphärische Dreieck ist dasselbe wie der Scheitelwinkel eines körperlichen Winkels und entsteht durch Fortsetzung der Ebenen über den Mittelpunkt der Kugelfläche hinaus. [*18* Endlich geht jedes geradlinige, sphärische oder Gränzdreieck in ein dazu symmetrisches über, wenn wir es durch gleiche Lothe, die von einem Punkte aus auf die Seiten gefällt sind, zerlegen und die drei Theile in neuer Ordnung zusammenfügen.

In dem Dreiecke ABC (Fig. 120) halbiren wir die beiden Winkel A und B, indem wir die Linien AD und BD bis zu ihrem Schnittpunkte D ziehen, und fällen von D aus die Lothe DE, DF, DG auf

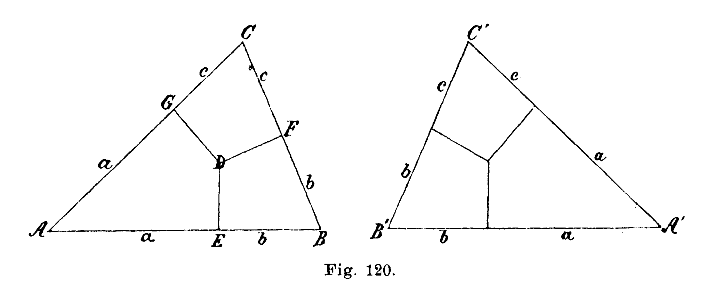


Fig. 120.

die Seiten AB, BC, AC. So entstehen die Dreiecke: $ADE \backsimeq AGD$, $DEB \backsimeq BDF$ (§ 87), folglich ist $DE = DF = DG$, auch wenn die Dreiecke sphärisch sein sollten, denn bei diesen sind von den Seiten um D herum keine zwei zusammen gleich π (§ 88). So kann man in jedem Dreiecke den Mittelpunkt D des Kreises mit dem Halbmesser DE finden, der alle Seiten berührt. Wenn wir jetzt mit a die beiden gleichen Linien AE und AG bezeichnen, sodann mit b die gleichen Linien BE und BF, endlich mit c die gleichen Linien CG und CF, so erhalten wir, indem wir die Vierecke $AGDE$, $BEDF$, $FDGC$ in neuer Ordnung zusammensetzen, das Dreieck $A'B'C'$, das zu dem früheren ABC symmetrisch ist.

Alles, was bis jetzt über die geradlinigen Dreiecke unter der Voraussetzung, dass die Summe der drei Winkel π ist, gesagt worden ist, dehnt sich also nunmehr ohne Einschränkung auf Gränzdreiecke aus.

Die Fälle, in denen Gränzdreiecke kongruent sind, werden [325 / *19*] die sein, wo bei ihnen folgende Stücke gleich sind:

1) Die drei Seiten (§ 82).

2) Zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel (§ 81).

3) Zwei Seiten und der der grösseren gegenüberliegende Winkel (§ 84).

4) Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel (§ 81).

5) Eine Seite, der eine anliegende Winkel und ausserdem der ihr gegenüberliegende (§ 87).

Parallele Linien zwischen den Schenkeln eines Winkels verhalten sich wie die Abschnitte der Seiten.

Im rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der Katheten.

Es ist künftig nicht mehr nöthig, ein Gränzdreieck oder überhaupt ein Gränzvieleck von einem geradlinigen Dreiecke oder Vielecke zu unterscheiden, sobald wir in dem geradlinigen Dreiecke π als die Summe der drei Winkel zulassen, es sei denn, dass die Nothwendig- [20 keit vorliegt, darauf aufmerksam zu machen, ob die Seiten gerade oder gekrümmt sind. So werden wir im folgenden Paragraphen sowie auch in dem ganzen folgenden Kapitel über die trigonometrischen Funktionen von geradlinigen Dreiecken der gewöhnlichen Geometrie sprechen, obgleich wir darunter streng genommen eigentlich die auf einer Gränzfläche liegenden Dreiecke der imaginären Geometrie verstehen müssten, falls wir gar keine willkürlichen Annahmen zulassen wollen.

§ 122.

Aehnliche Dreiecke nennt man solche, deren Winkel gleich sind und bei denen zugleich das Verhältniss der diesen gegenüberliegenden Seiten übereinstimmt. In diesem Falle sagt man, dass die Seiten proportional sind. Zwischen ähnlichen Dreiecken werden wir das Zeichen $\backsim$ setzen und uns überdies in derselben abkürzenden Weise ausdrücken, wie schon bei der Kongruenz der Dreiecke (§ 81).

Dreiecke sind ähnlich, wenn bei ihnen folgende Stücke gleich sind:

1) Zwei Winkel.

2) Das Verhältniss zweier Seiten und der Winkel zwischen diesen.

3) Das Verhältniss zweier Seiten und der der grösseren gegenüberliegende Winkel.

4) Die Verhältnisse der drei Seiten.

In dem einen Dreiecke P bezeichnen wir die Seiten mit [326 21] a, b, c, die ihnen gegenüberliegenden Winkel mit A, B, C, in dem

andern Q die Seiten mit a', b', c', die ihnen gegenüberliegenden Winkel mit A', B', C'.

Es sei: $A = A'$, $B = B'$, folglich: $C = C'$. Das Dreieck P legen wir auf das zweite Q mit dem Winkel A auf A' und so, dass die Seite b auf b' fällt, folglich auch c auf c'. Die beiden Linien b und b' decken einander in dem Falle: $b = b'$ oder: $c = c'$, weil dann die Dreiecke selbst kongruent sind (§ 81). Ist andrerseits b nicht gleich b', c nicht gleich c', so werden die Linien a und a' parallel (§ 101), demnach muss das Verhältniss der Seiten im einen Dreiecke dasselbe sein, wie im andern (§ 104) und die Dreiecke selbst sind ähnlich.

Es sei:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \quad C = C'.$$

Wir konstruiren noch ein Dreieck R, indem wir a als Seite und B', C' als die anliegenden Winkel benutzen, was immer möglich ist, weil $B' + C' < \pi$ (§ 101). Nach dem eben Bewiesenen sind die Dreiecke Q und R ähnlich, folglich ist in R die B' gegenüberliegende Seite b und der Winkel in R zwischen a und b muss $C' = C$ sein, demnach sind die Dreiecke P und R kongruent (§ 121) und endlich $P \backsim Q$.

Es sei: [22

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \quad a > b, \quad A = A'.$$

Wir konstruiren ein Dreieck R, indem wir a, b als Seiten und C' als zwischenliegenden Winkel benutzen. Dann ist $R \backsim Q$, wie vorhin bewiesen, in R muss daher $A' = A$ der a gegenüberliegende Winkel sein, demnach ist: $P \cong R$ (§ 84, 121) und: $P \backsim Q$.

Es sei:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Wir konstruiren ein Dreieck R mit den Seiten a, b und dem zwischenliegenden Winkel C'. In diesem Falle ist $R \backsim Q$, folglich muss in R die dritte, dem Winkel C gegenüberliegende Seite c sein, demnach ist: $R \cong P$ (§ 82, 121) und: $P \backsim Q$.

Ueberhaupt heissen Vielecke **ähnlich**, wenn bei ihnen alle Seiten proportional, alle Winkel gleich sind und überdies die Seiten in derselben Ordnung auf einander folgen, wie die gleichen Winkel.

Aus ähnlichen Dreiecken lassen sich ähnliche Vielecke zusammensetzen. Wenn wir zum Beispiel von den Ecken aus nach einem Punkte gerade Linien und sodann zwischen diesen zu den Seiten des Vielecks Parallelen ziehen, so dass eine an die andre stösst, so erhalten wir ein neues, dem gegebenen ähnliches Vieleck. [327 23

Kapitel IX.

[328
24

Die trigonometrischen Funktionen.

§ 123.

Im rechtwinkligen Dreiecke nennen wir die Hypotenuse c, die Katheten a und b, die diesen gegenüberliegenden Winkel A und B. Die Verhältnisse $a:c$ und $b:c$ der Katheten zur Hypotenuse hängen von dem Winkel A ab oder, was ganz dasselbe ist, von dem Winkel $B = \frac{1}{2}\pi - A$ (§ 100, 104, 121), so dass $a:c$ und $b:c$ zugleich mit den Winkeln A und B konstant bleiben oder sich ändern. Diese Abhängigkeit des Verhältnisses $a:c$ von dem Winkel A nennt man Sinus und schreibt:

$$\frac{a}{c} = \sin A. \tag{7}$$

Um den Namen Sinus überhaupt auf jeden Winkel auszudehnen, durch welche Zahl dieser auch ausgedrückt sein möge und sei sie negativ, nehmen wir zur Ergänzung der Gleichung (7) an:

$$\begin{cases} \sin 0 = 0 \\ \sin \frac{1}{2}\pi = 1, \end{cases} \tag{8}$$

$$\sin A = \sin(\pi - A), \tag{9}$$

$$\sin(n\pi + A) = (-1)^n \sin A, \tag{10}$$

$$\sin(-A) = -\sin A. \tag{11}$$

Die Gleichungen (8) vervollständigen die Werthe des Sinus [25 im ersten Quadranten. Die Gleichung (9) ergiebt den Werth des Sinus für jeden stumpfen Winkel $\pi - A$ bis zum Winkel π; die Gleichung (10), in der n eine positive ganze Zahl ist, bezieht sich auf die Sinus aller Winkel $n\pi + A > \pi$; mit Hülfe der Gleichung (11) finden wir die Sinus aller negativen Winkel $-A$.

Es ist hier der Ort etwas über geometrische Erklärungen zu [329 sagen, die von besondern Fällen auf alle übrigen ausgedehnt werden sollen. Obgleich nichts hindert, eine solche Erweiterung des Begriffs vollständig willkürlich zu lassen, so wird man doch zu erreichen suchen, dass der Werth jeder geometrischen Grösse von den allgemeinen analytischen Formeln umfasst werde, und dazu ist es erforderlich, jederzeit die Stetigkeit und den gleichmässigen Uebergang von dem einen Falle zum andern einzuhalten. So sind die Gleichungen (8) deshalb genommen, weil in der Gleichung (7) der Winkel A zugleich mit der Linie a abnimmt und beide sogar beliebig klein gemacht werden

können, während, wenn der Winkel A zugleich mit der Linie a wächst, A sich dem Werthe $\frac{1}{2}\pi$, a dem Werthe c nähert.

Die Gleichung (10) ergiebt die Sinus in dem Gebiete der Winkelwerthe von $n\pi$ bis $(n+1)\pi$, wo n eine [positive] ganze Zahl ist. Wenn wir jetzt $A = \pi$ setzen, so erhalten wir:

$$\sin(n+1)\pi = (-1)^n \sin\pi = 0.$$

Wenn wir andrerseits $n+1$ an die Stelle von n setzen, während $A = 0$ ist, so finden wir wieder:

$$\sin(n+1)\pi = (-1)^{n+1} \sin\pi = 0.$$ [26

Endlich verwandelt sich die Gleichung (11) für $A = 0$ in:

$$\sin(-0) = -\sin 0, \quad \text{aber} \quad \sin(-0) = \sin 0,$$

folglich kommt auf jeder von beiden Seiten Null heraus. Wenn wir an Stelle eines positiven A einsetzen: $-A$, so nimmt Gleichung (11) die Gestalt an:

$$\sin A = -\sin(-A),$$

die mit der früheren übereinstimmt. Daher ist die Gleichung (11) für alle Werthe von A richtig, sowohl für positive als für negative als für $A = 0$.

Den Sinus von $\frac{1}{2}\pi - A$ nennt man für jeden Winkel A dessen Cosinus und schreibt:

$$\cos A = \sin(\tfrac{1}{2}\pi - A). \tag{12}$$

Das Verhältniss des Sinus zum Cosinus nennt man Tangente und das Verhältniss des Cosinus zum Sinus Cotangente. So schreibt man für jeden Winkel A:

$$\operatorname{tang} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \tag{13}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}. \tag{14}$$

Die letzte Gleichung kann man in einer andern Form darstellen: [27

$$\cot A = \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}\pi - A).$$

Die Gleichungen (12), (13), (14) ergeben in Verbindung mit [330 den Gleichungen (8):

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\pi = 1, \quad \cot\tfrac{1}{4}\pi = 1,$$
$$\cos 0 = 1, \quad \cos\tfrac{1}{2}\pi = 0,$$
$$\operatorname{tang} 0 = 0, \quad \cot 0 = \infty,$$
$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\pi = \infty, \quad \cot\tfrac{1}{2}\pi = 0.$$

Daher sind die Werthe der Sinus und der Cosinus zwischen den Gränzen $+1$ und -1 enthalten, die Werthe der Tangenten und der Cotangenten zwischen $-\infty$ und $+\infty$.

Sinus, Cosinus, Tangente und Cotangente nennt man die trigonometrischen Funktionen.

§ 124.

Was für ein Winkel auch A sein mag, immer ist:

$$\sin(\pi + A) = -\sin A. \tag{15}$$

Für $A = 0$ erhalten wir auf der einen Seite der Gleichung: [28 $\sin\pi = 0$ (Gl. (9)), auf der andern auch: $\sin 0 = 0$ (Gl. (8)).

Jeder positive Winkel A hat die Form $n\pi + \alpha$, wo n null oder eine ganze positive Zahl sein kann, während α entweder null ist oder ein positiver Winkel $< \pi$. Demnach ist (Gl. (10)):

$$\begin{aligned} \sin(\pi + A) &= \sin\{(n+1)\pi + \alpha\} \\ &= (-1)^{n+1} \sin\alpha. \end{aligned}$$

Andrerseits ist in Gleichung (15):

$$\begin{aligned} -\sin A &= -\sin(n\pi + \alpha) \\ &= (-1)^{n+1} \sin\alpha. \end{aligned}$$

Einen negativen Winkel A können wir auf ähnliche Weise gleich $-n\pi - \alpha$ setzen, wo $n = 0$ ist oder eine ganze positive Zahl und $\alpha = 0$ oder ein positiver Winkel $< \pi$. Wir unterscheiden dabei die drei Fälle: $n = 0$, $n = 1$, $n > 1$.

Für $n = 0$ (Gl. (9)) ist:

$$\begin{aligned} \sin(\pi + A) &= \sin(\pi - \alpha) \\ &= \sin\alpha. \end{aligned}$$

Ferner (Gl. (11)): [331 29

$$\begin{aligned} -\sin A &= -\sin(-\alpha) \\ &= \sin\alpha. \end{aligned}$$

Für $n = 1$ ist (Gl. (11)):

$$\begin{aligned} \sin(\pi + A) &= \sin(-\alpha) \\ &= -\sin\alpha \\ -\sin A &= -\sin(-\pi - \alpha) \\ &= \sin(\pi + \alpha) \\ &= -\sin\alpha. \end{aligned}$$

Für $n > 1$ ist (Gl. (11), (10)):

$$\begin{aligned} \sin(\pi + A) &= \sin\{-(n-1)\pi - \alpha\} \\ &= -\sin\{(n-1)\pi + \alpha\} \\ &= (-1)^n \sin\alpha \\ -\sin A &= -\sin\{-n\pi - \alpha\} \\ &= \sin(n\pi + \alpha) \\ &= (-1)^n \sin\alpha. \end{aligned}$$

Wenn wir in der Gleichung (15) für A setzen $-A$, so erhalten wir für jeden Winkel A (Gl. (11)):

(16) $$\sin(\pi - A) = \sin A.$$ [30

Indem wir hier A der Reihe nach gleich π, 2π, 3π und so fort setzen, schliessen wir allgemein für ganze, sowohl für positive als für negative Zahlen n (Gl. (11)):

(17) $$\sin n\pi = 0.$$

Wenn wir nun in der Gleichung (16) an die Stelle von A setzen: $\pi + A$, $2\pi + A$, $3\pi + A, \ldots$, so finden wir, dass die Gleichung (10) für alle ganzzahligen n und für alle beliebigen Winkel A richtig ist, nämlich:

(18) $$\sin(n\pi + A) = (-1)^n \sin A.$$

§ 125.

Was für ein Winkel auch A sein mag, immer ist:

(19) $$\cos(-A) = \cos A.$$

Entsprechend der Definition (§ 123) ist: [332

$$\cos(-A) = \sin(\tfrac{1}{2}\pi + A).$$

Ferner (Gl. (16)):

$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi + A) = \sin(\tfrac{1}{2}\pi - A)$$
$$= \cos A.$$

Hiernach ergeben die Gl. (11) und (19) für alle Winkel A (§ 123): [31

(20) $$\operatorname{tang}(-A) = -\operatorname{tang} A,$$

(21) $$\cot(-A) = -\cot A.$$

§ 126.

Für alle Winkel A und für alle ganzen, positiven oder negativen Zahlen n ist:

(22) $$\cos(n\pi + A) = (-1)^n \cos A.$$

Entsprechend der Definition (§ 123) ist:

$$\cos(n\pi + A) = \sin(\tfrac{1}{2}\pi - n\pi - A),$$

ferner (Gl. (11)):

$$\cos(n\pi + A) = -\sin(n\pi - \tfrac{1}{2}\pi + A),$$

sodann (Gl. (18)):

$$\cos(n\pi + A) = -(-1)^n \sin(-\tfrac{1}{2}\pi + A)$$
$$= (-1)^n \sin(\tfrac{1}{2}\pi - A)$$
$$= (-1)^n \cos A.$$

Die Verbindung der beiden Gleichungen (18) und (22) ergiebt [32 für alle Winkel A, sowie für alle ganzen Zahlen n (§ 123):

(23) $$\operatorname{tang}(n\pi + A) = \operatorname{tang} A,$$

(24) $$\cot(n\pi + A) = \cot A.$$

Aus den Gleichungen (18), (22), (23), (24) schliesst man leicht, dass der Werth einer trigonometrischen Funktion sich nicht ändert, wenn man zu dem Winkel 2π hinzufügt oder 2π davon abzieht.

§ 127.

Für alle Winkel A ist:

(25) $$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

Die Gleichungen (11) und (19) gestatten hier $-A$ an die [333 Stelle von A zu setzen, folglich braucht der Satz nur für $A = 0$ und für positive Winkel A bewiesen zu werden.

Ist $A = 0$, so erfüllen die Werthe: $\sin A = 0$ (Gl. (8)), $\cos A = 1$ (§ 123) die Gleichung (25). Ferner gestatten die Gleichungen (18) und (22) in der Gleichung (25) an die Stelle von A einzusetzen $A - n\pi$, wo n eine ganze Zahl ist, folglich bleibt die Gleichung nur für $A > 0, < \pi$ zu beweisen und wenn wir jetzt $\pi - A$ an die Stelle von $A > \frac{1}{2}\pi$ setzen und uns dabei auf die Gleichungen (16) und (22) stützen, so genügt es blos die Werthe von $A > 0$ bis $A < \frac{1}{2}\pi$ zu [33 betrachten, da $A = \frac{1}{2}\pi$ ergiebt: $\sin A = 1$, $\cos A = 0$ (§ 123).

In einem rechtwinkligen Dreiecke nennen wir die Katheten a und b, die gegenüberliegenden Winkel A und B, die Hypotenuse c. Wir erhalten (§ 123):

$$\frac{a}{c} = \sin A, \quad \frac{b}{c} = \sin B = \cos A.$$

Hieraus folgt (§ 121):

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1.$$

Zum Beispiel finden wir für $A = \frac{1}{4}\pi$:

$$\sin \tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Indem wir die Gleichung (25) durch $\sin^2 A$ oder durch $\cos^2 A$ dividiren, erhalten wir:

$$1 + \operatorname{tang}^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}, \quad 1 + \cot^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}.$$

Daher werden die Werthe aller trigonometrischen Funktionen be- [34 kannt sein, sobald wir die Werthe einer unter ihnen für die Winkel von Null bis $\frac{1}{4}\pi$ kennen.

§ 128.

Die Seiten des Dreiecks verhalten sich wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

Wir nennen in dem Dreiecke die Seiten a, b, c, die gegen- [334 überliegenden Winkel A, B, C. Es ist zu beweisen, dass:

$$a \sin B = b \sin A. \tag{26}$$

Ist $A = \frac{1}{2}\pi$, so ist $\sin A = 1$ und das Verhältniss $b : a$ stellt $\sin B$ dar (§ 123).

Ist $A < \frac{1}{2}\pi$, $B < \frac{1}{2}\pi$, so theilt das von der Ecke C aus auf die Seite c gefällte Loth p (Fig. 121) das Dreieck in zwei rechtwinklige: in dem einen ist b die Hypotenuse und A der Winkel der Kathete p gegenüber, in dem andern a die Hypotenuse und B der Winkel gegenüber der Kathete p, folglich ist (§ 123):

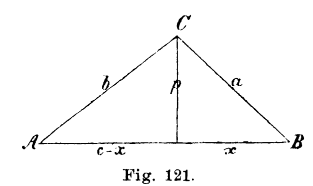


Fig. 121.

$$p = b \sin A, \quad p = a \sin B.$$

Ist $A > \frac{1}{2}\pi$, so fällt das Loth p ausserhalb des Dreiecks auf die Verlängerung der Seite c über den Scheitel des Winkels A hinaus (Fig. 122) und bestimmt wieder zwei recht- [35 winklige Dreiecke, von denen das eine die Hypotenuse a, die Kathete p und dieser gegenüber den Winkel B hat, das andre die Hypotenuse b, die Kathete p und dieser gegenüber den Winkel $\pi - A$. Da aber $\sin(\pi - A) = \sin A$ ist (Gl. (9)), so bestätigen in diesem Falle die Ausdrücke für das Loth p wieder die Gleichung (26).

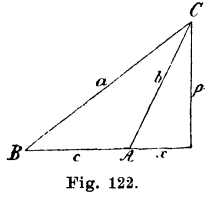


Fig. 122.

§ 129.

Für alle Winkel A, B ist:

$$\sin(A + B) = \sin A \,.\, \cos B + \cos A \,.\, \sin B. \tag{27}$$

Das ist richtig für $A = 0$, $A = \frac{1}{2}\pi$ und $A = \pi$. Im ersten Falle erhält man auf beiden Seiten $\sin B$. Für $A = \pi$ finden wir auf beiden Seiten: $-\sin B$ (Gl. (15)). Für $A = \frac{1}{2}\pi$ ist (Gl. (16)):

$$\begin{aligned}\sin(A + B) &= \sin(\tfrac{1}{2}\pi + B)\\ &= \sin(\tfrac{1}{2}\pi - B)\\ &= \cos B\end{aligned}$$

und ferner:

$$\begin{aligned}\sin A \,.\, \cos B + \cos A \,.\, \sin B &= \sin \tfrac{1}{2}\pi \,.\, \cos B\\ &= \cos B.\end{aligned}$$

Es seien jetzt A und B positive Winkel, $A > 0$, $A + B < \pi$. [36

Diese Winkel A, B können an einer Seite c eines Dreiecks liegen (§ 101), in dem wir die beiden andern Seiten, A und B gegen- [335 über, a und b nennen. Ist $A < \frac{1}{2}\pi$, so wird die Seite c durch das vom gegenüberliegenden Winkel C aus auf sie gefällte Loth p in zwei Theile zerlegt, x beim Winkel B und $c - x$ beim Winkel A (Fig. 121), und es entstehen so zwei rechtwinklige Dreiecke, in denen (§ 123):

$$c - x = b \cos A, \quad x = a \cos B$$

ist. Wenn $A > \frac{1}{2}\pi$ ist (Fig. 122), so fällt das Loth p auf die Verlängerung der Seite c, so dass zwei rechtwinklige Dreiecke entstehen: in dem einen sind p und x die Katheten, in dem andern p und $c + x$ mit den Winkeln $\pi - A$, B gegenüber p, folglich ist (Gl. (22), (19)):

$$x = - b \cos A, \quad c + x = a \cos B.$$

In beiden Fällen finden wir auf diese Weise:

$$c = a \cos B + b \cos A. \tag{28}$$

Vermöge der Gleichung (26) können wir hierin $\sin C$, $\sin A$, $\sin B$ an die Stelle von c, a, b setzen und erhalten so:

$$\sin C = \sin A \, . \cos B + \cos A \, . \sin B. \qquad [37$$

Jedoch $C = \pi - A - B$, folglich: $\sin C = \sin (A + B)$ (Gl. (16)).

Bis jetzt ist die Gleichung (27) für alle Winkel von $A = 0$, $B = 0$ bis $A = \pi$, $B = \pi$ bewiesen, solange $A + B < \pi$. Sie ist auch für $A + B = \pi$ richtig, weil in diesem Falle $\sin (A + B) = 0$, $\cos B = - \cos A$ (Gl. (22)), $\sin B = \sin A$ (Gl. (16)).

Wir setzen überhaupt: $A = n\pi + \alpha$, $B = m\pi + \beta$, wo n und m null oder ganze positive Zahlen sein können und die Winkel α und β auch null oder positiv, $< \pi$. Wir finden (Gl. (18)):

$$\sin (A + B) = (-1)^{n+m} \sin (\alpha + \beta),$$
$$\sin A = (-1)^n \sin \alpha, \quad \sin B = (-1)^m \sin \beta.$$

Ferner (Gl. (22)): [336

$$\cos A = (-1)^n \cos \alpha, \quad \cos B = (-1)^m \cos \beta.$$

Demnach verwandelt sich die Gleichung (27) in:

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \, . \cos \beta + \cos \alpha \, . \sin \beta \qquad [38$$

und ist bewiesen für $\alpha + \beta \leqq \pi$.

Im Falle $\alpha + \beta > \pi$, $< 2\pi$ können wir der letzten Gleichung die Form:

$$\sin (2\pi - \alpha - \beta) = \sin (\pi - \alpha) \, . \cos (\pi - \beta) + \cos (\pi - \alpha) \, . \sin (\pi - \beta)$$

geben und diese als richtig ansehen, weil hier die Summe der Winkel $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$ kleiner als π ist.

Was die negativen Werthe von A und B anbetrifft, so können wir die positiv machen, indem wir einige Male 2π hinzufügen, wodurch die Werthe der Funktionen selbst nicht geändert werden (§ 126).

§ 130.

Aus der Gleichung (27) folgen andre, wenn wir $-B$ für B einsetzen und sodann in der neuen und in der früheren Gleichung $\frac{1}{2}\pi - A$ für A. So erhalten wir:

(29) $$\sin(A - B) = \sin A \, . \cos B - \cos A \, . \sin B,$$

(30) $$\cos(A + B) = \cos A \, . \cos B - \sin A \, . \sin B,$$

(31) $$\cos(A - B) = \cos A \, . \cos B + \sin A \, . \sin B.$$

Dividirt man Gleichung (27) durch (30), (29) durch (31), so ergiebt sich:

(32) $$\operatorname{tang}(A + B) = \frac{\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B}{1 - \operatorname{tang} A \, . \operatorname{tang} B},$$ [39

(33) $$\operatorname{tang}(A - B) = \frac{\operatorname{tang} A - \operatorname{tang} B}{1 + \operatorname{tang} A \, . \operatorname{tang} B}.$$

§ 131.

Wenn wir in der Gleichung (27) $A = B$ setzen, so erhalten wir:

(34) $$\sin 2A = 2 \sin A \, . \cos A.$$

Machen wir dasselbe in der Gleichung (30) und nehmen wir Gleichung (25) zu Hilfe, so wird:

(35) $$1 + \cos 2A = 2 \cos^2 A,$$

(36) $$1 - \cos 2A = 2 \sin^2 A.$$

So erhalten wir, indem wir mit $A = \frac{1}{2}\pi$ beginnen, nach und nach: [337

$$\cos\frac{\pi}{2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{2^3} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \qquad \sin\frac{\pi}{2^3} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

$$\cos\frac{\pi}{2^4} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \qquad \sin\frac{\pi}{2^4} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}},$$

u. s. f., u. s. f.,

wo alle Wurzeln positiv zu denken sind, weil der Sinus und der [40 Cosinus eines spitzen Winkels nicht negativ sein können (§ 123).

Dieses Verfahren führt zu den Werthen der Sinus und der Cosinus aller Winkel $\pi : 2^n$, wo n eine ganze positive Zahl ist. Sodann dienen die Gleichungen (27) und (30) zur Bestimmung der Sinus und der Cosinus aller Winkel, die als Summen von Winkeln $\pi \, . \, 2^{-n}$ dargestellt werden können. Endlich wird überhaupt jeder Winkel durch das

Produkt von $\frac{1}{2}\pi$ in eine Summe einer Anzahl positiver Potenzen von $\frac{1}{2}$ dargestellt, wenigstens bis auf eine beliebig kleine Abweichung. Wir bezeichnen diese Abweichung mit ω, den gegebenen Winkel mit A, die Summe aller Summanden von der Gestalt $\pi : 2^n$ werden wir B nennen, so dass $A = B + \omega$ ist. Die Gleichungen (27) und (30) ergeben:

$$\sin A = \sin B \cdot \cos \omega + \cos B \cdot \sin \omega,$$
$$\cos A = \cos B \cdot \cos \omega - \sin B \cdot \sin \omega,$$

und indem wir hier (nach (34) und (36)) setzen:

$$\sin \omega = 2 \sin \tfrac{1}{2}\omega \cdot \cos \tfrac{1}{2}\omega, \quad \cos \omega = 1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega,$$

finden wir: [41

(37) $$\sin A - \sin B = \quad 2 \sin \tfrac{1}{2}\omega \cdot \cos (B + \tfrac{1}{2}\omega),$$

(38) $$\cos A - \cos B = -2 \sin \tfrac{1}{2}\omega \cdot \sin (B + \tfrac{1}{2}\omega).$$

Wir wollen hierzu bemerken, dass im rechtwinkligen Dreiecke das Verhältniss der einen Kathete zur andern die Tangente des Winkels gegenüber der ersten darstellt. Bei abnehmendem ω kann man [338 daher $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega$ beliebig klein machen und ebenso $\sin \frac{1}{2}\omega$, weil: $\sin \frac{1}{2}\omega < \operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega$; überdies ist der Grösse nach: $\cos (B + \frac{1}{2}\omega) < 1$, $\sin (B + \frac{1}{2}\omega) < 1$. Wenn wir daher in den Gleichungen (37) und (38) ω soweit verkleinern, dass die Unterschiede: $\sin A - \sin B$, $\cos A - \cos B$ unmerklich werden, so dürfen wir die Werthe $\sin B$ und $\cos B$ für $\sin A$ und $\cos A$ nehmen.

Die auf diese Weise für jeden Winkel x berechneten Werthe von $\sin x$ und $\cos x$ sind dieselben, die sich aus den unendlichen Reihen: (Algebra, Kapitel XIV)

(39) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

(40) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

ergeben und die auch so dargestellt werden können: [42

(41) $$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

(42) $$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

sobald wir unter e die Grundzahl der Neperschen Logarithmen verstehen und unter π die Zahl:

$$\pi = 3{,}1415926535\ldots,$$

die dem Bruche $355 : 113$ sehr nahe kommt (§ 39).

§ 132.

Wenn wir die Gleichungen (27) und (29), (30) und (31) verbinden, nachdem wir $2A = a + b$, $2B = a - b$ gesetzt haben, so finden wir:

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \tfrac{1}{2}(a+b) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(a-b), \tag{43}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \tfrac{1}{2}(a+b) \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(a-b), \tag{44}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \tfrac{1}{2}(a+b) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(a-b), \tag{45}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \tfrac{1}{2}(a+b) \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(a-b). \tag{46}$$

Setzen wir hier in der Gleichung (44) $a = n\omega$, $b = (n-1)\omega$, so erhalten wir:

$$\sin n\omega - \sin (n-1)\omega = 2 \sin \tfrac{1}{2}\omega \,.\, \cos (n\omega - \tfrac{1}{2}\omega) \qquad [43$$

und wenn wir hier der Reihe nach die ganzen Zahlen einsetzen, [339 von 1 anfangend bis zu irgend einem n:

$$\begin{aligned} \sin \omega \qquad &= 2 \sin \tfrac{1}{2}\omega \,.\, \cos \tfrac{1}{2}\omega \\ \sin 2\omega - \sin \omega &= 2 \sin \tfrac{1}{2}\omega \,.\, \cos \tfrac{3}{2}\omega \\ \sin 3\omega - \sin 2\omega &= 2 \sin \tfrac{1}{2}\omega \,.\, \cos \tfrac{5}{2}\omega \\ \cdot \qquad &\cdot \qquad \cdot \end{aligned}$$

$$\sin n\omega - \sin (n-1)\omega = 2 \sin \tfrac{1}{2}\omega \,.\, \cos (n - \tfrac{1}{2})\omega.$$

Durch Addition der Gleichungen finden wir:

$$\frac{\sin n\omega}{2 \sin \frac{1}{2}\omega} = \cos \tfrac{1}{2}\omega + \cos \tfrac{3}{2}\omega + \cdots + \cos (n - \tfrac{1}{2})\omega.$$

Hier nehmen die in der Summe enthaltenen Glieder der Reihe nach von Anfang an bis zum letzten ab, ohne jedoch negativ zu werden, so lange $n\omega < \frac{1}{2}\pi$. Hieraus ist zu schliessen, dass $\sin n\omega$ langsamer wächst als der Winkel $n\omega$, wie klein auch der Faktor ω sein mag, so dass für zwei ganze Zahlen $n > m$:

$$\frac{\sin n\omega}{\sin m\omega} < \frac{n}{m} \qquad [44$$

ist. Ueberhaupt ist für zwei Winkel $a > b$:

$$\frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b}.$$

Kapitel X. [340 45

Die Abhängigkeit des Parallelwinkels von dem zugehörigen Lothe.

§ 133.

In diesem Kapitel werden wir den Parallelwinkel als veränderlich betrachten.

In dem geradlinigen und rechtwinkligen Dreiecke ABC (Fig. 123) bezeichnen wir mit c die Hypotenuse, mit a und b die Katheten und mit $\Pi(\alpha)$ und $\Pi(\beta)$ die diesen gegenüberliegenden Winkel, so dass α, β gewisse Linien darstellen müssen, die durch positive Zahlen ausgedrückt werden (§ 102).

Wir verlängern a und c über ihren gemeinsamen Punkt B hinaus, indem wir die Verlängerung der ersten Seite willkürlich annehmen, die der zweiten aber bis zu dem Punkte D führen, so dass $BD = \beta$ und folglich das auf BD in D errichtete Loth DD' zu BB' parallel wird. Wir ziehen ferner zu DD' die Parallele AA', die gleichzeitig zu BB' parallel sein wird (§ 99). Wir finden, dass der Winkel $B'BD = \Pi(\beta)$ ist, $A'AD = \Pi(c + \beta)$, $A'AC - A'AD = \Pi(\alpha)$, folglich wird:

$$\Pi(b) - \Pi(\alpha) = \Pi(c + \beta). \tag{47}$$

In demselben Dreiecke ABC tragen wir die Linie β von B aus nach A hin ab und errichten sodann in dem Endpunkte D das Loth DD' dahin, wo das Dreieck selbst liegt.

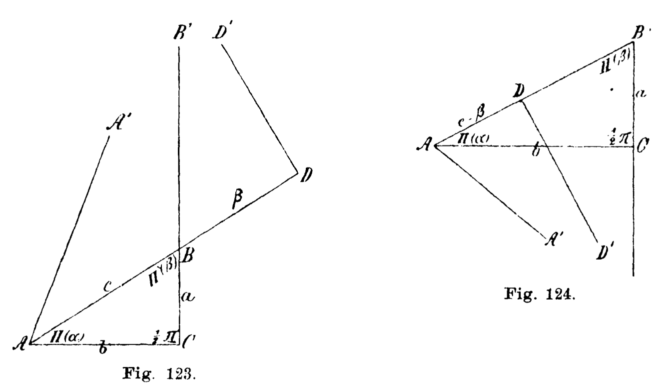


Fig. 123.

Fig. 124.

In dem Falle $c > \beta$ wird der Punkt D zwischen A und B liegen (Fig. 124). Wir ziehen AA' parallel zu DD' und also gleichzeitig [46 parallel zu BC. Hier ist der Winkel $DAA' = \Pi(c - \beta)$, $CAA' = \Pi(b)$, demnach:

$$\Pi(b) + \Pi(\alpha) = \Pi(c - \beta). \tag{48}$$

Ist $c = \beta$ (Fig. 125), so wird die Linie AA' auf AB senkrecht stehen, folglich $\Pi(b) = \frac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha)$ sein, aber $\frac{1}{2}\pi = \Pi(0) = \Pi(c - \beta)$, somit bewährt sich die Gleichung (48) in diesem Falle von Neuem.

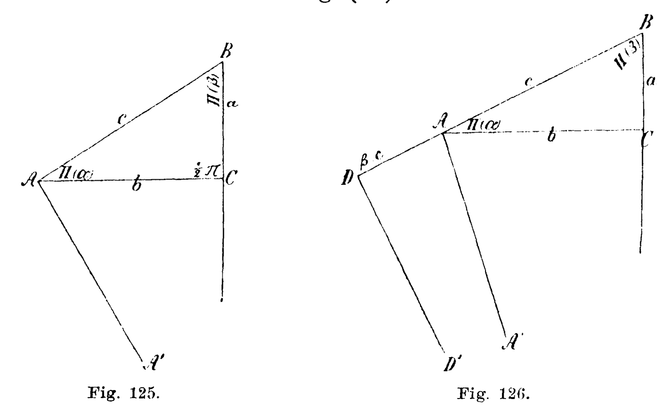


Fig. 125. Fig. 126.

Ist $c < \beta$ (Fig. 126), so wird das Loth DD' auf der Ver- [341 längerung von c über den Punkt A hinaus stehen. Jetzt ist der Winkel:

$$\begin{aligned} CAA' = \Pi(b) &= \pi - DAA' - \Pi(\alpha) \\ &= \pi - \Pi(\beta - c) - \Pi(\alpha) \\ &= \Pi(c - \beta) - \Pi(\alpha) \quad (\S\ 102). \end{aligned}$$

Daher bezieht sich die Gleichung (48) auf alle rechtwinkligen Dreiecke. In Verbindung mit der früheren (47) ergiebt sie:

$$2\Pi(b) = \Pi(c - \beta) + \Pi(c + \beta), \tag{49}$$

$$2\Pi(\alpha) = \Pi(c - \beta) - \Pi(c + \beta). \tag{50}$$

Geradeso ist:

$$\begin{cases} 2\Pi(a) = \Pi(c - \alpha) + \Pi(c + \alpha), \\ 2\Pi(\beta) = \Pi(c - \alpha) - \Pi(c + \alpha). \end{cases} \tag{51}$$

§ 134. [47

In dem rechtwinkligen Dreiecke ABC (Fig. 127) nennen wir wiederum die Hypotenuse c, die Katheten a und b, die diesen gegenüberliegenden Winkel: $\Pi(\alpha)$ und $\Pi(\beta)$.

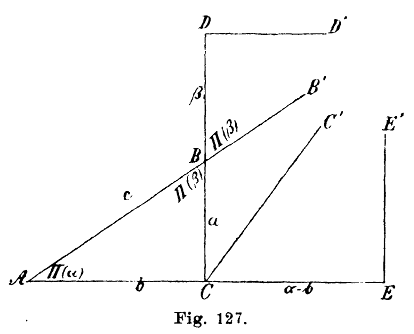


Fig. 127.

Die Kathete a verlängern wir über den Scheitel B des Winkels $\Pi(\beta)$, indem wir die Verlängerung $BD = \beta$ machen. Im Endpunkte errichten wir auf DC das Loth DD' dahin, wo das Dreieck nicht liegt

Die Verlängerung BB' der Hypotenuse c über denselben Punkt B hinaus muss daher zu DD' parallel sein. Wir verlängern ferner die Kathete b über den Scheitel C des rechten Winkels hinaus, indem wir die Verlängerung $CE = \alpha - b$ machen, und errichten sodann auf CE im Endpunkte das Loth EE' dahin, wo das Dreieck liegt. Dieses Loth muss zu AB' parallel sein und auch zu dem Lothe DD', das zugleich der Linie CC' parallel ist, die wir von der Ecke C aus parallel zu EE' ziehen.

So entstehen die Winkel: $C'CD = \Pi(a + \beta)$ und $C'CE = \Pi(\alpha - b)$, folglich ist:

(52) $$\Pi(\alpha - b) + \Pi(a + \beta) = \tfrac{1}{2}\pi$$

und nach diesem Muster:

(53) $$\Pi(\beta - a) + \Pi(b + \alpha) = \tfrac{1}{2}\pi.$$

§ 135.

In einem beliebigen geradlinigen Dreiecke ABC (Fig. 128) nennen wir die Seiten a, b, c, die gegenüberliegenden Winkel, deren Scheitel in den Punkten A, B, C liegen, $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(\gamma)$, wo demnach α, β, γ entweder sämmtlich positive Linien sind, oder zwei unter ihnen positiv [48 und eine negativ.

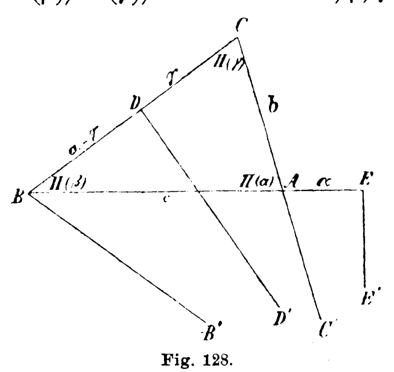


Fig. 128.

Wenn γ eine positive Linie ist, so tragen wir diese auf der Seite a von der Ecke C aus nach B hin ab und im Endpunkte D errichten wir auf BC das Loth DD' dahin, wo das Dreieck ABC liegt. Der Punkt D muss für $a > \gamma$ zwischen die Punkte B und C fallen, für $a = \gamma$ wird er in B liegen, für $\gamma > a$ endlich irgendwo auf der Verlängerung von CB über den Punkt B hinaus. Ist γ eine negative Linie, so tragen wir diese in der entgegengesetzten Richtung auf der Verlängerung von a über den Punkt C hinaus ab. In allen diesen Fällen wird [342 die von B aus zu DD' gezogene Parallele BB' gleichzeitig zu CA parallel sein, dessen Verlängerung AC' über den Punkt A hinaus zu dem Lothe EE' parallel wird, das wir auf $AE = \alpha$ in E errichten, diesen Punkt von der Ecke A aus auf der Seite c selbst oder auf deren Verlängerung angenommen, jenachdem α eine negative oder eine positive Linie ist. Das Loth EE' ist ebenfalls zu BB' parallel (§ 99), folglich ergiebt der Unterschied zwischen den Winkeln: $CBB' = \Pi(a - \gamma)$, $ABB' = \Pi(c + \alpha)$:

$$\Pi(\beta) = \Pi(a - \gamma) - \Pi(c + \alpha), \tag{54}$$

eine Gleichung, in der die früheren (47), (48) und (52) als besondere Fälle enthalten sind, wenn wir $\Pi(\gamma) = \frac{1}{2}\pi$ und zugleich $\gamma = 0$ setzen, oder $\Pi(\alpha) = \frac{1}{2}\pi$ und zugleich $\alpha = 0$ oder endlich: $\Pi(\beta) = \frac{1}{2}\pi$ und zugleich $\beta = 0$.

§ 136.

In dem rechtwinkligen Dreiecke ABC (Fig. 129) nennen wir [49 die Hypotenuse c, die Katheten a und b, die diesen gegenüberliegenden Winkel $\Pi(\alpha)$ und $\Pi(\beta)$. Von dem Scheitel der Ecke A aus im Winkel $\Pi(\alpha)$ errichten wir auf der Ebene des Dreiecks das Loth AA', ziehen zu diesem von den beiden andern Ecken B und C aus die Parallelen BB' und CC', und denken uns sodann durch je zwei dieser drei Linien AA', BB', CC' Ebenen gelegt.

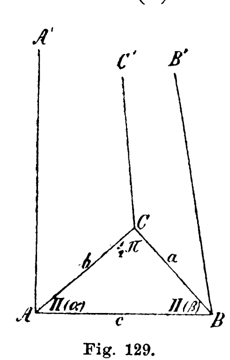


Fig. 129.

Zwei dieser Ebenen stehen auf der Dreiecksebene senkrecht, da sie einander in AA' schneiden (§ 59), und gehen durch b und c, indem sie unter dem Winkel $\Pi(\alpha)$ gegen einander geneigt sind (§ 43). Die zu b senkrechte Seite a muss auf der Ebene $A'ACC'$, in der die Linien b, AA' und CC' liegen, senkrecht stehen (§ 59), folglich wird sie auch auf der Linie CC' senkrecht sein (§ 56). Daher wird der Winkel der beiden Ebenen, die einander in CC' schneiden und durch a und b gehen, ein Rechter. Da wir jetzt zwei Ebenenwinkel $\Pi(\alpha)$ und $\frac{1}{2}\pi$ kennen, so finden wir $\frac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha)$ für den dritten zwischen den Ebenen, auf denen die Linien a und c liegen und die BB' gemein haben (§ 100).

Ferner ist der geradlinige Winkel $ACC' = \Pi(b)$, weil aber BC auf AC und CC' senkrecht steht, so wird er gleich dem Winkel zwischen den beiden Ebenen, die einander in BC schneiden und durch AB und BB' gehen.

Daher schneiden die drei Linien BA, BB', BC eine Kugelfläche um B in drei Punkten, die die Ecken eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks $AB'C$ sein werden (Fig. 130) und zwar wird die Hypotenuse $CB' = \Pi(a)$ sein, die Katheten: $CA = \Pi(\beta)$, $B'A = \Pi(c)$ und die gegenüberliegenden Winkel gleich $\frac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha)$ und $\Pi(b)$.

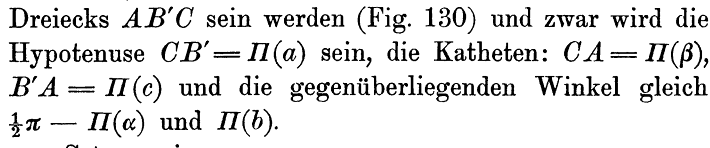


Fig. 130.

Setzen wir:

$$\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha) = \Pi(\alpha'), \quad \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b) = \Pi(b'), \qquad [50$$

so müssen wir hieraus schliessen, dass, wie das gegebene geradlinige rechtwinklige Dreieck das sphärische $AB'C$ erzeugt, geradeso um-

gekehrt zugleich mit diesem sphärischen ein geradliniges rechtwinkliges Dreieck bestehen muss (Fig. 131), bei dem β die Hypotenuse ist und a und α' die Katheten sind mit den gegenüberliegenden Winkeln [343 $\Pi(b')$ und $\Pi(c)$.

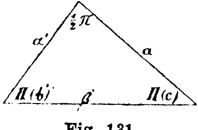


Fig. 131

Von dem einen geradlinigen Dreiecke könnnen wir also zu einem neuen übergehen, indem wir die Kathete a beibehalten und b, c, α, β durch α', β, b', c ersetzen. Wenn wir fortfahren, bei jedem Buchstaben den Accent in demselben Sinne zu benutzen, nämlich, um zwei Linien zu unterscheiden, deren Parallelwinkel zusammen $\frac{1}{2}\pi$ ausmachen, so können wir anstatt der vier Gleichungen (49), (50) und (51) deren zehn hinschreiben:

$$(55)\qquad \left\{\begin{aligned}
2\Pi(\alpha) &= \Pi(a'-b') - \Pi(a'+b')\\
2\Pi(b) &= \Pi(\alpha-\alpha') + \Pi(\alpha'+\alpha)\\
2\Pi(a) &= \Pi(\beta-b') + \Pi(b'+\beta)\\
2\Pi(a) &= \Pi(c-\alpha) + \Pi(c+\alpha)\\
2\Pi(b) &= \Pi(c-\beta) + \Pi(c+\beta)\\
2\Pi(\alpha) &= \Pi(c-\beta) - \Pi(c+\beta)\\
2\Pi(\beta) &= \Pi(c-\alpha) - \Pi(c+\alpha)\\
2\Pi(c) &= \Pi(\beta-b') - \Pi(\beta+b')\\
2\Pi(c) &= \Pi(\alpha-a') - \Pi(\alpha+a')\\
2\Pi(\beta) &= \Pi(b'-a') - \Pi(b'+a'),
\end{aligned}\right.$$

und auf ähnliche Weise anstatt der zwei Gleichungen (52) und (53) ebenfalls zehn:

[51

$$(56)\qquad \left\{\begin{aligned}
\Pi(\alpha-b) + \Pi(a+\beta) &= \tfrac{1}{2}\pi\\
\Pi(\beta-a) + \Pi(b+\alpha) &= \tfrac{1}{2}\pi\\
\Pi(c-a) + \Pi(\alpha'+b') &= \tfrac{1}{2}\pi\\
\Pi(c-b) + \Pi(\beta'+a') &= \tfrac{1}{2}\pi\\
\Pi(\beta-\alpha') + \Pi(c'+a') &= \tfrac{1}{2}\pi\\
\Pi(\alpha-\beta') + \Pi(c'+b') &= \tfrac{1}{2}\pi\\
\Pi(b'-c') + \Pi(\beta'+\alpha) &= \tfrac{1}{2}\pi\\
\Pi(a'-c') + \Pi(\alpha'+\beta) &= \tfrac{1}{2}\pi\\
\Pi(a'-\beta') + \Pi(b+c) &= \tfrac{1}{2}\pi\\
\Pi(b'-\alpha') + \Pi(a+c) &= \tfrac{1}{2}\pi.
\end{aligned}\right.$$

§ 137.

Wir stellen uns wieder das rechtwinklige Dreieck ABC vor (Fig. 129) mit den drei Parallelen AA', BB', CC', unter denen die erste von der Ecke A ausgeht und auf der Ebene des Dreiecks senkrecht steht. Die drei Ebenen, auf denen je zwei der Parallelen liegen, breiten wir auf der Ebene des Dreiecks aus, indem wir die Katheten a und b auf die eine, die Hypotenuse auf die andre Seite der Linie AA' legen (Fig. 132).

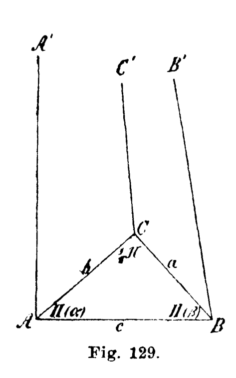


Fig. 129.

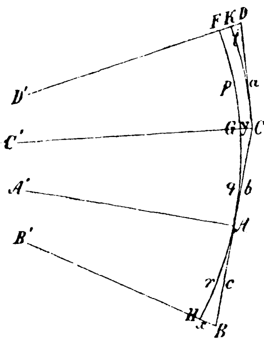


Fig. 132.

Die Kathete b und die Hypotenuse c vereinigen sich jetzt [344 zu einer Geraden BC, da sie in der früheren Lage auf der Geraden AA', die zu CC' parallel ist, senkrecht stehen (§ 136). Die Kathete $CD = a$ steht senkrecht auf CC', und zu dieser Geraden ziehen wir noch die Parallelen: BB' durch den Endpunkt B der Hypotenuse c und DD' durch den Endpunkt D der Kathete a. Alle vier Paral- [52 lelen BB', AA', CC' und DD' werden Axen einer Gränzkurve $HAGF$ sein, die durch den Punkt A geht und DD', CC', BB' in F, G, H in den Abständen: $FD = BH = x$, $CG = y$ schneidet. Sobald nämlich a, b, c zu einem geradlinigen rechtwinkligen Dreiecke verbunden werden, so müssen sich gleichzeitig die Bogen $FG = p$, $AG = q$, $AH = r$ zu einem Gränzdreiecke zusammenschliessen, das ebenfalls rechtwinklig ist (§ 119, [120]). In diesem Dreiecke ist r die Hypotenuse, p und q sind die Katheten und $\Pi(\alpha)$ der Winkel p gegenüber, folglich (§ 123):

$$p = r \,.\, \sin \Pi(\alpha), \quad q = r \,.\, \cos \Pi(\alpha).$$

Es sei: $x = f(c)$ und: $y = f(b)$, wo der Buchstabe f als Zeichen für eine geometrische Funktion dient, die überdies zugleich mit ihrem Argumente verschwindet. Wir ziehen jetzt von C aus zwischen den Parallelen CC' und DD' den Gränzlinienbogen $CK = t$, so dass CC'

und folglich auch DD' eine gemeinsame Axe der beiden Bogen p und t ist. Hier ist der Abstand: $DK = x - y = f(a)$, demnach:

(57) $$f(c) = f(a) + f(b).$$

Für den Gränzlinienbogen t finden wir (§ 117, Gl. (6)):

$$t = p \,.\, e^y$$

oder: [53

$$t = p \,.\, e^{f(b)}$$

oder endlich:

$$t = r \,.\, e^{f(b)} \,.\, \sin \Pi(\alpha).$$

Aehnlich muss sein:

$$q = r \,.\, e^{f(a)} \,.\, \sin \Pi(\beta),$$

und indem wir das mit dem andern Werthe von q vergleichen, finden wir:

$$\cos \Pi(\alpha) = e^{f(a)} \,.\, \sin \Pi(\beta).$$

Unter Beibehaltung von a können wir hier α und β durch b' und c ersetzen (§ 136), folglich ist:

$$\sin \Pi(b) = e^{f(a)} \,.\, \sin \Pi(c)$$

oder bei Hinzunahme der Gleichung (57): [345

$$e^{f(b)} \,.\, \sin \Pi(b) = e^{f(c)} \,.\, \sin \Pi(c),$$

woraus wir noch schliessen, dass: [54

$$e^{f(a)} \,.\, \sin \Pi(a) = e^{f(b)} \,.\, \sin \Pi(b)$$

ist. Da aber die beiden Katheten a und b vollständig beliebige Linien sind und wir überdies für $a = 0$ haben: $f(a) = 0$, $\Pi(a) = \frac{1}{2}\pi$, so wird für alle a:

$$e^{-f(a)} = \sin \Pi(a).$$

Die Gleichung (57) ergiebt jetzt:

(58) $$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \,.\, \sin \Pi(b).$$

Diese verwandelt sich, wenn b und c durch α' und β ersetzt werden (§ 136), in:

(59) $$\sin \Pi(\beta) = \sin \Pi(a) \,.\, \cos \Pi(\alpha),$$

was die Gleichung:

$$\sin \Pi(\alpha) = \sin \Pi(b) \,.\, \cos \Pi(\beta)$$

nach sich zieht, oder wenn wir hier α, b, β durch b', α', c ersetzen (§ 136):

(60) $$\cos \Pi(b) = \cos \Pi(\alpha) \,.\, \cos \Pi(c).$$

Indessen finden wir aus den Gleichungen (49) und (50):

$$\frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(\alpha)} = \frac{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(c-\beta) \,.\, \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(c+\beta)}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(c-\beta) \,.\, \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(c+\beta)},$$ [55

was zusammen mit der Gleichung (60) ergiebt:

$$(61)\qquad \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\Pi(c) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Pi(c-\beta)\,.\,\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Pi(c+\beta).$$

Da hier β und c willkürliche Linien sind und nicht von einander abhängen, so schliessen wir, indem wir $\beta = c, 2c, 3c, \ldots$ setzen, dass für eine ganze Zahl n allgemein:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Pi(nc) = \{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Pi(c)\}^n$$

ist. Das erfordert, dass für jede Linie x werde:

$$(62)\qquad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x}.$$

Hier ist die konstante Zahl e allerdings nicht bekannt, sie [346 muss jedoch grösser als Eins sein, damit sich für $x = \infty$ ergiebt: $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\Pi(x) = 0$. Wir können, um die Rechnungen zu vereinfachen, für e die Grundzahl der Neperschen Logarithmen nehmen, indem wir die Einheit, im Verhältnisse zu der x durch eine Zahl ausgedrückt wird, willkürlich oder unbestimmt lassen.

Mit Hülfe der Gleichung (62) finden wir für beliebige, positive oder negative Linien x und y:

$$(63)\qquad \sin \Pi(x+y) = \frac{\sin \Pi(x)\,.\,\sin \Pi(y)}{1+\cos \Pi(x)\,.\,\cos \Pi(y)}, \qquad [56$$

$$(64)\qquad \cos \Pi(x+y) = \frac{\cos \Pi(x) + \cos \Pi(y)}{1+\cos \Pi(x)\,.\,\cos \Pi(y)},$$

$$(65)\qquad \operatorname{tang} \Pi(x+y) = \frac{\sin \Pi(x)\,.\,\sin \Pi(y)}{\cos \Pi(x) + \cos \Pi(y)}.$$

Die Gleichung (62) bildet die Grundlage für die imaginäre Geometrie. An einer andern Stelle*) ist sie durch eine Gränzmethode bewiesen, die nicht weniger streng ist. Ich werde diesen Beweis hier wiederholen.

Wir haben gesehen (§ 136), dass, sobald ein geradliniges rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c, den Katheten a und b und den diesen gegenüberliegenden Winkeln $\Pi(\alpha)$ und $\Pi(\beta)$ gegeben ist, ein ebensolches Dreieck vorhanden sein muss, das die Hypotenuse β, die Katheten a, α' und diesen gegenüber die Winkel $\Pi(b')$, $\Pi(c)$ besitzt. Die beiden Linien α' und b' werden hier durch die Gleichungen:

$$\Pi(\alpha) + \Pi(\alpha') = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \Pi(b) + \Pi(b') = \tfrac{1}{2}\pi \qquad [57$$

bestimmt.

Es sei dies das Dreieck ABC (Fig. 133), bei dem die Punkte A, B, C die Scheitel der Winkel $\Pi(c)$, $\Pi(b')$, $\frac{1}{2}\pi$ darstellen und folglich die ihnen gegenüberliegenden Seiten sind: $BC = \alpha'$, $AC = a$, $AB = \beta$. Um A herum stellen wir uns eine Kugelfläche mit dem

---

*) Exposition succincte de la Géométrie etc., eine im Jahre 1826 geschriebene Abhandlung, die aber ungedruckt ist. Desgleichen in den Aufsätzen „Ueber die Anfangsgründe der Geometrie". (Kasaner Bote von 1829 und 1830.) [Hier S. 1—66.]

Halbmesser β vor; AC verlängern wir bis zu seinem Schnitte D mit der Kugelfläche, legen sodann durch AD senkrecht zu dem Dreiecke eine andre Ebene und in dieser ziehen wir den Kugelhalbmesser AE unter dem Winkel $DAE = \Pi(\beta)$ gegen AD.

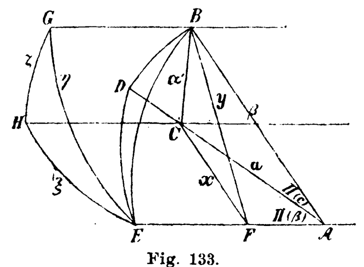


Fig. 133.

Die Bogen der grössten Kreise zwischen den Punkten B, D, E auf der Kugelfläche bilden ein rechtwinkliges Dreieck, in dem die eine Kathete [347 $BD = \Pi(c)$ ist, die andre $DE = \Pi(\beta)$, folglich die ihnen gegenüberliegenden Winkel: $BED = \Pi(b)$, $DBE = \Pi(\alpha')$ und die Hypotenuse $BE = \Pi(a)$ (§ 136). Von dem Punkte C aus fällen wir auf AE das Loth: $CF = x$, verbinden sodann den Endpunkt F dieses Lothes mit dem Punkte B durch die Linie $BF = y$, die ebenfalls auf AF senkrecht stehen muss. Da nämlich die Ebenen der beiden Dreiecke ABC und ACF zu einander senkrecht sind, so steht ihre Schnittlinie AC auf BC senkrecht, und folglich ist BC zu der Ebene CAF senkrecht; die Ebene des Dreiecks BCF, die durch BC geht, steht auf der Ebene CAF senkrecht, die diesen beiden Ebenen gemeinsame Linie CF ist auf AF senkrecht, demnach steht AF [58 auf der Ebene BCF senkrecht.

Ziehen wir jetzt durch die Punkte B und C die Geraden BG und CH parallel zu AE, bis sie in G und H die Gränzfläche treffen, auf der der Punkt E liegt und die AF, BG und CH zu Axen hat. In dem Gränzdreiecke GHE setzen wir die Hypotenuse $GE = \eta$, die Katheten: $HE = \xi$ und: $HG = \zeta$. Die Verhältnisse dieser Seiten werden sein (§ 123):

$$\frac{\zeta}{\eta} = \sin \Pi(b), \quad \frac{\xi}{\eta} = \cos \Pi(b).$$

Wir wollen hierzu bemerken, dass, wenn wir in dem Dreiecke ABC die Hypotenuse β vergrössern, ohne den Winkel $\Pi(b')$ zu ändern, also unter der Voraussetzung, die Linie b selbst, ebenso wie der Winkel $\Pi(b)$, bleibe konstant, dass dann die Kathete a bis ins Unendliche wächst, während die andre Kathete α' die Gränze b' nicht überschreitet. Wenn wir daher in dem Dreiecke BCF, ohne den Winkel $BFC = \Pi(b)$ zu ändern, x vergrössern, bis endlich $\alpha' = b'$ wird, so werden die Seiten HG, HE und GE des Gränzdreiecks die grössten Werthe annehmen, denen sie sich bei wachsendem β nähern, sobald wir den Punkt E auf seinem Platze lassen und A nach der Richtung EA hin bewegen.

Wir breiten jetzt die Ebenen aller Parallelen und die Ebenen der Dreiecke, die im Punkte A zusammenstossen, auf die Ebene ADE aus, indem wir sowohl die einen als die andern um ihre Schnittlinien mit der letzteren drehen. Die Seiten des [59 sphärischen Dreiecks BDE verwandeln sich dabei in die Bogen BD, DE und EB' auf einem Kreise (Fig. 134), dessen Mittelpunkt A und dessen Halbmesser $AB = AD = AE = AB' = \beta$ ist. Die Seiten des geradlinigen Dreiecks $[BFC]$ sind nunmehr: Das Loth $B'F = y$ von dem Endpunkte B' des Halbmessers AB' auf den Halbmesser AE, die Verlängerung $FC = x$ des Lothes $B'F$ über AE hinüber bis zum Zusammentreffen mit dem Halbmesser AD in dem Punkte C; endlich das von diesem Punkte aus auf AD errichtete Loth $BC = \alpha'$. Die Seiten des Gränzdreiecks vereinigen sich zu dem einen Bogen $G'EHG$ der durch E gezogenen Gränzlinie, die den Halbmesser AE zur Axe hat. Die Seiten selbst erhalten wir so: $EG' = \eta$, wenn wir durch den Punkt B' die Parallele zu AE ziehen, bis sie die Gränzkurve in G' trifft; $EH = \xi$, wenn wir durch C die Parallele [348 zu AE ziehen, bis sie die Gränzlinie in H trifft; $HG = \zeta$, wenn wir auf HC in C das Loth $CB'' = \alpha'$ errichten und durch dessen Endpunkt $B''G$ parallel zu AE ziehen, bis es die Gränzlinie in G trifft.

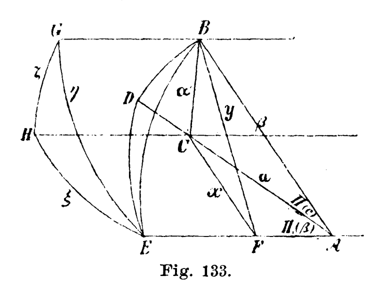


Fig. 133.

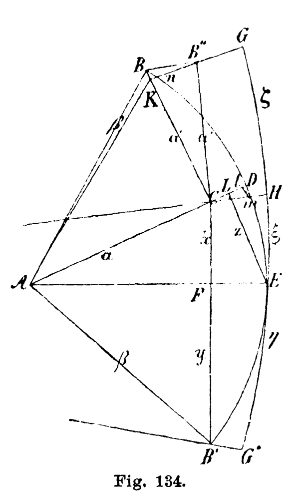


Fig. 134.

Die Axe HC muss den Kreis irgendwo in m zwischen H und C schneiden. Die Axe GB'' trifft in ihrer Verlängerung über B'' hinaus den Kreis irgendwo in n. Die Abstände Gn, Hm und $G'B'$ auf den Parallelen zwischen Gränzlinie und Kreis liegen innerhalb bekannter Gränzen, die durch die äussersten Werthe der Bogen GH, HE und EG' bestimmt sind, sie nehmen daher ab, wenn β wächst, und können beliebig klein gemacht werden (§ 114). Der Winkel $BCB'' = DCH$ ist kleiner als CAF, aber der letztere stellt $\Pi(\beta)$ dar und ver- [60 schwindet folglich mit wachsendem β und ebenso auch die Linie BB'' zwischen den beiden Punkten B und B''. In dem gleichschenkligen Dreiecke BCB'' wachsen die Winkel an der Grundlinie BB'' zugleich mit β, indem sie sich $\frac{1}{2}\pi$ soweit nähern, dass schliesslich der Unter-

schied vernachlässigt werden kann. Dagegen kann der Winkel $nB''C = \Pi(\alpha')$ bei seiner Abnahme die Gränze $\Pi(b')$ nicht überschreiten, folglich muss die Linie $B''n$, wenigstens wenn β über einen bestimmten Werth hinaus wächst, in das Innere des Dreiecks BCB'' treten, indem sie nunmehr hier den Kreis in n schneidet und auf diese Weise ein Dreieck BnB'' bildet, in dem der Winkel BnB'' stumpf ist, weil sein Nebenwinkel BnK in dem spitzen BnA enthalten ist, der entsteht, wenn wir den Endpunkt n des Bogens Bn mit dem Mittelpunkte des Kreises durch den Halbmesser An verbinden. Hieraus folgt, dass die Sehne $Bn < BB''$ kleiner als jede gegebene Linie gemacht werden kann, während sich die Sehne $2\alpha'$ des doppelt genommenen Bogens BD unaufhörlich der Gränze $2b'$ nähert. Das bedeutet, dass der Bogen Bn im Vergleiche mit dem ganzen Bogen BD vernachlässigt werden muss, wenn der Halbmesser β gross genug ist.

Wir gehen jetzt zu dem Kreisbogen ED über, statt dessen wir ohne Unterschied den Bogen Em nehmen können, sobald der Halbmesser β genügend gross ist. Um das zu zeigen, fällen wir von den Punkten m und E aus die Lothe ml und EL auf den Halbmesser AD. Das erste von diesen ml ist kleiner als die Hypotenuse mC, erst recht kleiner als HC und kann folglich beliebig klein gemacht werden, [61 während das Loth $EL > x$ zugleich mit β wächst.

Daher sind die Gränzwerthe, denen sich die Verhältnisse: $BD:B'E$, $DE:B'E$ der Bogen bei wachsendem β nähern, dieselben wie für die Verhältnisse: $nm:B'E$, $Em:B'E$, folglich sind sie gerade die Verhältnisse $\zeta:\eta$, $\xi:\eta$ der Bogen auf der Gränzlinie (§ 116). Während wir $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$ an die Stelle von BD, DE, $B'E$ setzen, wollen wir das ausdrücken, indem wir schreiben:

$$\text{Lim.}\,\frac{\Pi(c)}{\Pi(a)} = \frac{\zeta}{\eta}, \quad \text{Lim.}\,\frac{\Pi(\beta)}{\Pi(a)} = \frac{\xi}{\eta}$$

oder, wie wir früher gefunden haben: [349

$$\text{Lim.}\,\frac{\Pi(c)}{\Pi(a)} = \sin \Pi(b), \quad \text{Lim.}\,\frac{\Pi(\beta)}{\Pi(a)} = \cos \Pi(b).$$

Hieraus folgt:

$$\text{Lim.}\,\frac{\Pi(c)}{\Pi(\beta)} = \operatorname{tang} \Pi(b), \quad \text{Lim.}\,\frac{\Pi(a)}{\Pi(\beta)} = \frac{1}{\cos \Pi(b)}. \qquad [62$$

Nunmehr bekommen wir, wenn wir $\frac{1}{2}\pi - \Pi(b')$ an die Stelle von $\Pi(b)$ setzen:

$$\text{Lim.}\,\frac{\Pi(a) + \Pi(c)}{\Pi(\beta)} = \cot \tfrac{1}{2}\,\Pi(b')$$

oder, indem wir die dritte und die achte der Gleichungen (55) zu Hülfe nehmen:

$$(66) \qquad \text{Lim.}\,\frac{\Pi(\beta - b')}{\Pi(\beta)} = \cot \tfrac{1}{2}\,\Pi(b').$$

Da hier $\beta = \infty$ ist und b' eine beliebige Linie, so können wir, indem wir unter x und y neue willkürliche Grössen verstehen, einmal $b' = x$ setzen, ohne β zu ändern, das andre Mal $b' = y$, während wir β in $\beta - x$ verwandeln. So finden wir:

$$\text{Lim.}\frac{\Pi(\beta - x)}{\Pi(\beta)} = \cot \tfrac{1}{2}\Pi(x), \quad \text{Lim.}\frac{\Pi(\beta - x - y)}{\Pi(\beta - x)} = \cot \tfrac{1}{2}\Pi(y).$$

Diese beiden Gleichungen ergeben mit einander multiplicirt:

$$\text{Lim.}\frac{\Pi(\beta - x - y)}{\Pi(\beta)} = \cot \tfrac{1}{2}\Pi(x) \,.\, \cot \tfrac{1}{2}\Pi(y),$$ [63

das aber bedeutet (Gl. (66)):

$$\cot \tfrac{1}{2}\Pi(x + y) = \cot \tfrac{1}{2}\Pi(x) \,.\, \cot \tfrac{1}{2}\Pi(y),$$

was wiederum zu der Gleichung (62) führt.

Kapitel XI.

[350 64

Die Abhängigkeit der Winkel und der Seiten eines Dreiecks von einander.

§ 138.

Der Umstand, dass die Gleichheit gewisser Stücke genügt, die Kongruenz von Dreiecken nach sich zu ziehen, setzt voraus, dass die drei übrigen Stücke von jenen abhängen. Daher müssen für die Stücke eines Dreiecks Gleichungen gelten und zwar für je vier, die man unter den sechs herausgreift; doch sind dabei die drei Winkel auszunehmen, sobald wir von den geradlinigen Dreiecken der gewöhnlichen Geometrie sprechen (§ 92). Von einem Dreiecke, mag dies nun sphärisch oder ein geradliniges Dreieck der imaginären Geometrie sein, können daher in den Gleichungen folgende Stücke vorkomman:

1) Die drei Seiten und ein Winkel.

2) Zwei Seiten und die beiden ihnen gegenüberliegenden Winkel.

3) Zwei Seiten mit dem dazwischenliegenden und dem einer von ihnen gegenüberliegenden Winkel.

4) Die drei Winkel und eine Seite.

In der gewöhnlichen Geometrie treten dieselben Fälle auf, nur ist für geradlinige Dreiecke der letzte auszunehmen.

Wenn wir, was wir in diesem Kapitel überall thun werden, [65 die Seiten a, b, c nennen und die ihnen gegenüberliegenden Winkel A, B, C, so müssen alle die angeführten Fälle zu Gleichungen führen, in denen vorkommen:

1) a, b, c, A, 2) a, b, A, B, 3) a, b, A, C, 4) a, A, B, C.

Das letzte ist bei geradlinigen Dreiecken der gewöhnlichen Geo- [351 metrie nicht möglich. In allen diesen Gleichungen können wir die Buchstaben vertauschen, indem wir jeden der Reihe nach durch den folgenden ersetzen, oder allgemein, indem wir die gegenseitige Beziehung zwischen ihnen beibehalten, bis wir wieder zu den früheren Gleichungen gelangen. So liefert der erste Fall Gleichungen mit den Buchstaben:

$$a,\ b,\ c,\ A$$
$$a,\ b,\ c,\ B$$
$$a,\ b,\ c,\ C;$$

der zweite:

$$a,\ b,\ A,\ B$$
$$a,\ c,\ A,\ C$$
$$b,\ c,\ B,\ C;$$

der dritte: [66

$$a,\ b,\ A,\ C \qquad a,\ b,\ B,\ C$$
$$b,\ c,\ B,\ A \qquad b,\ c,\ C,\ A$$
$$c,\ a,\ C,\ B \qquad c,\ a,\ A,\ B;$$

der vierte:

$$a,\ A,\ B,\ C$$
$$b,\ A,\ B,\ C$$
$$c,\ A,\ B,\ C,$$

im Ganzen fünfzehn Gleichungen.

§ 139.

In einem rechtwinkligen Dreiecke, mag es nun sphärisch sein oder ein geradliniges der imaginären Geometrie, kann man für je drei Stücke eine Gleichung annehmen, indem man dabei den rechten Winkel als das vierte gegebene Stück ansieht.

Wenn daher $C = \frac{1}{2}\pi$ ist, so müssen Gleichungen bestehen [352 zwischen den Stücken:

[67

$$a,\ b,\ c \qquad a,\ c,\ B$$
$$a,\ b,\ A \qquad a,\ A,\ B$$
$$a,\ c,\ A \qquad c,\ A,\ B,$$

im Ganzen sechs Gleichungen, von denen die beiden letzten in der gewöhnlichen Geometrie für geradlinige Dreiecke nicht möglich sind, während wir die vier ersten bereits kennen (§ 105, 123), nämlich:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$a = b\,.\,\mathrm{tang}\,A,\quad a = c\,.\,\cos A,\quad a = c\,.\,\sin B.$$

§ 140.

Wie wir gesehen haben, ist bei geradlinigen Dreiecken der gewöhnlichen Geometrie (Gl. (28)):

$$c = a \,.\, \cos B + b \,.\, \cos A.$$

Nach diesem Muster schreiben wir noch hin:

$$a = b \,.\, \cos C + c \,.\, \cos B$$ [68

$$b = c \,.\, \cos A + a \,.\, \cos C.$$

Wir multipliciren alle drei Gleichungen der Reihe nach mit c, a, b und finden, indem wir sodann die erste und letzte von der zweiten abziehen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos A, \tag{67}$$

eine Gleichung zwischen a, b, c, A, die noch die beiden andern (§ 138) bedingt:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \,.\, \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \cos C.$$

Als Gleichung zwischen a, b, A, B ist gefunden worden (Gl. (26)): [353

$$a \,.\, \sin B - b \,.\, \sin A = 0, \tag{68}$$

was folglich (§ 138) die beiden andern bedingt:

$$b \,.\, \sin C - c \,.\, \sin B = 0$$

$$c \,.\, \sin A - a \,.\, \sin C = 0,$$

und in der That geht die letzte aus den beiden ersten hervor, [69 wenn wir b wegschaffen, wobei zugleich $\sin B$ von selbst wegfällt.

Wenn wir hierzu den in der gewöhnlichen Geometrie angenommenen Satz:

$$A + B + C = \pi$$

hinzunehmen, so können wir der Gleichung (68) eine andre Gestalt geben:

$$a \,.\, \sin (A + C) - b \,.\, \sin A = 0$$

oder:

$$\frac{b}{a} = \cos C + \sin C \,.\, \cot A, \tag{69}$$

die Gleichung zwischen a, b, A, C.

§ 141.

Für ein rechtwinkliges Dreieck der imaginären Geometrie, mit der Hypotenuse c und den Katheten a, b, während also $C = \frac{1}{2}\pi$ ist, war gefunden worden (Gl. (58), (59), (60)):

(70) $$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \,.\, \sin \Pi(b),$$

(71) $$\cos \Pi(a) = \cos B \,.\, \cos \Pi(c),$$

(72) $$\sin B = \cos A \,.\, \sin \Pi(a).$$

Ersetzen wir a und B durch b und A, so verwandelt sich die [70 Gleichung (71) in:

$$\cos \Pi(b) = \cos A \,.\, \cos \Pi(c).$$

Indem wir hier hinein den Werth von $\cos \Pi(b)$ aus der Gleichung (70) setzen, erhalten wir:

$$\cos^2 A = \frac{\cos^2 \Pi(c) - \cos^2 \Pi(a)}{\sin^2 \Pi(a) \,.\, \cos^2 \Pi(c)},$$

ferner: [354

$$\sin^2 A = \cot^2 \Pi(a) \,.\, \tang^2 \Pi(c),$$

und da die Winkel A, $\Pi(a)$ und $\Pi(c)$ spitz sind, so wird:

(73) $$\sin A \,.\, \tang \Pi(a) = \tang \Pi(c).$$

Indem wir hier den Werth von $\tang \Pi(c)$ aus der Gleichung (70) einsetzen, erhalten wir:

$$\sin^2 A = \frac{\cos^2 \Pi(a) \,.\, \sin^2 \Pi(b)}{1 - \sin^2 \Pi(a) \,.\, \sin^2 \Pi(b)},$$

folglich:

$$\cos^2 A = \frac{\cos^2 \Pi(b)}{1 - \sin^2 \Pi(a) \,.\, \sin^2 \Pi(b)}$$

und schliesslich: [71

(74) $$\tang A = \cos \Pi(a) \tang \Pi(b).$$

Durch Wegschaffung von a aus den Gleichungen (71) und (72) finden wir:

$$\cos^2 \Pi(c) = \frac{\cos^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A \,.\, \cos^2 B}$$

und sodann:

(75) $$\sin \Pi(c) = \tang A \,.\, \tang B.$$

Die Gleichungen (70), (71), (72), (73), (74), (75) sind eben die, deren Vorhandensein wir vorausgesetzt haben. Es genügt, drei von ihnen zu kennen, um die übrigen zu finden; wir können sogar diese drei beliebig, nur von einander verschieden, unter der Zahl aller derer wählen, die entstehen, wenn wir zu den angegebenen neue hinzufügen, indem wir die spitzen Winkel und die Katheten des Dreiecks mit einander vertauschen. So dürfen wir zu den Gleichungen (71), (72), (73), (74) noch die folgenden vier hinzufügen:

(76) $$\cos \Pi(b) = \cos A \,.\, \cos \Pi(c),$$

(77) $$\sin A = \cos B \,.\, \sin \Pi(b),$$

(78) $$\tang \Pi(c) = \sin B \,.\, \tang \Pi(b),$$

(79) $$\tang B = \cos \Pi(b) \,.\, \tang \Pi(a),$$

die mit den früheren sechs im Ganzen zehn Gleichungen für das [72 geradlinige rechtwinklige Dreieck der imaginären Geometrie darstellen. Unter diesen folgen die fünf: (73), (74), (75), (78), (79) unmittelbar [355 aus den Gleichungen (55), wenn wir durch zwei dividiren und auf beiden Seiten die Tangente nehmen, dann die Gleichung (62) heranziehen und schliesslich $\Pi(\alpha) = A$, $\Pi(\beta) = B$ setzen.

Zum Beispiel ergiebt die erste der Gleichungen (55):

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} A &= \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\Pi(a'-b') - \operatorname{tang} \frac{1}{2}\Pi(a'+b')}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2}\Pi(a'-b') \,.\, \operatorname{tang} \frac{1}{2}\Pi(a'+b')} \\ &= \frac{e^{a'}}{e^{2a'}+1}(e^{b'} - e^{-b'}),\end{aligned}$$

das heisst:

$$\operatorname{tang} A = \cos \Pi(a) \,.\, \operatorname{tang} \Pi(b),$$

dieselbe Gleichung wie schon vorhin (Gl. (74)). Dasselbe finden wir auf ähnliche Weise aus der zweiten Gleichung (55).

Die dritte der Gleichungen (55) ergiebt:

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} \Pi(a) &= \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\Pi(\beta-b') + \operatorname{tang} \frac{1}{2}\Pi(\beta+b')}{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2}\Pi(\beta-b') \,.\, \operatorname{tang} \frac{1}{2}\Pi(\beta+b')} \\ &= \frac{e^{\beta}}{e^{2\beta}-1}(e^{b'} + e^{-b'}),\end{aligned}$$ [73

das heisst:

$$\operatorname{tang} \Pi(a) = \frac{\operatorname{tang} B}{\cos \Pi(b)},$$

dieselbe Gleichung wie schon vorhin (Gl. (79)). Dasselbe erhalten wir aus der zehnten Gleichung (55).

Diese beiden Beispiele genügen, um zu beurteilen, auf welche Weise die Gleichungen (55) gewisse unter den zehn Gleichungen für das Dreieck bestätigen. Die übrigen fünf folgen aus der Verbindung dieser unter einander.

Alle zehn Gleichungen für das Dreieck können wir auch aus den Gleichungen (56) ableiten, wenn wir die Gleichung (62) zu Hülfe nehmen. Zum Beispiel ergeben die beiden ersten unter den Gleichungen (56):

$$\begin{aligned}\Pi(\alpha-b) - \Pi(\alpha+b) &= \Pi(\beta-a) - \Pi(\beta+a) \\ \Pi(\alpha-b) + \Pi(\alpha+b) &= \Pi(a-\beta) - \Pi(a+\beta).\end{aligned}$$

Indem wir jede durch zwei dividiren, sodann auf beiden Seiten [356, 74] die Tangente nehmen und schliesslich A und B an die Stelle von $\Pi(\alpha)$ und $\Pi(\beta)$ setzen, erhalten wir:

$$\begin{aligned}\sin A \,.\, \operatorname{tang} \Pi(a) &= \sin B \,.\, \operatorname{tang} \Pi(b) \\ \operatorname{tang} A \,.\, \operatorname{tang} B &= \sin \Pi(a) \,.\, \sin \Pi(b).\end{aligned}$$

Schaffen wir hieraus B weg, so finden wir die Gleichung (74), wenn wir b wegschaffen, gelangen wir zu der Gleichung (72).

Schon zwei verschiedene unter allen zehn Gleichungen genügen, um daraus alle übrigen abzuleiten, wenn wir:

$$\Pi(b),\quad \Pi(c),\quad A,\quad B$$

mit:

$$\tfrac{1}{2}\pi - A,\quad B,\quad \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b),\quad \Pi(c)$$

vertauschen (§ 136), sodann a, b, A, B mit b, a, B, A und so fortfahren, bis wir zu früheren Gleichungen gelangen. Nehmen wir zum Beispiel die Gleichungen (70) und (75). Die erste ergiebt:

$$(80)\qquad \begin{cases} \sin \Pi(a) \,.\, \sin \Pi(b) = \sin \Pi(c) \\ \sin \Pi(a) \,.\, \cos A = \sin B \\ \sin \Pi(b) \,.\, \cos B = \sin A \\ \cos A \,.\, \cos \Pi(c) = \cos \Pi(b) \\ \cos B \,.\, \cos \Pi(c) = \cos \Pi(a). \end{cases}$$

Aehnlich gehen aus der Gleichung (75) die folgenden hervor: [75

$$(81)\qquad \begin{cases} \operatorname{tang} A \,.\, \operatorname{tang} B = \sin \Pi(c) \\ \operatorname{tang} \Pi(b) \,.\, \sin B = \operatorname{tang} \Pi(c) \\ \operatorname{tang} \Pi(a) \,.\, \sin A = \operatorname{tang} \Pi(c) \\ \operatorname{tang} \Pi(a) \,.\, \cos \Pi(b) = \operatorname{tang} B \\ \operatorname{tang} \Pi(b) \,.\, \cos \Pi(a) = \operatorname{tang} A. \end{cases}$$

§ 142.

Wir gehen nunmehr zu den Gleichungen über, die zwischen je vier Stücken jedes geradlinigen Dreiecks der imaginären Geometrie bestehen.

Indem wir von der Ecke C aus auf die Seite c das Loth p [357 fällen, erhalten wir zwei rechtwinklige Dreiecke: das eine mit der Hypotenuse b, den Katheten p, $c - x$ und dem Winkel A gegenüber p;

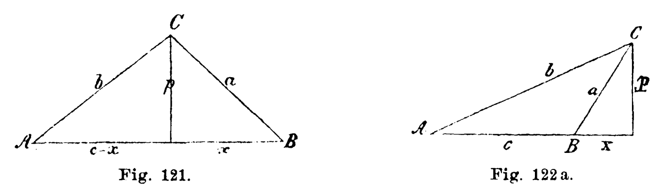


Fig. 121. Fig. 122a.

das andre mit der Hypotenuse a, den Katheten p, x und dem Winkel B gegenüber p, falls x eine positive Zahl ist (Fig. 121), oder mit dem Winkel $\pi - B$ gegenüber p, falls x negativ ist (Fig. 122a). In beiden Fällen, sowie auch für $x = 0$, erhalten wir (Gl. (73), (71)):

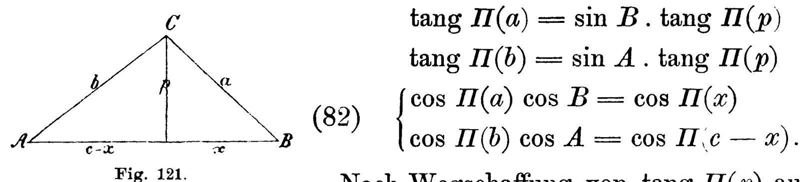


Fig. 121.

$$\tang \Pi(a) = \sin B \,.\, \tang \Pi(p)$$
$$\tang \Pi(b) = \sin A \,.\, \tang \Pi(p)$$
$$(82)\quad \begin{cases} \cos \Pi(a) \cos B = \cos \Pi(x) \\ \cos \Pi(b) \cos A = \cos \Pi(c - x). \end{cases}$$

Nach Wegschaffung von tang $\Pi(p)$ aus [76 den beiden ersten Gleichungen finden wir:

$$(83)\qquad \tang \Pi(a) \,.\, \sin A = \tang \Pi(b) \,.\, \sin B.$$

Das folgt auch aus der Gleichung (54), sobald wir darin unter $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(\gamma)$ die Grössen A, B, C verstehen. Wenn wir a, γ, c, α durch c, α, a, γ ersetzen, so wird:

$$(84)\qquad \begin{cases} \Pi(\beta) = \Pi(a - \gamma) - \Pi(c + \alpha) \\ \Pi(\beta) = \Pi(c - \alpha) - \Pi(a + \gamma) \end{cases}$$

und hieraus:

$$\Pi(a + \gamma) + \Pi(a - \gamma) = \Pi(c + \alpha) + \Pi(c - \alpha).$$

Dividiren wir durch zwei und nehmen wir sodann auf beiden Seiten die Tangente, so erhalten wir (Gl. (62)):

$$\frac{e^a}{e^{2a} - 1}(e^\gamma + e^{-\gamma}) = \frac{e^c}{e^{2c} - 1}(e^\alpha + e^{-\alpha}),$$

das heisst:

$$(85)\qquad \frac{\tang \Pi(a)}{\sin C} = \frac{\tang \Pi(c)}{\sin A},$$

eine der früheren Gl. (83) ähnliche Gleichung.

Aus den Gleichungen (82) erhalten wir durch Wegschaffung [77 von x (Gl. (64)):

$$\cos \Pi(c) = \frac{\cos \Pi(a) \,.\, \cos B + \cos \Pi(b) \,.\, \cos A}{1 + \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos A \,.\, \cos B},$$

hieraus: [358

$$\cos \Pi(a) \,.\, \cos B = \frac{\cos \Pi(c) - \cos \Pi(b) \,.\, \cos A}{1 - \cos \Pi(b) \,.\, \cos \Pi(c) \,.\, \cos A},$$

sodann:

$$\{1 - \cos A . \cos \Pi(b) . \cos \Pi(c)\}\,\{1 - \cos B . \cos \Pi(c) . \cos \Pi(a)\} = \sin^2 \Pi(c).$$

Dementsprechend ist:

$$\{1 - \cos B . \cos \Pi(c) . \cos \Pi(a)\}\,\{1 - \cos C . \cos \Pi(a) . \cos \Pi(b)\} = \sin^2 \Pi(a)$$
$$(86)\quad \{1 - \cos C . \cos \Pi(a) . \cos \Pi(b)\}\,\{1 - \cos A . \cos \Pi(b) . \cos \Pi(c)\} = \sin^2 \Pi(b).$$

Das Produkt aus der ersten und der letzten dieser Gleichungen dividirt durch die zweite ergiebt:

$$\{1 - \cos A \,.\, \cos \Pi(b) \,.\, \cos \Pi(c)\}^2 = \frac{\sin^2 \Pi(b) \,.\, \sin^2 \Pi(c)}{\sin^2 \Pi(a)},$$ [78

folglich:

$$(87)\qquad \cos A \,.\, \cos \Pi(b) \,.\, \cos \Pi(c) + \frac{\sin \Pi(b) \,.\, \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1.$$

Indem hierin den Werth von $\sin \Pi(c)$ aus Gleichung (85) einsetzen, finden wir:

$$\cos \Pi(c) = \frac{\cos \Pi(a) \,.\, \sin C}{\sin \Pi(b) \,.\, \sin A + \cos \Pi(a) \,.\, \cos \Pi(b) \,.\, \cos A \,.\, \sin C}.$$

Durch Einsetzung dieses Werthes von $\cos \Pi(c)$ in die Gleichung (86) erhalten wir nach allen Vereinfachungen:

$$(88) \qquad \cot A \,.\, \sin C \,.\, \sin \Pi(b) + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}.$$

Schaffen wir hieraus $\sin \Pi(b)$ weg unter Hinzunahme der Gleichung (83), so wird:

$$\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)} \cdot \cos C = 1 - \frac{\cos A \,.\, \sin C}{\sin B} \cdot \sin \Pi(a).$$

Indessen ergiebt die Gleichung (88), wenn a, b, A durch b, a, B ersetzt werden:

$$\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)} = \cot B \,.\, \sin C \,.\, \sin \Pi(a) + \cos C.$$ [79

Schaffen wir aus den beiden letzten Gleichungen $\cos \Pi(b)$ weg, [359 dividiren sodann durch $\sin C$ [und durch $\sin \Pi(a)$] und multipliciren mit $\sin B$, so erhalten wir:

$$(89) \qquad \cos A + \cos B \,.\, \cos C = \frac{\sin B \,.\, \sin C}{\sin \Pi(a)}.$$

Die Gleichungen (83), (87), (88), (89) sind eben die, von denen wir voraussetzten, dass wir sie für die geradlinigen Dreiecke finden würden (§ 138).

Die letzte kann unmittelbar aus den Gleichungen (84) abgeleitet werden, wenn wir diesen zuvor die Gestalt:

$$\Pi(a - \gamma) - B = \Pi(c + \alpha)$$
$$B + \Pi(a + \gamma) = \Pi(c - \alpha)$$

geben. Es ist dann:

$$\frac{\tang \frac{1}{2} B + e^{-a-\gamma}}{1 - \tang \frac{1}{2} B \,.\, e^{-a-\gamma}} \cdot \frac{1 + \tang \frac{1}{2} B \,.\, e^{-a+\gamma}}{e^{-a+\gamma} - \tang \frac{1}{2} B} = \cot^2 \tfrac{1}{2} A$$

oder:

$$\frac{2 \tang \frac{1}{2} B + \sin \Pi(a) \{\tang \frac{1}{2} C + \tang^2 \frac{1}{2} B \,.\, \cot \frac{1}{2} C\}}{\sin \Pi(a) \{\cot \frac{1}{2} C + \tang^2 \frac{1}{2} B \,.\, \tang \frac{1}{2} C\} - 2 \tang \frac{1}{2} B} = \cot^2 \tfrac{1}{2} A.$$

Fügen wir auf beiden Seiten Eins hinzu und multipliciren dann [80 mit dem Nenner, so erhalten wir:

$$\frac{2 \sin \Pi(a)}{\sin C} \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2} A}{\cos^2 \frac{1}{2} B} =$$
$$= \sin \Pi(a) \{\cot \tfrac{1}{2} C + \tang^2 \tfrac{1}{2} B \,.\, \tang \tfrac{1}{2} C\} - 2 \tang \tfrac{1}{2} B.$$

Durch Multiplikation mit $\sin C \,.\, \cos^2 \frac{1}{2} B$ und Division mit $\sin \Pi(a)$ kommt:

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2}A = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2}C \,.\, \cos^2 \tfrac{1}{2}B + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}B \,.\, \sin^2 \tfrac{1}{2}C - \frac{\sin B \,.\, \sin C}{\sin \Pi(a)},$$

woraus die Gleichung (89) selbst leicht abzuleiten ist.

Wenn wir zu den vier Gleichungen (83), (87), (88), (89) die ähnlichen hinzufügen, die durch Vertauschung der Seiten und der Winkel des Dreiecks entstehen, so erhalten wir im Ganzen fünfzehn Gleichungen. Setzen wir darin $C = \frac{1}{2}\pi$, soweit dieser Winkel vorkommt, so finden wir die Gleichungen für die geradlinigen rechtwinkligen Dreiecke (§ 141) wieder.

§ 143.

Die imaginäre Geometrie entspringt, wie wir gesagt haben (§ 117), aus einer allgemeinen Annahme, in der die gewöhnliche Geometrie als besondrer Fall enthalten ist, sobald wir die Linien unendlich [360 klein annehmen. Dabei verwandeln sich gleichzeitig die gefundenen Gleichungen für die geradlinigen Dreiecke der imaginären Geo- [81 metrie in die Gleichungen für derartige Dreiecke der gewöhnlichen Geometrie.

Die Seiten a, b, c eines geradlinigen Dreiecks seien so klein, dass wir ihre Potenzen ausser den niedrigsten vernachlässigen und uns also mit dem Näherungswerthe (Algebra, § 177) begnügen können:

$$\cot \tfrac{1}{2} \Pi(a) = 1 + a$$

und damit zugleich auch:

$$\cot \Pi(a) = a$$
$$\sin \Pi(a) = 1 - \tfrac{1}{2}a^2$$
$$\cos \Pi(a) = a$$

setzen dürfen, und ähnlich für die Seiten b und c. Jetzt verwandeln sich die Gleichungen (83), (87), (88), (89) der imaginären Geometrie in:

$$b \,.\, \sin A - a \,.\, \sin B = 0$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos A$$
$$a \sin (A + C) - b \sin A = 0$$
$$\cos A + \cos (B + C) = 0.$$

Die ersten beiden sind dieselben Gleichungen (67), (68), die für [82 die geradlinigen Dreiecke der gewöhnlichen Geometrie gefunden worden sind. Die letzten beiden erfordern in Verbindung mit der ersten, dass

$$A + B + C = \pi$$

ist, wie in der gewöhnlichen Geometrie angenommen wird.

Nachdem wir diesen Uebergang von der einen Geometrie zu der andern gezeigt haben, sind wir nunmehr berechtigt, den Schluss in

seiner ganzen Allgemeinheit zu ziehen. Da in der Geometrie alle Rechnungen einzig und allein auf die Gleichungen gegründet werden können, die die Abhängigkeit zwischen den Seiten und den Winkeln des Dreiecks ausdrücken, so muss die imaginäre Geometrie jedesmal in die gewöhnliche übergehen, wenn man die Linien unendlich klein annimmt, indem sie immer die Harmonie zeigt, die in der gemeinsamen Quelle beider, nämlich in den Gleichungen (83), (87), (88), (89) [361 für die geradlinigen Dreiecke enthalten ist.

§ 144.

Von den Gleichungen für die geradlinigen rechtwinkligen Dreiecke, bei denen die Summe der drei Winkel $< \pi$ vorausgesetzt wird, können wir unmittelbar zu den Gleichungen für die rechtwinkligen sphärischen Dreiecke übergehen.

Wir haben gesehen (§ 136), dass, wenn in einem geradlinigen Dreiecke c die Hypotenuse ist, a und b die Katheten, $\Pi(\alpha)$ und $\Pi(\beta)$ die Winkel diesen gegenüber, dass dann ein recht- [83 winkliges sphärisches Dreieck vorhanden ist (Fig. 130), das die Hypotenuse $\Pi(a)$, die Katheten $\Pi(c)$ und $\Pi(\beta)$ und diesen gegenüber die Winkel $\Pi(b)$, $\frac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha)$ besitzt. Daher brauchen wir blos in den Gleichungen (80) und (81)

Fig. 130.

$$\Pi(a) \quad \Pi(b) \quad \Pi(c) \quad A \quad B$$

der Reihe nach durch

$$c \quad A \quad a \quad \tfrac{1}{2}\pi - B \quad b$$

zu ersetzen, um für das sphärische rechtwinklige Dreieck alle zehn Gleichungen zu erhalten. Diese lauten demzufolge:

$$(90) \quad \begin{cases} \sin c \,.\, \sin A = \sin a \\ \sin c \,.\, \sin B = \sin b, \end{cases}$$

$$(91) \quad \begin{cases} \sin A \,.\, \cos b = \cos B \\ \sin B \,.\, \cos a = \cos A, \end{cases}$$

$$(92) \quad \cos a \,.\, \cos b = \cos c,$$

$$(93) \quad \begin{cases} \sin a \,.\, \operatorname{tang} B = \operatorname{tang} b \\ \sin b \,.\, \operatorname{tang} A = \operatorname{tang} a, \end{cases}$$

$$(94) \quad \begin{cases} \cos B \,.\, \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \\ \cos A \,.\, \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} b, \end{cases}$$

$$(95) \quad \cot A \,.\, \cot B = \cos c.$$

Jedoch wollen wir bemerken, dass hier die Seiten a, b, c sowie [84 die Winkel A und B sämmtlich kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ vorausgesetzt werden,

da bei dem geradlinigen [rechtwinkligen] Dreiecke die Winkel $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$, $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$ nothwendig spitz sind. Indessen sind die [362 letzten Gleichungen überhaupt für alle sphärischen rechtwinkligen Dreiecke richtig.

Zum Beispiel sind sie für $a = \frac{1}{2}\pi$ erfüllt, weil damit zugleich $c = \frac{1}{2}\pi$, $A = \frac{1}{2}\pi$ und $B = b$ sein muss, welches auch der Winkel B sein möge. Daher sind die Gleichungen auch für $b = \frac{1}{2}\pi$ richtig, welches auch die Seite $a = A$ sein möge.

Es sei ferner $a > \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$, während $b < \frac{1}{2}\pi$ ist, folglich $B < \frac{1}{2}\pi$, $A > \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$ (§ 75, 46) und $c > \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$ (§ 78). Wir verlängern die Seiten a und c, bis sie einander jenseits von b treffen (Fig. 135), wo dann auf diese Weise ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse

$$\pi - c < \tfrac{1}{2}\pi,$$

mit den Katheten

$$b < \tfrac{1}{2}\pi, \quad \pi - a < \tfrac{1}{2}\pi$$

und mit den diesen gegenüberliegenden Winkeln: $B < \frac{1}{2}\pi$, $\pi - A < \frac{1}{2}\pi$ entsteht. Werden die Gleichungen (90), (91), (92), (93), (94), (95) auf dieses Dreieck angewendet, so behalten sie ihre frühere Form, und sie sind daher auch für das gegebene Dreieck mit den Katheten $a > \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$ und $b < \frac{1}{2}\pi$ richtig.

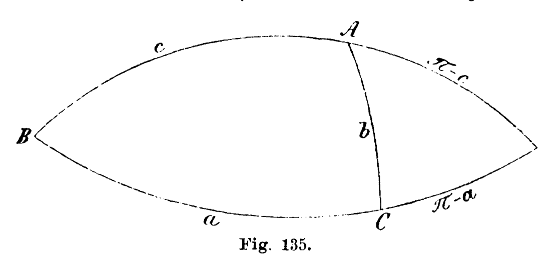


Fig. 135.

Wir nehmen $a > \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$ an, während $b > \frac{1}{2}\pi[$, $< \pi]$ sei, folglich $B > \frac{1}{2}\pi[$, $< \pi]$, $A > \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$ (§ 75, 46) und $c < \frac{1}{2}\pi$ (§ 78). Indem wir mit diesem Dreiecke verfahren wie zuvor, erhalten wir ein [85 rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\pi - c > \frac{1}{2}\pi$, mit den Katheten $\pi - a < \frac{1}{2}\pi$, $b > \frac{1}{2}\pi[$, $< \pi]$ und mit den gegenüberliegenden Winkeln: $\pi - A < \frac{1}{2}\pi$, $B > \frac{1}{2}\pi[$, $< \pi]$; werden diese Seiten und Winkel an Stelle von c, a, b, A, B eingesetzt, so ändern sich die Gleichungen wieder nicht.

Für $a = \pi$ ist $A = \pi$ (§ 46), $b + c = \pi$, $B = \frac{1}{2}\pi$, Werthe, die abermals die Gleichungen erfüllen.

Für $a > \pi$ ist $A > \pi$ (§ 46). Indem wir a zu einem vollen Kreise ergänzen, erhalten wir ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c, den Katheten $2\pi - a$, b und den diesen gegenüberliegenden Winkeln $2\pi - A$, $\pi - B$, hierfür ändert sich jedoch die Gestalt der Gleichungen nicht.

Beliebige Werthe der Katheten a, b liefern alle rechtwinkligen sphärischen Dreiecke ohne Ausnahme, die gefundenen Gleichungen sind daher für diese allgemein gültig.

§ 145.

Wir betrachten ein beliebig gewähltes sphärisches Dreieck und ziehen darin von dem Winkel C aus nach der Seite c die Senkrechte p (Fig. 136), die entweder innerhalb des Dreiecks verläuft und c in zwei Theile zerlegt: x unterhalb a, $c - x$ unterhalb b, oder ausserhalb des Dreiecks die Verlängerung der Seite c in dem Abstande x von der Ecke B, $c + x$ von A trifft. Der erste Fall tritt dann ein, wenn die Winkel A und B gleichzeitig spitz sind, oder gleichzeitig stumpf (§ 75), im zweiten Falle werden wir $A < \frac{1}{2}\pi$, $B > \frac{1}{2}\pi$ voraussetzen. [86

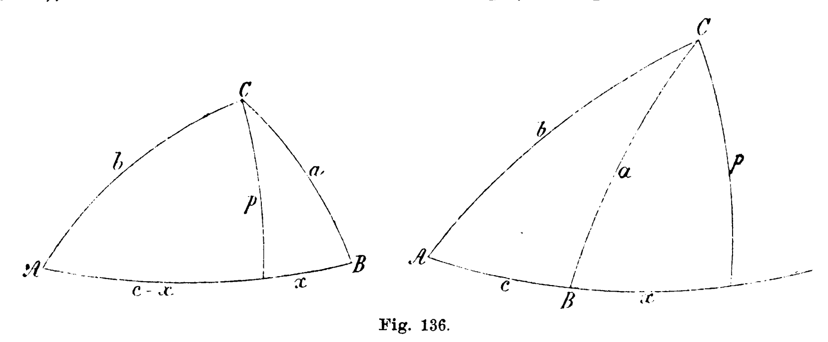


Fig. 136.

Es entstehen so zwei rechtwinklige Dreiecke: in dem einen ist a die Hypotenuse, p und x sind die Katheten und B oder $\pi - B$ [363 der Winkel gegenüber B, in dem andern ist b die Hypotenuse, die eine Kathete p mit dem gegenüberliegenden Winkel A und die zweite Kathete $c - x$ oder $c + x$. Für diese Dreiecke finden wir in beiden Fällen die Gleichungen (Gl. (90), (94)):

$$\sin a \,.\, \sin B = \sin p,$$
$$\sin b \,.\, \sin A = \sin p,$$
$$\operatorname{tang} a \,.\, \cos B = \operatorname{tang} x,$$
$$\operatorname{tang} b \,.\, \cos A = \operatorname{tang}(c - x),$$

sobald wir x als eine positive oder negative Zahl annehmen, jenachdem das Loth p innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks fällt.

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt:

$$\sin a \,.\, \sin B = \sin b \,.\, \sin A. \tag{96}$$

Schaffen wir x aus den beiden andern weg, so finden wir:

$$\operatorname{tang} c = \frac{\operatorname{tang} a \,.\, \cos B + \operatorname{tang} b \,.\, \cos A}{1 - \operatorname{tang} a \,.\, \operatorname{tang} b \,.\, \cos A \,.\, \cos B}$$

und hieraus: [87

$$\operatorname{tang} b \,.\, \cos A = \frac{\operatorname{tang} c - \operatorname{tang} a \,.\, \cos B}{1 + \operatorname{tang} a \,.\, \operatorname{tang} c \,.\, \cos B},$$

ferner:

(97) $(1 + \cos A \,.\, \mathrm{tang}\, b \,.\, \mathrm{tang}\, c)(1 + \cos B \,.\, \mathrm{tang}\, c \,.\, \mathrm{tang}\, a) = \frac{1}{\cos^2 c}\cdot$

Aehnlich ist:

$$(98) \begin{cases} (1 + \cos B \,.\, \mathrm{tang}\, c \,.\, \mathrm{tang}\, a)(1 + \cos C \,.\, \mathrm{tang}\, a \,.\, \mathrm{tang}\, b) = \frac{1}{\cos^2 a} \\ (1 + \cos C \,.\, \mathrm{tang}\, a \,.\, \mathrm{tang}\, b)(1 + \cos A \,.\, \mathrm{tang}\, b \,.\, \mathrm{tang}\, c) = \frac{1}{\cos^2 b}, \end{cases}$$

folglich:

$$\frac{\cos^2 a}{\cos^2 b \,.\, \cos^2 c} = (1 + \mathrm{tang}\, b \,.\, \mathrm{tang}\, c \,.\, \cos A)^2.$$

Hieraus müssen wir schliessen, dass entweder:

$$(99) \qquad \cos A \,.\, \sin b \,.\, \sin c + \cos b \,.\, \cos c = \cos a$$

ist oder: [364

$$(100) \qquad \cos A \,.\, \sin b \,.\, \sin c + \cos b \,.\, \cos c + \cos a = 0.$$

Einstweilen lassen wir die letztere Annahme zu, deren Un- [88 richtigkeit wir jetzt beweisen werden und die übrigens für alle Winkel und Seiten des Dreiecks anzunehmen wäre, wie das die Gleichungen (97) und (98) erfordern. Zum Beispiel wäre:

$$\cos B \,.\, \sin c \,.\, \sin a + \cos c \,.\, \cos a + \cos b = 0.$$

Wenn wir die Gleichung (100) mit $\sin a$ und die letzte mit $\sin b$ multipliciren und beide addiren, so erhalten wir (Gl. (45)):

$$2 \cos \tfrac{1}{2}(A + B) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(A - B) \,.\, \sin a \,.\, \sin b \,.\, \sin c + \\ + \sin (a + b)\{\cos c + \cos (a - b)\} = 0.$$

Ferner (Gl. (45)):

$$\cos \tfrac{1}{2}(A + B) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(A - B) + \\ + \sin (a + b) \,.\, \frac{\cos \frac{1}{2}(b + c - a) \,.\, \cos \frac{1}{2}(a + c - b)}{\sin a \,.\, \sin b \,.\, \sin c} = 0.$$

Wenn wir jetzt [$a > b > c$ und] $a < \pi$, $b < \pi$, $c < \pi$ voraussetzen, folglich auch: $A < \pi$, $B < \pi$, $C < \pi$ (§ 46), $b + c > a$, $a + c > b$ (§ 77), so können unter allen Faktoren nur

$$\cos \tfrac{1}{2}(A + B), \quad \sin (a + b)$$

negativ sein, aber die müssen es stets gleichzeitig sein, denn für [89 $A + B > \pi$ ist $a + b > \pi$ (§ 74), und folglich befriedigen sie die Gleichung nicht.

Der Gleichung (100) genügt auch der Werth $a = \pi$ nicht, weil in diesem Falle $A = \pi$ ist (§ 46) und $b + c = \pi$. Demnach kann man hier auch weder $b = \pi$ setzen noch $c = \pi$.

Ist $a < \pi$, $b < \pi$, $c > \pi$, so wird auch von den Seiten a, b, $2\pi - c$ ein Dreieck gebildet mit den Winkeln A, B, $2\pi - C < \pi$. Jedoch

gehört zu diesem Dreiecke wieder die Gleichung (99), die auf diese Weise überhaupt für alle Dreiecke richtig bleibt.

Setzen wir in die Gleichung (99) den Werth von $\sin c$ ein (Gl. (96)):

$$\sin c = \sin a \frac{\sin C}{\sin A},$$

so erhalten wir: [365

$$\cot A \,.\, \sin a \,.\, \sin b \,.\, \sin C + \cos b \,.\, \cos c = \cos a,$$

durch Einsetzung des Werthes von $\cos c$ (Gl. (99)):

$$\cos c = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos C$$

und durch Division mit $\sin a \,.\, \sin b$ finden wir sodann: [90

$$(101) \qquad \cot A \,.\, \sin C + \cos C \,.\, \cos b = \cot a \,.\, \sin b.$$

Wenn wir hier den Werth von $\sin b$ aus Gleichung (96) einsetzen, so kommt:

$$\cos A \,.\, \sin C + \cos b \,.\, \cos C \,.\, \sin A = \cos a \,.\, \sin B.$$

Aehnlich ist:

$$\cos B \,.\, \sin C + \cos a \,.\, \cos C \,.\, \sin B = \cos b \,.\, \sin A.$$

Die Wegschaffung von $\cos b$ aus diesen beiden Gleichungen ergiebt:

$$(102) \qquad \cos a \,.\, \sin B \,.\, \sin C - \cos B \,.\, \cos C = \cos A.$$

Die Gleichungen (96), (99), (101), (102) sind eben die, von denen wir voraussetzten, dass wir sie für die sphärischen Dreiecke finden würden (§ 138). Die letzte folgt unmittelbar aus der Gleichung (99), wenn wir darin a, b, c, A durch $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$, $\pi - a$ ersetzen (§ 79).

Wenn wir zu den vier Gleichungen (96), (99), (101), (102) die ähnlichen hinzufügen, die durch Vertauschung der Buchstaben in dem Dreiecke entstehen, so erhalten wir im Ganzen fünfzehn; und wenn wir da, wo C vorkommt, $C = \frac{1}{2}\pi$ setzen, so erhalten wir wieder die zehn Gleichungen für die rechtwinkligen Dreiecke.

§ 146. [91

Die Gleichungen für die sphärischen Dreiecke können wir auch mit Hülfe der gewöhnlichen Geometrie allein finden, wie man das bis jetzt regelmässig gethan hat.

Wir setzen voraus, dass in dem sphärischen Dreiecke die Seiten $a < \pi$, $b < \frac{1}{2}\pi$, $c < \frac{1}{2}\pi$ sind (Fig. 137). Es sei D der Mittelpunkt der Kugelfläche, die Halbmesser AD, BD, CD seien nach den Scheiteln der Winkel A, B, C gezogen und sodann über die Punkte B und C

hinaus verlängert, bis sie in B' und C' mit den Lothen AB' und AC' zusammentreffen, die in dem Endpunkte A des Halbmessers AD auf AD errichtet sind. Es sei r der Halbmesser der Kugelfläche,

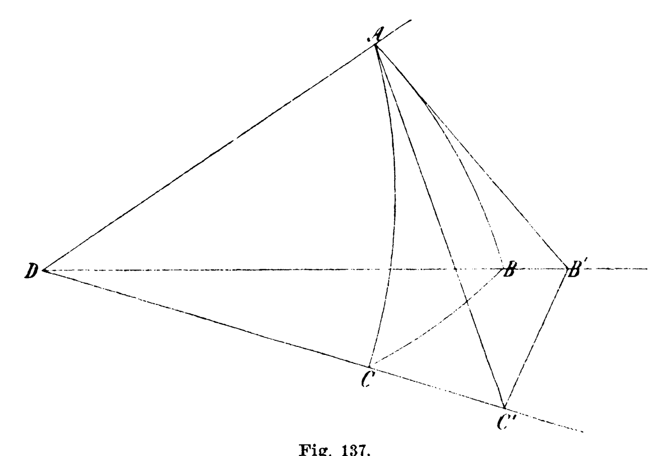


Fig. 137.

$B'C' = x$, $AB' = y$, $AC' = z$, $DB' = \eta$, $DC' = \zeta$. Hier sind [366 die Winkel: $B'DC' = a$, $B'AC' = A$. In den geradlinigen Dreiecken $AB'C'$, $DB'C'$ ist daher (Gl. (67)):

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2yz \,.\, \cos A$$
$$x^2 = \eta^2 + \zeta^2 - 2\eta\zeta \,.\, \cos a.$$

Durch Wegschaffung von x aus beiden Gleichungen und durch nachherige Division mit r^2 erhalten wir:

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} - \frac{2yz}{r^2} \cos A = \frac{\eta^2}{r^2} + \frac{\zeta^2}{r^2} - 2\eta\zeta \cos a.$$

Es ist jedoch (§ 123): [92

$$\frac{z}{r} = \operatorname{tang} b, \quad \frac{y}{r} = \operatorname{tang} c$$
$$\frac{r}{\zeta} = \cos b, \quad \frac{r}{\eta} = \cos c,$$

demnach:

$$\operatorname{tang}^2 b + \operatorname{tang}^2 c - 2 \operatorname{tang} b \,.\, \operatorname{tang} c \,.\, \cos A = \frac{1}{\cos^2 b} + \frac{1}{\cos^2 c} - \frac{2 \cos a}{\cos b \,.\, \cos c},$$

eine Gleichung, die die Form:

(103) $$\cos A \,.\, \sin b \,.\, \sin c + \cos b \,.\, \cos c = \cos a$$

annimmt, wie wir sie vorhin gefunden haben (Gl. (99)).

Es bleiben jetzt die Fälle zu betrachten, wenn a, b, c, A den Bedingungen $a < \pi$, $b < \frac{1}{2}\pi$, $c < \frac{1}{2}\pi$, $A < \pi$ nicht genügen. Wir wollen noch bemerken, dass $A = \pi$ die Gleichung erfüllt, weil dann gleichzeitig: $a = \pi$, $b + c = \pi$ ist.

Es sei $b = \frac{1}{2}\pi$, aber $c < \frac{1}{2}\pi$, folglich müssen wir beweisen, dass:

(104) $$\cos A \,.\, \sin c = \cos a$$

ist. Die Verlängerung der Seite c über den Punkt B hinaus [93 (Fig. 138) machen wir gleich $\frac{1}{2}\pi - c$ und verbinden sodann den Endpunkt dieser Verlängerung mit dem Scheitel des Winkels C durch einen Bogen. So entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse a, den Katheten A und $\frac{1}{2}\pi - c$ und den gegenüberliegenden Winkeln $\pi - B$, $\frac{1}{2}\pi - C$.

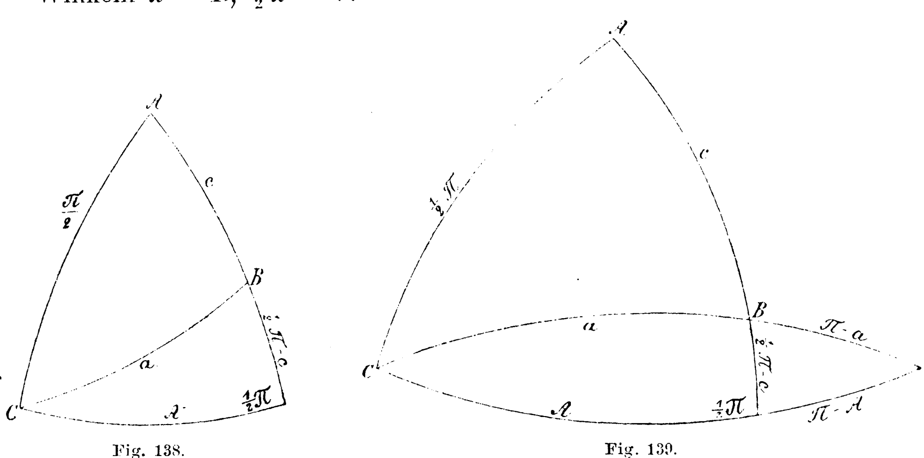


Fig. 138. Fig. 139.

Ist überdies $A < \frac{1}{2}\pi$, so können wir in der Gleichung (103) [367 $\frac{1}{2}\pi$, A, $\frac{1}{2}\pi - c$ an die Stelle von A, b, c setzen, während wir a unverändert lassen: das giebt uns die Gleichung (104). Ist $A > \frac{1}{2}\pi$, folglich $a > \frac{1}{2}\pi$, so verlängern wir in dem rechtwinkligen Dreiecke A und a über die Seite $\frac{1}{2}\pi - c$ hinüber, bis sie zusammentreffen, und dadurch entsteht wieder ein rechtwinkliges Dreieck (Fig. 139) mit der Hypotenuse $\pi - a < \frac{1}{2}\pi$, den Katheten $\frac{1}{2}\pi - c$, $\pi - A < \frac{1}{2}\pi$ und den gegenüberliegenden Winkeln $\frac{1}{2}\pi - C$, B. Setzen wir nunmehr in der Gleichung (103) $\frac{1}{2}\pi$, $\pi - A$, $\frac{1}{2}\pi - c$, $\pi - a$ an die Stelle von A, b, c, a, so erhalten wir wiederum die Gleichung (104).

Es sei $b > \frac{1}{2}\pi$, aber $c < \frac{1}{2}\pi$, $A < \pi$, folglich $a < \pi$. Wir verlängern die Seiten a und b, bis sie jenseits von c zusammentreffen. So entsteht ein neues Dreieck mit den Seiten $\pi - a$, $\pi - b < \frac{1}{2}\pi$, $c < \frac{1}{2}\pi$ und den gegenüberliegenden Winkeln: $\pi - A$, $\pi - B$, C. Demnach können wir $\pi - A$, $\pi - a$, $\pi - b$, c in die Gleichung (103) einsetzen, wobei diese ihre Gestalt nicht verändert.

Der Fall: $b = \pi$ befriedigt die Gleichung (103), weil dann gleichzeitig $a + c = \pi$ ist.

Der Fall: $b = \frac{1}{2}\pi$, $c = \frac{1}{2}\pi$ erfüllt die Gleichung (103) auch, [94 weil dann gleichzeitig $a = A$ ist.

Ist $b = \frac{1}{2}\pi$, $c > \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$, so muss die Gleichung (104) wieder bewiesen werden. Wir tragen auf der Seite c von der Ecke A aus den Bogen $\frac{1}{2}\pi$ ab (Fig. 140); den andern Endpunkt dieses Bogens verbinden wir mit der Ecke C. So entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse a, den Katheten A, $c - \frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2}\pi$ und den gegenüberliegenden Winkeln B, $C - \frac{1}{2}\pi$. Unter Beibehaltung von a können wir daher in der Gleichung (103) $\frac{1}{2}\pi$, A, $c - \frac{1}{2}\pi$ an die Stelle von A, b, c setzen, und diese Gleichung verwandelt sich dabei in (104)

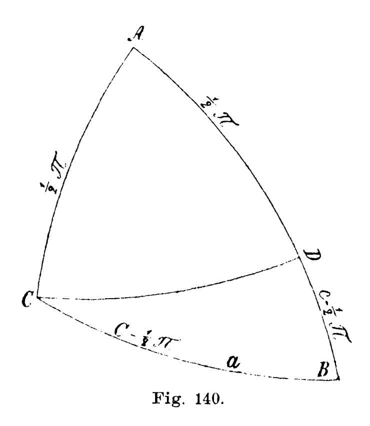


Fig. 140.

Ist $b > \frac{1}{2}\pi$, aber $< \pi$, $c > \frac{1}{2}\pi$, aber $< \pi$, so verlängern wir die Bogen b und c über die Seite a hinüber, bis sie zusammentreffen. Von den Seiten a, $b - \pi$, $\pi - c$ und den gegenüberliegenden Winkeln A, $\pi - B$, $\pi - C$ wird dann ein Dreieck gebildet, für das die Gleichung (103) ihre Form beibehält.

Ist $a > \pi$, aber $b < \pi$, $c < \pi$, so ersetzen wir a durch den Bogen $2\pi - a < \pi$ und erhalten so ein Dreieck mit den Seiten: $2\pi - a < \pi$, b, c und den gegenüberliegenden Winkeln: $2\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$. Die Gleichung (103) ändert sich jedoch für dieses Dreieck nicht.

Ist $b > \pi$, aber $a < \pi$, $c < \pi$, so ersetzen wir die Seite b durch den Bogen $2\pi - b < \pi$ und bilden so ein Dreieck mit den Seiten [95 $a < \pi$, $2\pi - b < \pi$, $c < \pi$ und mit den gegenüberliegenden Winkeln [368 $\pi - A$, $2\pi - B$, $\pi - C$. Die Gleichung (103) behält wieder ihre frühere Gestalt.

Aus der Gleichung (103) folgt:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\sin b \,.\, \sin c}.$$

Die Ausdrücke: $1 + \cos A$, $1 - \cos A$ ergeben daher:

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b + c) \,.\, \sin \frac{1}{2}(b + c - a)}{\sin b \,.\, \sin c}$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + c - b) \,.\, \sin \frac{1}{2}(a + b - c)}{\sin b \,.\, \sin c}.$$

Hieraus finden wir, indem wir der Kürze wegen $a + b + c = s$ setzen:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{2\sqrt{\sin \frac{1}{2}s \,.\, \sin(\frac{1}{2}s - a) \,.\, \sin(\frac{1}{2}s - b) \,.\, \sin(\frac{1}{2}s - c)}}{\sin a \,.\, \sin b \cdot \sin c}$$

und schliessen, dass:

$$\text{(105)} \qquad \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$$

ist, ohne das Zeichen vor der Quadratwurzel in Betracht zu [96 ziehen, weil $\sin A$ und $\sin a$ für $A < \pi$ beide gleichzeitig positive Zahlen sind und für $A > \pi$ beide gleichzeitig negative. Dasselbe ist von den Sinusen $\sin B$ und $\sin b$ zu sagen.

Die Gleichungen (103) und (105) sind dieselben, die früher angegeben worden sind (Gl. (96), (99)) und die bereits genügen, um die beiden andern (101) und (102) für die sphärischen Dreiecke zu finden, wie wir das gesehen haben (§ 145).

Daher bleiben die Gleichungen (96), (99), (101), (102) für die sphärischen Dreiecke dieselben, mögen wir nun den Parallelwinkel als konstant oder als veränderlich annehmen.

Auch verdient bemerkt zu werden, dass die Gleichungen (83), (87), (88), (89) für die geradlinigen Dreiecke der imaginären Geometrie in die Gleichungen (96), (99), (101), (102) für die sphärischen Dreiecke übergehen, wenn wir anstatt der Seiten a, b, c des geradlinigen Dreiecks einsetzen: $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$ oder, was ganz [369 gleich ist, wenn wir anstatt der willkürlichen Zahl e setzen:

$$e^{\sqrt{-1}}$$

und wiederum unter e die Grundzahl der Neperschen Logarithmen [97 verstehen. Bei dieser Veränderung müssen wir nunmehr (Gl. (62), (63), (64), (65))

$$\sin \Pi(a) = \frac{1}{\cos a}$$

$$\cos \Pi(a) = \sqrt{-1} \,.\, \operatorname{tang} a$$

$$\cot \Pi(a) = \sqrt{-1} \,.\, \sin a$$

setzen.

[Die „Neuen Anfangsgründe“ Lobatschefskijs enthalten noch zwei Kapitel:

Kapitel XII. Die Auflösung der geradlinigen Dreiecke in der gewöhnlichen Geometrie. K. G. S. 1838, I, S. 3—124.

Kapitel XIII. Die Auflösung der sphärischen rechtwinkligen Dreiecke. K. G. S. 1838, III, S. 3—65,

die in der Vollständigen Sammlung der geometrischen Arbeiten Lobatschefskijs Bd. I, Kasan 1883, auf S. 370—449 und 450—486 abgedruckt sind. Hier werden diese Kapitel nicht übersetzt, weil sie, wie schon ihre Ueberschriften erkennen lassen, mit der nichteuklidischen Geometrie nichts zu thun haben.]

NIKOLAJ IWANOWITSCH

LOBATSCHEFSKIJ.

ZWEI GEOMETRISCHE ABHANDLUNGEN

AUS DEM RUSSISCHEN UEBERSETZT, MIT ANMERKUNGEN UND MIT EINER BIOGRAPHIE DES VERFASSERS

VON

FRIEDRICH ENGEL.

ZWEITER THEIL:

ANMERKUNGEN. LOBATSCHEFSKIJS LEBEN UND SCHRIFTEN. REGISTER.

MIT 67 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1899.

Inhalt des zweiten Theils.

Nachträgliches.

Zu S. 435f. schreibt mir Excellenz O. Struve unterm 11. Januar 1899 aus Karlsruhe, er könne aufs Bestimmteste versichern, dass jener Besuch bei Gauss im Spätsommer 1844 stattgefunden habe. Sowohl 1843 als 1844 habe er bei Schumacher in Altona gewohnt, aber im ersteren Jahre nur eine Vergnügungstour an den Rhein und nach Thüringen gemacht, insbesondere zu seinem Freunde Hansen in Gotha, ohne auf dieser Reise Göttingen zu berühren. Im Sommer 1844 habe er die grosse Chronometerexpedition zwischen Altona und Greenwich geleitet, habe England am 22. August verlassen, dann 14 Tage in Paris verbracht und sei über Bonn nach Göttingen gereist. Demgemäss sei er beiläufig am 10. September bei Gauss gewesen; bei der Angabe „Ende August 1844“ (S. 435, Z. 15) habe ihm wohl der, von der Jugend her geläufigere, alte Stil vorgeschwebt. Ende September 1844 in Petersburg wieder eingetroffen, habe er sich sogleich bemüht, Alles zu sammeln, was sich bei den dortigen Buchhändlern von Lobatschefskijs Schriften auftreiben liess, und habe das Gefundene mit einem der letzten regelmässig verkehrenden Dampfschiffe nach Deutschland gesendet.

S. 419, Z. 6, 5 v. u. lies: Lobatschefskij-Bolyaische.

S. 436, Z. 3—1 v. u. In den Göttingischen Gelehrten Anzeigen vom 15. December 1842 (S. 1986) findet man eine kurze Notiz über die erfolgte Wahl des neuen Korrespondenten.

Anmerkungen.

Im Folgenden wird von den nachstehenden Abkürzungen Gebrauch gemacht:

K. B. ist der Kasaner Bote (Kasánskij Wjéstnik). Dieser erschien in einzelnen Oktavheften. Im Allgemeinen bildeten die im Laufe von vier Monaten erschienenen Hefte einen Theil (tschastj). Die Theile waren fortlaufend nummerirt. Jedes Heft (kníshka) trug ausser der Jahreszahl und ausser seiner Nummer innerhalb des betreffenden Theils noch die Bezeichnung: für den Monat . . . oder: für die Monate . . . . In den Kopfüberschriften auf S. 2—66 der gegenwärtigen Uebersetzung sind der Kürze wegen statt der Monatsnamen die Nummern der Monate angegeben.

A. P., der Petrofskijsche Abdruck, ist ein fortlaufend paginirter Sonderabdruck, den Professor Petrófskij in Kasan von der Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe" besitzt.

K. G. S., die Kasaner gelehrten Schriften (Utschónyja sapíski Kasánskawa Universitéta) von Lobatschefskij im Jahre 1834 gegründet. Der erste Jahrgang 1834 besteht aus zwei Oktavheften, die folgenden aus je vier, die durchweg besonders paginirt sind. Später kommen auch einzelne Hefte in Quart vor.

G. A., die vollständige Sammlung der geometrischen Arbeiten Lobatschefskijs (Pólnoje sobránije sotschinénij po geometríi N. J. Lobatschefskawa). Theil I (die Arbeiten in russischer Sprache) Kasan 1883, S. 1—550, Theil II (die Arbeiten in deutscher und französischer Sprache, mit einem Bilde Lobatschefskijs) Kasan 1886, S. 551—680.

U. A., die Abhandlung: Ueber die Anfangsgründe der Geometrie (O natschálach geometríi). K. B. 1829 und 1830, G. A. I, S. 1—67, hier S. 1—66.

N. A., die Abhandlung: Neue Anfangsgründe der Geometrie (Nówyja natschála geometríi). K. G. S. 1835—1838. G. A. I, S. 219—486, hier S. 67—236.

J. G. F., die Abhandlung: Géométrie imaginaire, Crelles Journal Bd. XVII, 1837, S. 295—320. G. A. II, S. 581—613.

J. G. R., die Abhandlung: Imaginäre Geometrie (Woobrashájemaja geometríja), Bearbeitung der vorhergehenden Abhandlung in russischer Sprache, K. G. S. 1835, I, S. 3—88, G. A. I, S. 71—120.

A. J. G., die Abhandlung: Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale (Primjenjénije woobrashájemoj geometríi k njekotórym integrálam). K. K. S. 1836, I, S. 3—166. G. A. I, S. 121—218.

G. U., das Schriftchen: Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin 1840. In der Fincke'schen Buchhandlung, 61 Seiten Oktav. G. A. II, S. 553—578. Ein Faksimiledruck ist 1887 bei Mayer und Müller in Berlin erschienen.

P. G. R., die Abhandlung: Pangeometrie (Pangeometríja) in russischer Sprache. K. G. S. 1855, I, in Quart, S. 1—56, G. A. I, S. 489—550, erschienen 1856.

P. G. F., die Abhandlung: Pangéométrie ou précis de Géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles, eine französische Uebersetzung der vorigen. Sammlung gelehrter Abhandlungen zum fünfzigjährigen Jubiläum der Universität Kasan (Sbórnik utschónych statjéj) Bd. I, Kasan 1856, S. 279—340. G. A. II, S. 617—680.

P. Th., das Buch: Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, herausgegeben von Stäckel und Engel, Leipzig 1895.

Im Folgenden beziehen sich die ohne weitere Bemerkung angeführten Seitenzahlen auf die vorliegende Uebersetzung oder, sobald sie in Klammern eingeschlossen sind, auf die G. A. Etwaige Abweichungen der Uebersetzung von dem Texte der Originaldrucke werden im Folgenden immer angegeben, dagegen werden solche Stellen, an denen die Uebersetzung den in den G. A. geänderten Urtext wiederhergestellt hat, im Allgemeinen nicht angeführt.

In den Figuren sind parallele Gerade überall durch Pfeile kenntlich gemacht.

I. Zu der Abhandlung:

Ueber die Anfangsgründe der Geometrie.

S. 1, Z. 1 (1, Z. 1). Die Uebersetzung „Anfangsgründe" für „Natschala" rührt von Lobatschefskij selbst her, s. G. U. S. 4, G. A. II, S. 553; man könnte Natschala auch durch: Principien wiedergeben.

S. 1, Z. 4—1 v. u. (1, Z. 3—1 v. u.). Das Manuskript dieser Abhandlung ist bis jetzt noch nicht wiedergefunden und ist wahrscheinlich verloren, einige Stücke sind uns jedoch daraus erhalten und zwar allem Anscheine nach genau in der ursprünglichen Gestalt, man vgl. S. 21 Anm. und S. 214 Anm.

S. 2, Z. 8—5 v. u. (2, Z. 15—13 v. u.) Der Text des K. B. lautet: Вѣчность и одинаковость разъ сообщеннаго движенiа, гдѣ скорость служитъ мѣрою одного и массы различныхъ тѣлъ u. s. w. In den G. A. ist das одного durch онаго ersetzt, und es wäre dann массы nicht als der Nominativus Pluralis, sondern als der Genetivus Singularis aufzufassen, der brachylogisch statt des Pluralis gesetzt wäre: „wo die Geschwindigkeit als Mass für jene (die Bewegung) und für die Massen verschiedener Körper dient". Der ursprüngliche Wortlaut erscheint mir grammatisch richtiger und mindestens ebenso verständlich.

S. 3, Z. 14, 10 v. u. (3, Z. 10, 13). Reihenschnitte: сѣченiя поступательныя, eigentlich sich vorwärts bewegende oder auf einander folgende Schnitte; Wendeschnitte: сѣченiя обращательныя.

S. 7, Z. 4 (6, Z. 8) K. B.: Перемѣняясь „die sich verändern", A. P. richtig: Пересѣкаясь.

S. 8, Z. 10 (7, Z. 6). Diese Bestimmung ist äusserst zweckmässig und verdient allgemeine Verbreitung. Sollte sie Lobatschefskij eigenthümlich sein?

S. 8, Z. 21—19 v. u. (7, Z. 14 f.). Alle Ausgaben haben irrthümlich: Проведенныхъ statt: -ными.

S. 9, Z. 6 (7, Z. 3 v. u.). Alle Ausgaben: „Dreiecks" statt: „Vielecks".

S. 9, Z. 12 (8, Z. 1). Im Texte schreiben wir Brüche stets in dieser Weise, eine Bezeichnung, die auch Lobatschefskij selbst zuweilen anwendet.

S. 9, Z. 17 (8, Z. 5). A. P. hat: Hier sind m und t nothwendig kleiner als sechs, sonst ....

S. 10, Z. 2 v. u. (8, Z. 2 v. u.). Die nur eine Seite umfassende Arbeit Grunerts hat den Titel: „Einfacher Beweis der von Cauchy und Euler gefundenen Sätze von Figurennetzen und Polyëdern."

S. 11 f. Im K. B. steht die Seitenzahl 240 zweimal nach einander.

S. 11, Z. 18f. (9, Z. 1 v. u.). Für diesen Winkel hat Lobatschefskij später die Bezeichnung eingeführt: „der zu der Linie (dem Lothe) a gehörige Parallelwinkel", und zwar findet sich diese Bezeichnung zuerst in der A. J. G., s. K. G. S. 1836, I, S. 5, G. A. I, S. 122. Dort, sowie auch schon vorher in der I. G. F. wie I. G. R., schreibt er für $F(a)$ einfach a'. In den N. A. dagegen (s. hier S. 167) wendet er das Zeichen $\Pi(a)$ an, an dem er später in den G. U. und in der P. G. festgehalten hat.

S. 14, Z. 2 (12, Z. 12). Lobatschefskij schreibt stets: $\sin A^2$, $\cos A^2$ und dementsprechend.

S. 14, Z. 15 v. u. (12, Z. 4 v. u.). Der K. B. hat $\frac{1}{2}\pi - B$ statt: $- B$, im A. P. steht das Richtige.

S. 15, Z. 1 v. u. (13, Z. 5 v. u.). Lobatschefskij setzt die Gleichungsnummer stets rechts von der Gleichung.

S. 16, Fig. 2. In K. B. fehlt a'.

S. 17, Z. 5 (14, Z. 15). $b' - a$ ist positiv, denn $F(b') < F(a)$, also $b' > a$ (nach § 8).

S. 17, Z. 7 (14, Z. 16). Der K. B. hat ON statt: NO.

S. 17, Z. 12—19 (14, Z. 19—13 v. u.). Nach § 8 ist ja:

$$F(c - a') = \pi - F(a' - c),$$

also folgt aus (4):

$$F(a' - c) + F(a' + c) = \pi - 2F(b') = 2F(\beta'). \tag{4a}$$

Denkt man sich jetzt ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse a' und dem anliegenden spitzen Winkel $F(c)$ (Fig. 1'), so gilt nach (3) für die $F(c)$ gegenüberliegende Kathete m die Gleichung:

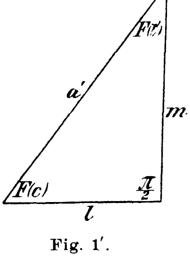


Fig. 1'.

$$2F(m) = F(a' - c) + F(a' + c),$$

mithin ist: $F(m) = F(\beta')$ und: $m = \beta'$. Ferner erhält man nach (4) für den der andern Kathete l gegenüberliegenden Winkel $F(l')$ die Gleichung:

$$\begin{aligned} 2F(l') &= F(a' - c) - F(a' + c) \\ &= \pi - F(c - a') - F(c + a') \\ &= \pi - 2F(a), \end{aligned}$$

demnach wird: $F(l') = F(\alpha)$ und: $l' = \alpha$. Zur Bestimmung der Kathete l dienen endlich die den Gleichungen (1) und (2) entsprechenden:

$$F(l) = F(a' + \alpha) + F(c)$$
$$F(l) = F(a' - \alpha) - F(c)$$

und überdies bestehen nach (5) wegen $l' = \alpha$ und $m = \beta'$ noch die Gleichungen:

$$F(\alpha - \beta') + F(c + l) = \tfrac{1}{2}\pi$$
$$F(\alpha + \beta') + F(c - l) = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Das sind die einzigen Gleichungen, die sich für l ergeben, aus ihnen lässt sich aber noch nicht schliessen, dass $l = b$ ist, was doch bei den Worten auf S. 17, Z. 6 v. u. (14, Z. 5 v. u.) vorausgesetzt wird. Dass $l = b$ ist,

folgt eigentlich erst, wenn man das in § 12 eingeführte sphärische Dreieck zu Hülfe nimmt. In der That hat Lobatschefskij in seinen späteren Veröffentlichungen niemals den in § 11 gemachten Schluss wiederholt, sondern stets das sphärische Dreieck des § 12 benutzt. Vgl. N. A. § 136, hier S. 210f., ferner G. U. Nr. 35 in den G. A. II, S. 570f., endlich P. G. R. und F., in den G. A. I, S. 494ff. II, S. 623f.

S. 17, Fig. 6. Hier ist auf die dem Winkel $F(c)$ anliegende Kathete der Buchstabe b zu setzen, der in den G. A. fehlt, aber im K. B. vorhanden ist, wenn auch sehr undeutlich.

S. 17f. (14f.), Gl. (6) bis (10). Vertauscht man abwechselnd einmal a mit b, a' mit b' und das andre Mal:

$$a, \quad \alpha, \quad c, \quad \gamma, \quad a', \quad \alpha', \quad b', \quad \beta'$$

der Reihe nach mit:

$$\beta', \quad b', \quad a', \quad \alpha', \quad c, \quad \gamma, \quad \alpha, \quad a,$$

so erhält man aus der Gleichung 6I nach einander: 6II, 6III, 6IV,

$$\begin{aligned}
2F(\beta') &= F(\alpha - \beta) + F(\alpha + \beta) \\
2F(\alpha') &= F(\beta - \alpha) + F(\beta + \alpha) \\
2F(\gamma) &= F(\beta - b') + F(\beta + b') \\
2F(\gamma) &= F(\alpha - a') + F(\alpha + a') \\
2F(\alpha') &= F(b' - c) + F(b' + c) \\
2F(\beta') &= F(a' - c) + F(a' + c)
\end{aligned}$$

und sodann wieder 6I. Ferner erhält man aus 7I der Reihe nach alle Gleichungen (7), (8) und überdies:

$$\begin{aligned}
2F(\alpha) &= F(\beta - b') - F(\beta + b') \\
2F(\beta) &= F(\alpha - a') - F(\alpha + a') \\
2F(\beta) &= F(b' - c) - F(b' + c) \\
2F(\alpha) &= F(a' - c) - F(a' + c),
\end{aligned}$$

worauf man wieder zu 7I zurückkommt: jedoch sind alle diese Gleichungen nur andre Schreibweisen der aus 6I folgenden. Endlich erhält man aus 9I die Gleichungen: 10I,

$$F(\alpha + \beta') + F(c - b) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

ferner 9II, 9III,

$$\begin{aligned}
F(b' - \alpha') + F(\alpha + \gamma) &= \tfrac{1}{2}\pi, \\
F(\alpha - \gamma) + F(b' + \alpha') &= \tfrac{1}{2}\pi
\end{aligned}$$

und endlich 10III und 10II.

In der letzten Gleichung (10) hat der K. B. $F(\alpha' + \beta')$ statt: $F(a' + \beta')$.

S. 18, Z. 15—2 v. u. (15, Z. 17—11 v. u.). Da die Ebenen $A'ABB'$ und $C'CBB'$ beide auf ABC senkrecht stehen, so ist der Winkel zwischen ihnen gleich $F(b')$; ferner ist AC senkrecht zu der Ebene $B'BCC'$, also diese senkrecht zu $C'CAA'$, demnach der Winkel zwischen den Ebenen ABC und $C'CAA'$ gleich $BCC' = F(a)$. Endlich ist $\angle BAC$ von vorn-

herein gleich $F(a')$, $\angle BAA'$ nach der Konstruktion gleich $F(c)$ und $\angle A'AC = F(b)$, weil CC' auf AC senkrecht steht.

S. 18, Z. 1 v. u. — 19, Z. 4 v. o. (15, Z. 11—7 v. u.). Dieses neue rechtwinklige Dreieck erhält man (s. Fig. 2′), wenn man von A aus auf AB oder dessen Verlängerung $AD = a'$ abträgt und von D aus auf AA' das Loth DE fällt. Dann ist $\angle DAE = F(c)$, und es werde wie vorhin (vgl. Fig. 1′) $EA = l$, $ED = m$, $\angle ADE = F(l')$ gesetzt. Zieht man jetzt in der Ebene DAC die Gerade DD' senkrecht zu DA, so ist DD' zu AC parallel, weil $\angle DAC = F(a')$ ist. Ferner steht DD' zugleich auf der Ebene DAE senkrecht; zieht man daher noch durch E die Gerade EE' zu DD' und also auch zu AC parallel, so erhält man drei Ebenen, die einander in den parallelen Geraden DD', EE' und AC schneiden und die an DD' und EE' die inneren Winkel $F(l')$ und $\frac{1}{2}\pi$ bilden, an AC nach § 8 den inneren Winkel $\frac{1}{2}\pi - F(l')$. Ferner bestimmen AA', AD und AC genau dasselbe sphärische Dreieck $A'BC$ (Fig. 8) wie früher und man findet für die Seiten dieses Dreiecks die Werthe:

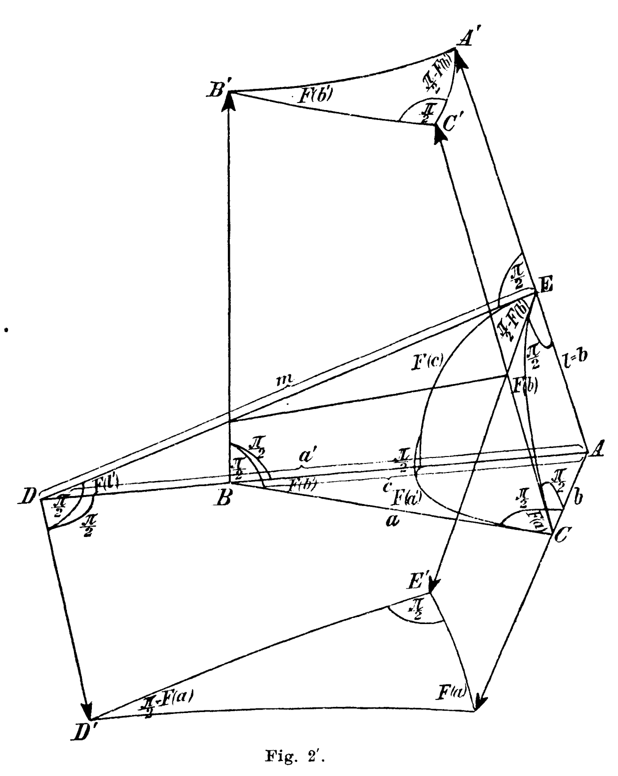


Fig. 2′.

$$A'C = \angle EAC = F(l), \quad A'B = \angle A'AB = F(c), \quad BC = \angle BAC = F(a')$$

und für die gegenüberliegenden Winkel diese:

$$A'BC = \tfrac{1}{2}\pi, \quad A'CB = \tfrac{1}{2}\pi - F(l'), \quad BA'C = \angle DEE' = F(m).$$

Vergleicht man diese Werthe mit den früher gefundenen (s. Fig. 8), so erhält man:

$$F(l) = F(b), \quad \tfrac{1}{2}\pi - F(l') = F(a), \quad F(m) = \tfrac{1}{2}\pi - F(b'),$$

woraus folgt: $l = b$, $l' = \alpha$, $m = \beta'$. Damit ist zugleich der vorhin (vgl. S. 239, Z. 3—1 v. u.) noch fehlende Nachweis, dass $l = b$ ist, erbracht.

Man kann übrigens auch rein formell zu Werke gehen. Jedem geradlinigen rechtwinkligen Dreiecke Δ mit den Seiten und Winkeln

$$\begin{matrix} l & m & n \\ F(l') & F(m') & \frac{1}{2}\pi \end{matrix}$$

entspricht nach S. 18, Z. 15—2 v. u. ein sphärisches rechtwinkliges Dreieck $\varDelta'$ mit den Seiten und Winkeln:

$$\begin{matrix} F(l') & F(n) & F(m) \\ \frac{1}{2}\pi - F(m') & F(l) & \frac{1}{2}\pi. \end{matrix}$$

Umgekehrt ist auch das geradlinige Dreieck $\varDelta$ durch das sphärische $\varDelta'$ bestimmt, denn aus den beiden Katheten $F(n)$ und $F(l')$ des sphärischen erhält man n und $F(l')$, also die Hypotenuse und den einen spitzen Winkel des geradlinigen, wodurch dieses vollständig bestimmt ist. Lässt man ferner jede der Linien n und l' alle Werthe von 0 bis ∞ durchlaufen, so durchläuft jede der Katheten $F(n)$ und $F(l')$ von $\varDelta'$ alle Werthe von $\frac{1}{2}\pi$ bis 0, folglich kann man das geradlinige Dreieck $\varDelta$ stets so wählen, dass $\varDelta'$ ein beliebig gewähltes sphärisches Dreieck wird, dessen Katheten beide kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ sind. Insbesondere kann man auf zwei verschiedene Weisen erreichen, dass $\varDelta'$ mit dem sphärischen Dreiecke Fig. 8:

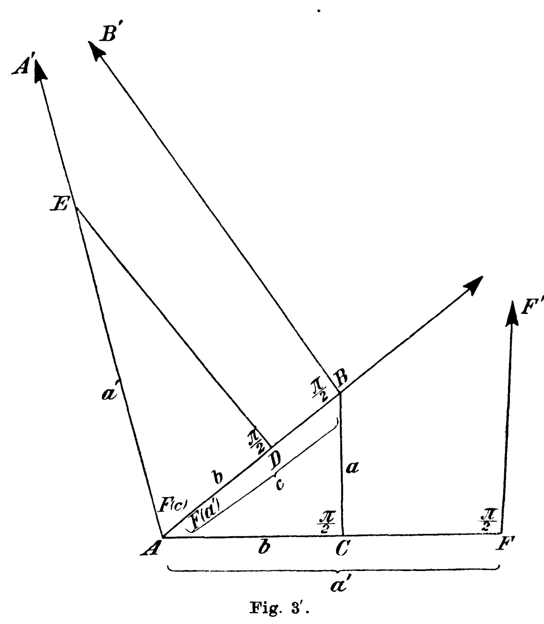


Fig. 3'.

$$\begin{matrix} F(a') & F(c) & F(b) \\ \frac{1}{2}\pi - F(b') & F(a) & \frac{1}{2}\pi \end{matrix}$$

zusammenfällt, indem man nämlich entweder:

$$l' = a', \quad n = c, \quad m = b,$$
$$m' = b', \quad l = a$$

setzt, oder:

$$l' = c, \quad n = a', \quad m = b,$$
$$l = \beta', \quad m' = \alpha.$$

Damit ist wieder gezeigt, dass zu jedem geradlinigen rechtwinkligen Dreiecke ABC, Fig. 1:

$$\begin{matrix} a & b & c \\ F(a') & F(b') & \frac{1}{2}\pi \end{matrix}$$

ein andres geradliniges rechtwinkliges, Fig. 6:

$$\begin{matrix} \beta' & b & a' \\ F(c) & F(\alpha) & \frac{1}{2}\pi \end{matrix}$$

gehört (vgl. P. G. R. und F. in den G. A. I, S. 494ff., II, S. 623f.).

Der Umstand, dass zu jedem rechtwinkligen Dreiecke ABC, Fig. 1 ein rechtwinkliges Dreieck von der Gestalt Fig. 6 gehört, giebt Gelegenheit zu einer ausserordentlich einfachen Konstruktion der Linie a', wenn der spitze Winkel $F(a')$ gegeben ist. Man zeichne nämlich (Fig. 3') irgend ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dem der spitze Winkel $F(a')$ angehört, errichte auf der Hypotenuse $AB = c$ in B die Senkrechte BB' und ziehe von A aus zu dieser die Parallele AA', so dass also $\angle BAA' = F(c)$ ist. Endlich mache man $AD = b$ und errichte in D auf der Hypotenuse die

Senkrechte DE, die AA' nothwendig in einem Punkte E schneiden muss. Dann ist: $AE = a'$, macht man also $AF = AE$ und errichtet man auf AF die Senkrechte FF', so ist FF' parallel zu AB.

Diese Konstruktion ist mit Zirkel und Lineal ausführbar, sobald man von einem gegebenen Punkte aus zu einer gegebenen Geraden die Parallele ziehen kann; wir werden später sehen (S. 256), dass auch diese Parallele mit Zirkel und Lineal gezeichnet werden kann.

S. 19, Z. 9, 12 (15, Z. 4, 2 v. u.). Im K. B. AC, BM statt: CA, DM.

S. 19, Z. 13—17 (16, Z. 1—3). Den Beweis hierfür findet man in § 137 der N. A., hier S. 214—217. Die Fig. 9 ist nur eine Vereinfachung der Fig. 133, S. 215.

Auf Z. 16 wäre es klarer zu sagen: „die Linie a' in der Gleichung $\angle BAC = F(a')$", denn man hat sich $AC = AB = AA' = a'$ zu denken und dann C festzuhalten, während A mit wachsendem a' ins Unendliche rückt. Fällt man in Fig. 9 von B aus das Loth BE auf AA', so sind die Dreiecke BEA und $A'DA$ kongruent. Denkt man sich ferner in der Ebene BAC von B aus die Gerade BB' zu AB senkrecht gezogen, so wird BB' zu AC parallel, wegen $AB = a'$, $\angle BAC = F(a')$. Demnach steht das Dreieck BEA zu dem sphärischen Dreiecke $A'BC$ genau in derselben Beziehung wie in Fig. 2' das Dreieck AED zu dem dortigen sphärischen Dreiecke, das ja dem Dreiecke $A'BC$, Fig. 8 kongruent ist. Das heisst, die Dreiecke BEA und $A'DA$, Fig. 9 sind nichts andres als das Dreieck Fig. 6, S. 17.

S. 20, Z. 4f. (16, Z. 16f.). Man beachte, dass $F(a) = \frac{1}{2}\pi - F(\alpha)$ ist, also $\cos F(a) = \sin F(\alpha)$, $\sin F(a) = \cos F(\alpha)$. Der K. B. hat fehlerhaft:

$$\text{Lim.}\,\frac{F(a'+\alpha)}{F(a')} = \cot\tfrac{1}{2}F(\alpha'), \quad \text{Lim.}\,\frac{F(\alpha'-\alpha')}{F(a')} = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}F(\alpha).$$

S. 20 (S. 16). Aus der Gleichung (12) ergeben sich unmittelbar die nachstehenden:

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} \sin F(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1}{\cosh x}, \\[2ex] \cos F(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \text{tgh}\, x, \\[2ex] \text{tg}\, F(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{1}{\sinh x}, \\[2ex] \cot F(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x, \end{cases}$$

wo $\sinh x$, $\cosh x$, ... die schon von Lambert mehrfach benutzten hyperbolischen Funktionen sind. Ferner erhält man zum Beispiel für $\sin F(x+y)$ den Ausdruck:

$$\frac{2}{e^{x+y} + e^{-x-y}} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})},$$

also wird:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \sin F(x+y) = \dfrac{\sin F(x) \, . \, \sin F(y)}{1 + \cos F(x) \, . \, \cos F(y)} \\ \cos F(x+y) = \dfrac{\cos F(x) + \cos F(y)}{1 + \cos F(x) \, . \, \cos F(y)} \\ \operatorname{tg} F(x+y) = \dfrac{\sin F(x) \, . \, \sin F(y)}{\cos F(x) + \cos F(y)} \, . \end{cases}$$

Da überdies nach § 8 $F(-y) = \pi - F(y)$ ist, so hat man noch:

$$\text{(III)} \qquad \sin F(-y) = \sin F(y), \quad \cos F(-y) = -\cos F(y),$$

mithin kann man auch $\sin F(x-y)$ und $\cos F(x-y)$ sofort hinschreiben.

Die Formeln (II) sind zuerst in der russischen Abhandlung A. J. G. aufgestellt, s. K. G. S. 1836, I, 6 und G. A. I, 122f., jedoch wird dort für $F(a)$ das Zeichen a' und für $F(a+b)$ das Zeichen $(a+b)'$ benutzt. Lobatschefskij bemerkt bei dieser Gelegenheit: „Es ist leicht zu sehen, dass hier, allerdings in andrer Gestalt, genau dieselben Funktionen auftreten, die Herr Gudermann als cyklisch-hyperbolische bezeichnet (Potential- oder cyklisch-hyperbolische Functionen, von Gudermann, Crelles Journal Bd. VI, [S. 1 ff.], 1830), die ich aber durch Einführung einer einzigen neuen Funktion unter dem Namen des Parallelwinkels ersetzt habe, indem ich mich dazu der in der Trigonometrie längst angenommenen Zeichen bediente. Auf diese Weise wird ein doppelter Zweck erreicht: ausser der Abkürzung der Bezeichnung ist mit einer analytischen Funktion eine geometrische Vorstellung verbunden.“

Dass diese Einführung des Parallelwinkels grosse Vorzüge hat, ist unbestreitbar, denn ausser der geometrischen Anschaulichkeit hat man noch den Vortheil, dass man Längen und Winkel durch Grössen derselben Art ausdrücken kann, indem man nämlich entweder in allen Gleichungen statt jeder Länge a den zugehörigen Parallelwinkel $a' = F(a)$ einführt oder statt jedes Winkels A das Loth α, das der Gleichung $F(\alpha) = A$ genügt, also das Loth, dessen Parallelwinkel A ist. Namentlich im ersten Falle werden alle Gleichungen von besonderer Einfachheit, da sie dann, wie die Gleichungen der sphärischen Trigonometrie, nur die gewöhnlichen trigonometrischen Funktionen von Winkeln enthalten. Lobatschefskij hat sich jedoch diesen Vortheil nur in der I. G. F. und R. und in der A. I. G. zu Nutze gemacht, während er in seinen übrigen Abhandlungen fast immer Längen und Winkel unvermittelt neben einander in den Gleichungen schreibt. Die Gleichungen bekommen dadurch ein etwas ungeschicktes Aussehen, und überdies wird die Gleichberechtigung der Längen und Winkel verhüllt.

Den Vorzügen, die die Einführung des Parallelwinkels hat, stehen aber auch gewisse Nachtheile gegenüber. Vor allen Dingen kann nämlich die Funktion $F(x)$ nur für reelle Werthe von x als eindeutige Funktion von x definirt werden und wird für komplexe Werthe von x unendlich vieldeutig, während die hyperbolischen Funktionen $\sin F(x)$, $\cos F(x)$, $\operatorname{tg} F(x)$ stets eindeutig bleiben. Dazu kommt noch, dass bei Anwendung der Funktionszeichen $\sinh x$, $\cosh x$, $\operatorname{tgh} x$ die Analogie zwischen den Formeln der sphärischen Geometrie und denen der Lobatschefskijschen Geometrie unmittelbar zu Tage liegt, während sie bei der Anwendung des Parallelwinkels verborgen bleibt.

Sehr merkwürdig ist es, dass Lobatschefskij nirgends ausdrücklich von der zu $F(x)$ oder $\Pi(x)$ inversen Funktion spricht, obwohl es doch offenbar wünschenswerth ist, auch für diese Funktion eine Benennung und ein Zeichen zu haben. Ohne einen Vorschlag in dieser Richtung zu machen, wollen wir nur erwähnen, dass Max Simon für die Auflösung der Gleichung: $\varphi = \Pi(x)$ nach x die Bezeichnung $x = D(\varphi)$ eingeführt hat und dass er x die zu dem Winkel φ gehörige „Paralleldistanz" nennt. Es versteht sich von selbst, dass diese Funktion $D(\varphi)$ nur für solche reelle Werthe von φ eindeutig definirt ist, die der Bedingung $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ genügen.

Von grossem Interesse ist die von Stäckel bemerkte Thatsache, dass schon Lambert bei der Betrachtung der hyperbolischen Funktionen von x einen Hülfswinkel eingeführt hat, der in der Lobatschefskij schen Bezeichnung nichts andres ist als der Winkel $\frac{1}{2}\pi - F(x)$. Man findet die betreffenden Entwickelungen in den „Observations trigonométriques", Mémoires de Berlin, Année 1768, Berlin 1770, S. 327—354, vgl. auch Lamberts „Zusätze zu den Logarithmischen und Trigonometrischen Tafeln", Berlin 1770, S. 182. In der von Lambert herrührenden Figur 4′ ist QqE eine gleichseitige Hyperbel mit der Asymptote CA und der Scheiteltangente QA, QSD ist ein Kreisbogen mit dem Halbmesser $CQ = 1$. Ferner sind $Cp = x$ und $pq = y$ die rechtwinkligen Koordinaten von q, also: $x^2 - y^2 = 1$. Endlich ist $QP = pq = y$, also: $CP = Cp = x$, und wenn man $\angle QCq = \varphi$, $\angle QCP = \omega$ setzt, so wird:

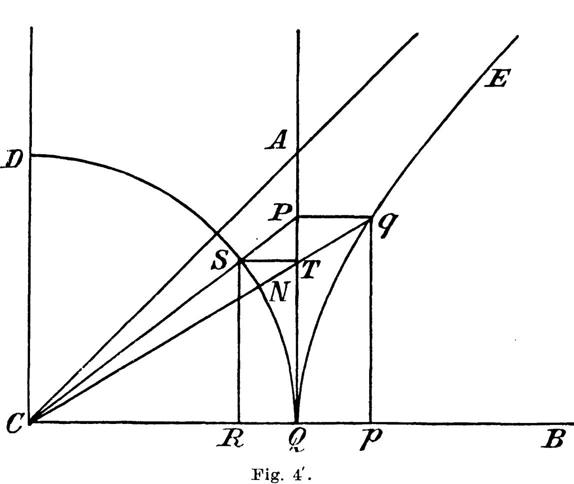


Fig. 4′.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \sin \omega .$$

Wie nun $\frac{1}{2}\varphi$ der Inhalt der Kreissektors $QNCQ$ ist, so bezeichnet Lambert den Inhalt des Hyperbelsektors $QqCQ$ mit $\frac{1}{2}u$. Setzt man dann $Cq = r$, so wird: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ und mithin:

$$r^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi},$$

$$\frac{1}{2} du = \frac{1}{2} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \frac{d \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi},$$

das heisst:

$$u = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi} \right)$$

oder:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \operatorname{tgh} u.$$

Nach Lobatschefskij ist aber: $\operatorname{tgh} u = \cos F(u)$, also ist der Lambertsche Hülfswinkel: $\omega = \frac{1}{2}\pi - F(x)$.

S. 20, Z. 18 v. u. (17, Z. 4). Für „Gleichung (11)" hätte gesetzt werden sollen: „Gleichung (12)".

S. 20, Z. 13, 11 v. u. (17, Z. 8, 10). Der K. B. hat: $\operatorname{tang} F(a)$ statt: $\operatorname{tang} F(a')$ und $\sin F(a')$ statt: $\cos F(a')$.

S. 20, Z. 18—10 v. u. (17, Z. 4—11). Aus der ersten der Gleichungen (7) folgt:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} F(b') &= \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}F(c-a') - \operatorname{tg}\frac{1}{2}F(c+a')}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}F(c-a')\,.\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}F(c+a')}\\ &= \frac{e^{a'-c} - e^{-a'-c}}{1+e^{-2c}}\\ &= \frac{\sin F(c)}{\operatorname{tg} F(a')},\end{aligned}$$

also die Gleichung 13 IV. Behandelt man die übrigen Gleichungen (6), (7) und (8) ebenso, so erhält man ähnliche Gleichungen, jedoch erhält man aus (6) keine Gleichung, die nicht auch aus (7) und (8) folgt.

Statt übrigens jede einzelne der Gleichungen (6), (7), (8) auf die angegebene Weise zu behandeln, kann man auch auf 13 IV die beiden Operationen ausführen, durch die aus den ersten der Gleichungen (6) und (7) alle übrigen (6), (7), (8) entstanden sind (vgl. S. 240, Z. 10 ff.). Man findet auf diese Weise den folgenden, in sich abgeschlossenen Kreis von Gleichungen:

$$\text{(IV)}\qquad \begin{cases} \sin F(c) = \operatorname{tg} F(a')\,.\,\operatorname{tg} F(b')\\ \operatorname{tg} F(c) = \operatorname{tg} F(a)\,.\,\sin F(a')\\ \operatorname{tg} F(c) = \operatorname{tg} F(b)\,.\,\sin F(b')\\ \operatorname{tg} F(a') = \cos F(a)\,.\,\operatorname{tg} F(b)\\ \operatorname{tg} F(b') = \cos F(b)\,.\,\operatorname{tg} F(a), \end{cases}$$

aus dem man durch die beiden genannten Operationen nicht herauskommt. In diesem Kreise sind die Gleichungen 13 II, IV, V enthalten und die daraus durch Vertauschung der Katheten entstehenden. Die übrigen drei der Gleichungen (13) findet man aus (IV) folgendermassen:

Aus IV 1, 2 und 5 ergiebt sich:

$$\cos F(c) = \frac{\operatorname{tg} F(b')}{\operatorname{tg} F(a)\cos F(a')} = \frac{\cos F(b)}{\cos F(a')},$$

also 13 III. Nunmehr wird vermöge IV 2 und 4:

$$\sin F(c) = \operatorname{tg} F(a)\operatorname{tg} F(a')\cos F(b) = \sin F(a)\sin F(b),$$

was mit 13 I übereinstimmt, endlich bekommt man aus IV 2, 3 und 4:

$$\sin F(b') = \operatorname{tg} F(a)\,.\,\sin F(a')\,.\,\cot F(b) = \sin F(a)\,.\,\cos F(a'),$$

also 13 VI.

Aus den zwei leicht zu merkenden Gleichungen:

$$\sin F(c) = \operatorname{tg} F(a') \,.\, \operatorname{tg} F(b')$$
$$\sin F(c) = \sin F(a) \,.\, \sin F(b)$$

kann man übrigens durch die vorhin erwähnten beiden Operationen alle zehn Gleichungen für das rechtwinklige geradlinige Dreieck erhalten (vgl. S. 223). Von diesen beiden Operationen ist die eine ganz leicht zu behalten, da sie auf die gleichzeitige Vertauschung der Katheten und der spitzen Winkel des Dreiecks hinauskommt. Bei der andern gehen:

$$F(b) \quad F(a') \quad F(c) \qquad F(b') \qquad F(a)$$

über in:

$$F(b) \quad F(c) \quad F(a') \quad \tfrac{1}{2}\pi - F(a) \quad \tfrac{1}{2}\pi - F(b'),$$

und auch das kann man sich leicht merken, wenn man beachtet, dass die der festen Kathete b anliegenden Stücke $F(a')$ und $F(c)$ einfach vertauscht werden, während jedes der beiden von b durch den rechten Winkel getrennten Stücke $F(b')$ und $F(a)$ in das Komplement $\frac{1}{2}\pi - F(a)$ und $\frac{1}{2}\pi - F(b')$ des andern übergeht.

Viel weniger übersichtlich wird die Sache, wenn man für die Winkel $F(a')$ und $F(b')$ schreibt: A und B und wenn man statt der Winkel $F(a)$, $F(b)$, $F(c)$ die Seiten a, b, c selbst benutzt. Dabei geht eben der schon auf S. 244 erwähnte Vorzug verloren, den die Einführung des Parallelwinkels mit sich bringt, der Vorzug nämlich, dass alle Stücke des rechtwinkligen Dreiecks durch Grössen derselben Art, also entweder durch lauter Längen oder durch lauter Winkel ausdrückbar sind.

S. 21, Z. 1—7 (17, Z. 17—11 v. u.). Da nach § 12 zu dem geradlinigen rechtwinkligen Dreiecke mit den Seiten a, b, c und den Winkeln: $F(a')$, $F(b')$, $\frac{1}{2}\pi$ ein sphärisches mit den Seiten: $F(c)$, $F(a')$, $F(b)$ und den gegenüberliegenden Winkeln: $F(a)$, $\frac{1}{2}\pi - F(b')$, $\frac{1}{2}\pi$ gehört, so braucht man nur in den Gleichungen (13) der Reihe nach:

$$F(c) \quad F(a') \quad F(b) \quad F(a) \quad \tfrac{1}{2}\pi - F(b')$$

durch:

$$a \qquad b \qquad c \qquad A \qquad B$$

zu ersetzen, um die Gleichungen (15) für das rechtwinklige sphärische Dreieck zu erhalten. Allerdings ist dabei zunächst vorausgesetzt, dass a, b, c, A, B sämtlich $< \frac{1}{2}\pi$ sind. Den Beweis für die Allgemeingültigkeit der Gleichungen (15) und die Ableitung der Gleichungen (16) findet man in § 144 und 145 der N. A., hier S. 227—231.

In der vorletzten der Gleichungen (15) hat der K. B. tang b statt: sin b.

S. 21, Z. 16—24 (17, Z. 2 v. u.—18, Z. 6). Die Ableitung der Gleichungen (17) findet man in § 142 der N. A., hier S. 223—226.

S. 21, Z. 8—5 v. u. (18, Z. 7—9). Man denke sich nur die Ausdrücke (I), S. 243 in Potenzreihen entwickelt. Der K. B. hat unrichtig:

$$\cos F(a) = a(1 - a^2).$$

S. 21, Z. 3—1 v. u. (18, Z. 2, 1 v. u.). Es ist kaum anzunehmen, dass sich die Worte: „Alles, was nach diesen folgt“ blos auf das im K. B. vom November-December 1829 noch Folgende beziehen, denn das wäre nur der § 14; sie werden sich vielmehr auf den ganzen Rest der Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe der Geometrie“ beziehen.

S. 22, Z. 17—21 (18, Z. 7—4 v. u.). Man beachte, dass nur der Winkel $\frac{1}{2}\pi - 2p$ unmittelbar gemessen werden kann und dass sich also der Winkel $2p$, sobald die Euklidische Geometrie nicht gilt, nur auf die im Texte angegebene Weise definiren lässt.

S. 22, Z. 12—10 v. u. (19, Z. 1—3). Es ist ja nach (12):

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} F(a) = e^{-a} > \operatorname{tg} (\tfrac{1}{4}\pi - p),$$

also:

$$e^{-a} > \frac{1 - \operatorname{tg} p}{1 + \operatorname{tg} p},$$

woraus die Ungleichheit für a selbst sofort folgt. Ferner ist:

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{tg} 2p = \frac{\operatorname{tg} p}{1 - \operatorname{tg}^2 p} = \operatorname{tg} p + \operatorname{tg}^3 p + \cdots.$$

S. 22, Z. 3—1 v. u. ff. (19, Z. 10ff.). Die betreffende Abhandlung steht in der Connaissance des tems pour l'an 1831, Paris 1828, S. 120—148 und hat den Titel: „Mémoire sur la détermination de la parallaxe et du mouvement propre en déclinaison des étoiles au moyen d'une nouvelle méthode d'occultations artificielles, par M. le comte d'Assas-Montdardier ancien capitaine de vaisseau, chevalier de Saint Louis." Auf S. 149—151 folgt ein ganz kurzer Rapport par Delambre. Nach dem Urteile Harzers in Kiel ist das darin beschriebene Verfahren durchaus unbrauchbar. Das zeigen übrigens schon die im Texte angegebenen Parallaxen, die alle viel zu gross sind, während die wirklichen Parallaxen der betreffenden Sterne kaum messbar sind. Die Bezeichnung „29 Eridani" bezieht sich auf Flamsteeds berühmtes Verzeichniss der Fixsterne, Historia coelestis, pars I, London 1712. Der Name „Keid" findet sich aber dort nicht und ist überhaupt ganz ungebräuchlich.

S. 23, Z. 2—5 (19, Z. 12—16). Zur Bequemlichkeit des Lesers geben wir hier ein Täfelchen für die Grösse der Bogensekunden ausgedrückt in Theilen des Halbmessers:

1″	0,00000 48481 36811 09536
2″	0,00000 96962 73622 19072
3″	0,00001 45444 10433 28608
4″	0,00001 93925 47244 38144
5″	0,00002 42406 84055 47680
6″	0,00002 90888 20866 57216
7″	0,00003 39369 57677 66752
8″	0,00003 87850 94488 76288
9″	0,00004 36332 31299 85824
10″	0,00004 84813 68110 95360

Im K. B. steht für den Sirius:

$$a < 0{,}00000\,602,$$

während die Rechnung ergiebt: 60117.

S. 23, Z. 13—26 (19, Z. 14—4 v. u.). Vertauscht man in 17IV A mit C, a mit c und setzt man dann die Werthe des Textes ein, so kommt:

$$\cos(2p - 2\omega) = \frac{\cos 2p}{\sin F(a)},$$

andrerseits ist nach S. 244 (II):

$$\sin F(a) = \frac{1 - \cos^2 F(\frac{1}{2} a)}{1 + \cos^2 F(\frac{1}{2} a)},$$

also wird:

$$\cos F(\tfrac{1}{2} a) = \sqrt{\frac{\cos(2p - 2\omega) - \cos 2p}{\cos(2p - 2\omega) + \cos 2p}} = \sqrt{\operatorname{tg} \omega \,.\, \operatorname{tg}(2p - \omega)}\,.$$

Ferner ergiebt sich:

$$\cos(2p - 2\omega) = \cos 2p\,(1 + 2 \cot^2 F(\tfrac{1}{2} a)),$$

also:

$$\sin^2(p - \omega) = \sin^2 p - \cos 2p \,.\, \cot^2 F(\tfrac{1}{2} a)\,.$$

Diese Gleichung gilt für je zwei zusammengehörige Werthe von p und ω, also auch wenn man p durch die kleinere Parallaxe p' und ω durch das zu p' gehörige ω' ersetzt. Da nun die rechte Seite der Gleichung stets > 0 ist, so ergiebt sich sofort die Ungleichheit des Textes

$$\cot^2 F(\tfrac{1}{2} a) < \frac{\sin^2 p'}{\cos 2p'}$$

und nunmehr wird:

$$\sin^2(p - \omega) > \sin^2 p - \sin^2 p' \frac{\cos 2p}{\cos 2p'},$$

wenn man also:

$$\sin x = \frac{\sin p'}{\sin p} \sqrt{\frac{\cos 2p}{\cos 2p'}}$$

setzt:

$$\sin(p - \omega) > \sin p \,.\, \cos x,$$

oder wegen der Kleinheit von p und ω

$$p - \omega > p \cos x, \quad \omega < 2p \sin^2 \tfrac{1}{2} x\,.$$

Für $p = 1''$, $p' = 0'',62$ findet man mit völlig genügender Genauigkeit: $\sin x = p' : p = 0{,}62$, also:

$$\log \sin x = 9{,}79239 - 10$$

$$x = 38^0\, 19', \quad \tfrac{1}{2} x = 19^0\, 9',5$$

$$\log \sin \tfrac{1}{2} x = 9{,}51611 - 10$$

$$\log(2p \sin^2 \tfrac{1}{2} x) = 9{,}33325 - 10$$

$$\omega < 0'',2154.$$

S. 23, Z. 8 v. u. (19, Z. 2 v. u.) steht im K. B. irrthümlich „bis zum ersten dieser Sterne", während doch ω zu p, also zu dem zweiten der Sterne gehört.

S. 23, Z. 5 v. u.—24, Z. 6 (20, Z. 1—8). Für die spitzen Winkel $F(a')$, $F(b')$ eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a, b gelten die Gleichungen (8) auf S. 18; da nun $F(\alpha - \beta) + F(\beta - \alpha) = \pi$ ist, so ergiebt sich:

$$F(a') + F(b') = \tfrac{1}{2}\pi - F(\alpha + \beta),$$

wenn also $\pi - 2\omega$ die Winkelsumme des Dreiecks ist, so hat man: $2\omega = F(\alpha + \beta)$, also nach (12):

$$\operatorname{tg} \omega = e^{-\alpha-\beta} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} F(\alpha) \,.\, \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} F(\beta)$$

oder wegen: $F(\alpha) = \frac{1}{2}\pi - F(a)$, $F(\beta) = \frac{1}{2}\pi - F(b)$:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1 - e^{-a}}{1 + e^{-a}} \cdot \frac{1 - e^{-b}}{1 + e^{-b}} = \cos F(\tfrac{1}{2} a) \,.\, \cos F(\tfrac{1}{2} b)\,.$$

Für $b = a$ insbesondere ergiebt sich:

$$\operatorname{tg} \omega = \cos^2 F(\tfrac{1}{2} a) = \left(\frac{e^a - 1}{e^a + 1}\right)^2,$$

nun aber ist nach S. 22, Z. 11 v. u. (19, Z. 2):

$$e^a < \frac{1 + \operatorname{tg} p}{1 - \operatorname{tg} p},$$

folglich:

$$\frac{e^a - 1}{e^a + 1} < \operatorname{tg} p$$

und somit:

$$\operatorname{tg} \omega < \operatorname{tg}^2 p\,.$$

Setzt man $p = 0'',62$ und bezeichnet man diesen Winkel, ausgedrückt in Theilen des Halbmessers mit $\bar{p}$, so wird

$$\bar{p} = 0{,}00000\,30058\,,$$

und für den Winkel 2ω, ausgedrückt in Bogensekunden, erhält man mit vollkommen genügender Genauigkeit

$$2\omega < 2p \,.\, \bar{p} = 0'',00000\,3727.$$

Im K. B. steht hier merkwürdiger Weise:

$$2\omega < 0'',000372,$$

also ein Werth, der hundertmal zu gross ist, und auch in seinen spätern Schriften wiederholt Lobatschefskij diese unrichtige Angabe. Vgl. I. G. R., K. G. S. 1835, I, S. 19 (G. A. I, S. 79), I. G. F., Crelle, XVII, S. 303 (G. A. II, S. 590), G. U. S. 60 (G. A. II, S. 578).

In seinen nach 1830 veröffentlichten Arbeiten kommt Lobatschefskij nur noch ein einziges Mal etwas eingehender auf die experimentelle Seite der Frage nach den Grundlagen der Geometrie zurück, nämlich am Schlusse der P. G. R. und F., in den G. A. I, S. 548—550, II, S. 678—680. Die betreffende Stelle lautet in deutscher Uebersetzung:

„Die Pangeometrie, die auf sichere Principien gegründet und die im Vorhergehenden entwickelt worden ist, giebt, wie man gesehen hat, Methoden an, um die Werthe der verschiedenen geometrischen Grössen zu berechnen, und sie beweist gleichzeitig, dass die Annahme, die Summe der drei Winkel jedes geradlinigen Dreiecks sei konstant, eine Annahme, die in der gewöhnlichen Geometrie explicite oder implicite gebräuchlich ist, keine nothwendige Folge unsrer Begriffe vom Raume ist. Nur die Erfahrung kann die Richtigkeit dieser Annahme bestätigen, zum Beispiele durch die

wirkliche Messung der drei Winkel eines geradlinigen Dreiecks, eine Messung, die auf verschiedene Arten ausgeführt werden kann. Man kann entweder die drei Winkel eines geradlinigen Dreiecks messen, das man auf einer künstlichen Ebene konstruirt hat, oder die drei Winkel eines geradlinigen Dreiecks im Raume. Im zweiten Falle wird man solche Dreiecke vorziehen müssen, deren Seiten sehr gross sind, da nach der Pangeometrie der Unterschied zwischen zwei rechten Winkeln und der Summe der drei Winkel eines geradlinigen Dreiecks um so grösser ist, je grösser die Seiten sind.

„Es sei r der Halbmesser eines Kreises und A ein Centriwinkel, dessen Schenkel einen Bogen einschliessen, zu dem eine Sehne von der Länge r gehört. Das vom Kreismittelpunkte auf diese Sehne gefällte Loth, dessen Fusspunkt die Sehne in zwei gleiche Theile zerlegt, nennen wir p. Betrachten wir eines der rechtwinkligen Dreiecke, die von diesem Lothe, von den Halbmessern auf den Schenkeln des Winkels A und von der Sehne gebildet werden, also ein Dreieck, dessen Hypotenuse r ist und dessen zu einander senkrechte Seiten $\frac{1}{2}r$ und p sind.

„Nach der allgemeinen Gleichung (13) [hier S. 21, Gl. 17 I] wird man in diesem Dreiecke haben:

$$\sin \tfrac{1}{2}A \,.\, \operatorname{tang} \Pi(\tfrac{1}{2}r) = \operatorname{tang} \Pi(r),$$

eine Gleichung, die in Verbindung mit der Identität:

$$\operatorname{tang} \Pi(r) = \frac{\sin^2 \Pi(\frac{1}{2}r)}{2 \cos \Pi(\frac{1}{2}r)}$$

ergiebt:

$$\sin \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2} \sin \Pi(\tfrac{1}{2}r).$$

In der gewöhnlichen Geometrie hat man:

$$A = \tfrac{1}{3}\pi.$$

Nehmen wir an, dass die wirkliche Messung ergiebt:

$$A = \frac{2\pi}{6+K},$$

wo K eine positive Zahl ist.

„Man wird also haben müssen:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6+K}\right) = \tfrac{1}{2} \sin \Pi(\tfrac{1}{2}r).$$

„Sind r und K gegeben, so kann man aus dieser Gleichung den Werth von $\Pi(\frac{1}{2}r)$ entnehmen und mit dessen Hülfe den Parallelwinkel $\Pi(x)$ für jede Linie x finden.

„Die Abstände zwischen den Himmelskörpern liefern uns ein Mittel, die Winkel von Dreiecken zu beobachten, deren Seiten sehr gross sind. Es sei α die geocentrische Breite eines Fixsterns zu einer bestimmten Zeit und β eine andre geocentrische Breite desselben Sterns, eine Breite, die der Zeit entspricht, wo sich die Erde wieder in der zur Ekliptik senkrechten Ebene befindet, die durch ihren ersten Ort gelegt ist, nämlich durch den Ort, wo die Breite des Sternes α war; $2a$ sei der Abstand dieser beiden Erdörter und δ der Winkel, unter dem der Abstand $2a$ von dem Sterne aus erscheint.

„Wenn die Winkel α, β, δ der Bedingung:

$$\alpha = \beta + \delta$$

nicht genügen, so wird das ein Zeichen dafür sein, dass die Summe der drei Winkel dieses Dreiecks von zwei Rechten abweicht.

„Man kann den Stern so wählen, dass $\delta = 0$ ist, und kann immer annehmen, dass es eine solche Linie x giebt, dass

$$\Pi(x) = \alpha.$$

„Ist $\delta = 0$, so kann man die Geraden, die von den beiden Erdörtern nach dem Sterne gezogen sind, als parallel betrachten, und wird folglich haben müssen:

$$\beta = \Pi(x + 2a),$$

woraus nach dem früher Bewiesenen folgt:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = e^{-x}, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta = e^{-x-2a}.$$

Jedes Mal, wenn die Beobachtungen bei einem Sterne, für den der mit δ bezeichnete Winkel null ist, zwei verschiedene Winkel α und β ergeben, werden die beiden letzten Gleichungen x und a bestimmen, ausgedrückt durch die Linie, die in der Pangeometrie zur Längeneinheit genommen ist. Hat man auf diese Weise die Linie x gefunden, die einem Parallelwinkel $\Pi(x)$ entspricht, so wird man den Parallelwinkel $\Pi(y)$ für jede gegebene Linie y berechnen können."

Im Grossen und Ganzen sind diese Betrachtungen nicht so befriedigend, wie die im K. B. Die Worte: „Man kann den Stern so wählen, dass $\delta = 0$ ist", geben sogar zu Bedenken Anlass.

S. 24, Z. 13—18 (20, Z. 14—17). Offenbar ist eine Stelle in der Laplaceschen Exposition du système du monde gemeint (Oeuvres de Laplace, tome VI). Dort heisst es im 6. Kapitel des 5. Buches: „Il paraît que, loin d'être disséminées à des distances à peu près égales, les étoiles sont rassemblées en divers groupes, dont quelques-uns renferment des milliards de ces astres. Notre soleil et les plus brillantes étoiles font probablement partie d'un de ces groupes qui, vu du point où nous sommes, semble entourer le ciel et forme la voie lactée. . . . Il est donc probable que parmi les nébouleuses, plusieurs sont des groupes d'un très-grand nombre d'étoiles qui, vu de leur intérieur, paraîtraient semblables à la voie lactée."

S. 24, Z. 17—12 v. u. (20, Z. 14—10 v. u.). Im K. B. ist das Wort Wahrheit gesperrt. Das Wörtchen „nicht" auf Z. 13 v. u. fehlt im K. B. und im A. P., es wird aber durch den Sinn unbedingt erfordert. Vorher hat ja Lobatschefskij gesagt, dass die Natur selbst innerhalb der uns sichtbaren Welt Abstände zeigt, gegen die sogar die Abstände der Erde von Fixsternen verschwinden, und es ist undenkbar, dass er daran die Bemerkung geknüpft haben sollte, man könne ferner unmöglich behaupten, dass sich die Euklidische Geometrie noch innerhalb der Gränzen der uns sichtbaren Welt als unrichtig herausstellen könne. Gerade diese Behauptung hatte ja vor Lobatschefskij überhaupt noch niemand öffentlich aufgestellt. Dazu kommt, dass Lobatschefskij nachher fortfährt: „Andrerseits sind wir ausser Stande zu begreifen, . . .;" das ist nur ver-

ständlich, wenn er es im Vorhergehenden als möglich hingestellt hat, dass seine nichteuklidische Geometrie in der Natur verwirklicht sein könne.

S. 25, Z. 8 (21, Z. 6). Der K. B. hat x statt y.

S. 25, Z. 12—17 (21, Z. 9—13). Zur Erläuterung werden die beiden hier stehenden Figuren:

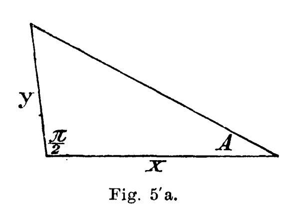


Fig. 5′a.

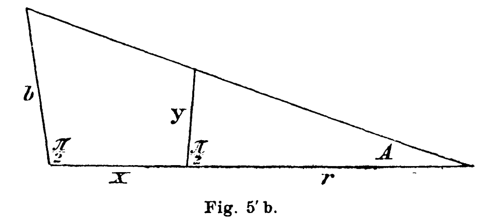


Fig. 5′b.

nützlich sein. Für tg $F(r+x)$ denke man sich den Werth S. 244, (II) eingesetzt. Die Seitenzahl [*257* gehört übrigens an die Zeile 12 v. o., nicht an die Zeile 10.

S. 25, Z. 7—4 v. u. (21, Z. 13—10 v. u.). Die Linie a kann man geometrisch konstruiren. Man konstruire nämlich nach Anleitung von S. 242f. eine Linie λ derart, dass: $F(\lambda)=\frac{1}{2}\pi-F(l)$ wird. Da sich nun die Gleichung (20) in der Form:

$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\pi-A\right)=\cos F(a)\,.\,\operatorname{tg} F(\lambda)$$

schreiben lässt, so erkennt man aus 14 V leicht, dass in dem rechtwinkligen Dreiecke, das a und λ zu Katheten hat, der Kathete a der Winkel $\frac{1}{2}\pi-A$ gegenüberliegt, und da

$$F(l)<A<\tfrac{1}{2}\pi$$

ist und also:

$$\tfrac{1}{2}\pi-A<F(\lambda)<\tfrac{1}{2}\pi,$$

so giebt es stets ein rechtwinkliges Dreieck, in dem λ die eine Kathete und $\frac{1}{2}\pi-A$ der anliegende Winkel ist und also a die andre Kathete. Damit ist die Möglichkeit der Konstruktion von a bewiesen. In der Fig. 6′ ist $F(l)>\frac{1}{4}\pi$ angenommen, so dass $F(\lambda)<F(l)$ und also $\lambda>l$ wird; es ist zugleich das gemeinsame Loth b mit eingezeichnet, das die beiden von den Endpunkten von l ausgehenden Geraden in der Entfernung a besitzen; vgl. S. 26, Z. 4—19.

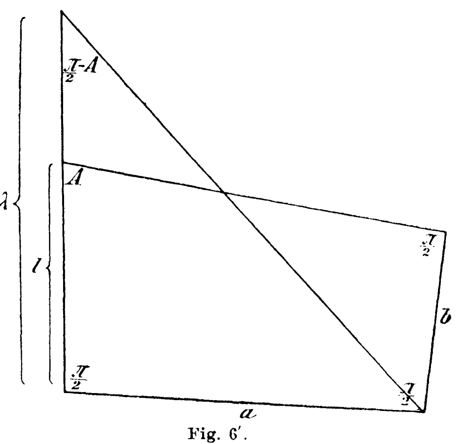


Fig. 6′.

S. 25, Z. 3 v. u.—26, Z. 24 (21, Z. 9 v. u.—22, Z. 13). Zur Bequemlichkeit des Lesers geben wir hier noch eine Figur bei (Fig. 7′). Dass $L'=\frac{1}{2}\pi-L$ wird, beruht darauf, dass sich ergiebt:

$$\operatorname{tg} L'=\frac{\sin F(c)\,.\,\cos F(a)}{\sin^2 F(a)\,.\,\sin F(l)\,.\,\cos F(l)}=\frac{\cot F(a)}{\cos F(l)}=\cot L.$$

Da übrigens das von l, a, b, t gebildete Viereck (Fig. 10) drei rechte Winkel enthält, so müssen die zwischen l, a, b, t gefundenen Gleichungen (20), (21), (22) richtig bleiben, wenn man l mit t und gleichzeitig a mit b vertauscht. Es bestehen also noch die drei Gleichungen:

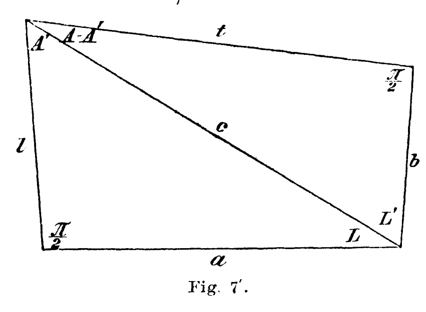


Fig. 7'.

$$(20') \quad \operatorname{tg} F(t) = \operatorname{tg} A \,.\, \cos F(b),$$

$$(21') \quad \cos F(a) = \sin F(b) \,.\, \cos F(t),$$

$$(22') \quad \operatorname{tg} F(l) = \sin F(t) \,.\, \operatorname{tg} F(b) \,.$$

S. 25, Z. 7 v. u. — 26, Z. 24 (21, Z. 13 v. u. — 22, Z. 13). Die ganze Entwickelung hat etwas künstliches, da die Linie a so unvorbereitet eingeführt wird; es ist daher erwünscht, eine Ableitung der Gleichungen (20), (21), (22) zu kennen, die unmittelbar von dem Umstande ausgeht, dass l, a, b, t ein Viereck bilden, in dem der Winkel zwischen l und t gleich A ist, während die drei übrigen Winkel Rechte sind. Eine solche Ableitung hat Lobatschefskij selbst in der Pangeometrie gegeben (P. G. R., K. G. S. 1855, I, S. 25ff., G. A. I, S. 517f. und P. G. F., Sbornik 1856, S. 306f., G. A. II, S. 645f.). Wir theilen hier diese Ableitung etwas abgekürzt mit, schreiben aber dabei $F(x)$ für $\Pi(x)$.

In dem Vierecke Fig. 8', das drei rechte Winkel hat, ist nach (14):

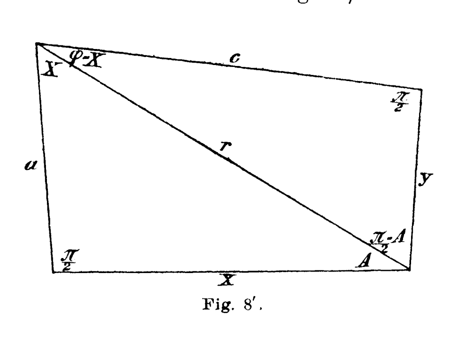


Fig. 8'.

$$(G) \quad \begin{cases} \sin F(r) = \sin F(a) . \sin F(x) \\ \sin A \,.\, \operatorname{tg} F(a) = \sin X \,.\, \operatorname{tg} F(x) \\ \cos F(r) . \cos A = \cos F(x) \\ \cos F(r) . \cos X = \cos F(a) \end{cases}$$

und

$$(H) \quad \begin{cases} \sin F(y) \,.\, \sin F(c) = \sin F(r) \\ \sin F(y) . \cos(\varphi - X) = \cos A \\ \cos F(r) . \cos(\varphi - X) = \cos F(c) \\ \cos F(r) \,.\, \sin A = \cos F(y) \end{cases}$$

$$(K) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} F(r) = \sin X \,.\, \operatorname{tg} F(x) \\ \operatorname{tg} F(r) = \sin A \,.\, \operatorname{tg} F(a) \end{cases}$$

$$(L) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} F(r) = \sin (\varphi - X) \,.\, \operatorname{tg} F(y) \\ \operatorname{tg} F(r) = \cos A \,.\, \operatorname{tg} F(c) \,. \end{cases}$$

In KII wird $\sin F(r)$ aus (G) eingesetzt:

$$\cos F(r) = \frac{\sin F(x) \,.\, \cos F(a)}{\sin A},$$

vermöge HIV ergiebt sich dann:

$$[1] \quad \cos F(y) = \sin F(x) \,.\, \cos F(a),$$

also, von der Bezeichnung abgesehen, die Gleichung (21).

Wird HIV durch GIII dividirt, so kommt:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\cos F(y)}{\cos F(x)}$$

und nach [1]:

[2] $$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} F(x) \,.\, \cos F(a)\,.$$

Ferner dividire man GII durch GIV:

$$\frac{\operatorname{tg} X \,.\, \operatorname{tg} F(x)}{\cos F(r)} = \frac{\sin A \,.\, \operatorname{tg} F(a)}{\cos F(a)}$$

und ersetze hier $\sin A$ durch seinen aus HIV folgenden Werth:

$$\operatorname{tg} X = \frac{\cos F(y) \,.\, \operatorname{tg} F(a)}{\cos F(a)} \cot F(x),$$

oder mit Benutzung von [1]:

[3] $$\operatorname{tg} X = \cos F(x) \,.\, \operatorname{tg} F(a)\,.$$

Aus LI und HII folgt:

$$\frac{\operatorname{tg}(\varphi - X) \,.\, \operatorname{tg} F(y)}{\sin F(y)} = \frac{\operatorname{tg} F(r)}{\cos A}$$

oder:

$$\operatorname{tg}(\varphi - X) = \frac{\cos F(y) \,.\, \operatorname{tg} F(r)}{\cos A},$$

und, wenn man den Werth von $\operatorname{tg} F(r)$ aus KII einsetzt:

$$\operatorname{tg}(\varphi - X) = \operatorname{tg} A \,.\, \operatorname{tg} F(a) \,.\, \cos F(y),$$

also mit Hülfe von [1] und [2]:

$$\operatorname{tg}(\varphi - X) = \operatorname{tg} F(x) \,.\, \sin F(x) \,.\, \sin F(a) \,.\, \cos F(a)$$

und wegen [3]:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} F(x) \,.\, \sin F(x) \,.\, \sin F(a) \,.\, \cos F(a) + \cos F(x) \,.\, \operatorname{tg} F(a)}{1 - \sin^2 F(x) \,.\, \sin^2 F(a)}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} F(a)}{\cos F(x)} \cdot \frac{\cos^2 F(x) + \sin^2 F(x) \,.\, \cos^2 F(a)}{1 - \sin^2 F(x) \,.\, \sin^2 F(a)}$$

oder:

[4] $$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} F(a)}{\cos F(x)},$$

das heisst, die Gleichung (20).

Genau ebenso wird:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} F(c)}{\cos F(y)} = \frac{\operatorname{tg} F(c)}{\sin F(x) \,.\, \cos F(a)},$$

also:

[5] $$\operatorname{tg} F(c) = \sin F(a) \,.\, \operatorname{tg} F(x),$$

was die Gleichung (22) ist.

S. 26, Z. 14—10 v. u. (22, Z. 14—16). Das rechtwinklige Dreieck Fig. 11 liefert eine andre Konstruktion des gemeinsamen Lothes der hier betrachteten beiden Geraden. Man muss zu diesem Zwecke nach Anleitung von S. 242f. die Kathete a' aus der Gleichung $F(a') = A$ bestimmen und den anliegenden Winkel gleich $F(l)$ machen. Da $F(l) < A < \frac{1}{2}\pi$ ist, so

ist $F(l) < F(a')$ und es entsteht wirklich ein rechtwinkliges Dreieck, dessen andre Kathete a liefert, während die Hypotenuse t bestimmt.

Das Dreieck Fig. 11 ist aber noch aus einem andern Grunde merkwürdig. Legt man es nämlich in das von l, a, b, t gebildete Viereck (Fig. 10) so, dass die Kathete a auf a und die Kathete a' auf l fällt, so erhält man, da sich aus $F(l) < F(a')$ ergiebt: $a' < l$, die nebenstehende Figur 9'. In dieser ist augenscheinlich SU parallel RQ und US bildet mit UP denselben Winkel, den die von Q aus zu PS gezogene Parallele mit QP bildet. Demnach ergeben sich hier unmittelbar zwei Konstruktionen für die Gerade, die durch einen gegebenen Punkt geht und zu einer gegebenen Geraden parallel ist.

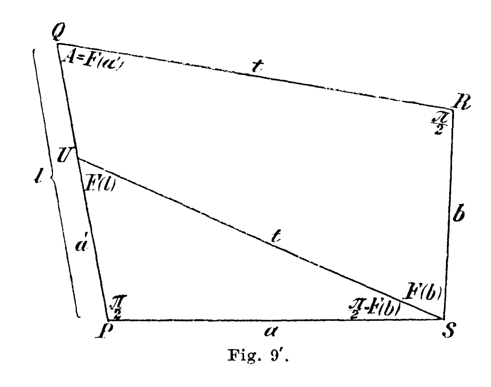


Fig. 9'.

Die erste Konstruktion ist die einfachere. Will man durch S die Parallele zu RQ ziehen, so fälle man von S aus auf RQ das Loth SR, errichte sodann auf RS in S das Loth SP, nehme ferner auf RQ auf der Seite, nach der hin man die Parallele ziehen will, den Punkt Q beliebig an und fälle von Q aus auf SP das Loth QP. In dem Vierecke $QRSP$ ist die dem rechten Winkel P gegenüberliegende Seite QR grösser als die Seite PS, die dem spitzen Winkel Q gegenüberliegt, während QR seinerseits kleiner ist als QS; macht man daher $SU = RQ$, so fällt U zwischen P und Q, und SU wird parallel zu RQ.

Die zweite Konstruktion verfährt so: Um von Q aus die Parallele zu PS zu ziehen, fälle man auf PS das Loth QP, nehme S beliebig an, errichte auf PS in S die Senkrechte SR und fälle auf diese das Loth QR. Macht man endlich $SU = RQ$ und trägt man an PQ in Q den Winkel PUS an, so ist der andre Schenkel dieses Winkels die gesuchte Parallele.

Man wird wohl annehmen dürfen, dass Lobatschefskij diese beiden Konstruktionen gekannt hat, obwohl er es nirgends ausdrücklich sagt. Allgemein bekannt scheint bisher nur die zweite zu sein, die Johann Bolyai in § 34 seines „Appendix" angegeben hat.

S. 26, Z. 3—1 v. u. (22, Z. 13, 12 v. u.). Werden die x von l aus gerechnet, so verwandelt sich (23) in:

$$\sin F(a) \,.\, \cos F(l) = \sin F(x - a) \,.\, \cos F(y)$$

oder nach S. 244, (II) in:

$$\cos F(l) = \frac{\sin F(x) \,.\, \cos F(y)}{1 - \cos F(x) \,.\, \cos F(a)},$$

woraus a vermöge (20) leicht weggeschafft werden kann.

S. 27, Z. 1—7 (22, Z. 11—6 v. u.). Die Gleichung (24) ist allerdings unter der Voraussetzung: $F(l) < A < \frac{1}{2}\pi$ abgeleitet, dasselbe gilt daher auch von der äquivalenten Gleichung (25), die auf Grund von S. 243, (I) aus (24) folgt. Aber für $A = F(l)$ geht (25) in die Gleichung (19) einer Parallelen zur x-Axe über, und für $A = \frac{1}{2}\pi$ verwandelt sich

(24) in die Gleichung der im andern Endpunkte von l auf l senkrechten Geraden (s. die vor (23) vorhergehende Gleichung). Ist $0 < A < F(l)$, so hat man (Fig. 10′) nach S. 25, Z. 7—17:

$$\cos F(y) = \cos F(l) \frac{\sin F(x) \cdot \cos F(r)}{\cos F(x) + \cos F(r)}.$$

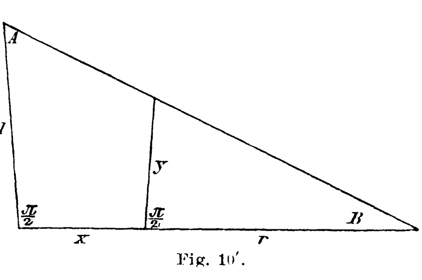


Fig. 10′.

Aus 14 V aber folgt:

$$\operatorname{tg} A = \cos F(x + r) \cdot \operatorname{tg} F(l)$$

oder bei Benutzung von S. 244, (II):

$$\cos F(r) = \frac{\operatorname{tg} A - \cos F(x) \cdot \operatorname{tg} F(l)}{\operatorname{tg} F(l) - \cos F(x) \cdot \operatorname{tg} A},$$

$$\cos F(x) + \cos F(r) =$$
$$= \frac{\operatorname{tg} A \cdot \sin^2 F(x)}{\operatorname{tg} F(l) - \cos F(x) \cdot \operatorname{tg} A},$$

so dass man für $\cos F(y)$ wieder den Ausdruck (24) erhält. Für $A = 0$ ergiebt sich aus (25): $e^x - e^{-x} = 0$, also $x = 0$. Ist endlich $\frac{1}{2}\pi < A < \pi$, so erhält man durch Verlängerung der Geraden nach der Seite der negativen x hin eine Gerade, zu der der Winkel $\pi - A < \pi$ gehört. Da nun die Gleichung (24) ihre Form nicht ändert, wenn man x durch $-x$ und zugleich A durch $\pi - A$ ersetzt, so gilt sie auch für die hier betrachtete Gerade.

Die Gleichung (24) oder (25) stellt daher alle Geraden dar, von denen die y-Axe geschnitten wird, dagegen versagt sie für solche Gerade, die zur y-Axe parallel sind oder die y-Axe überhaupt nicht schneiden. Im zweiten Falle haben nämlich A und l keine Bedeutung mehr, oder, wenn man will, sie werden imaginär, und im ersten Falle wird: $A = 0$ und $l = \infty$ also $F(l) = 0$, so dass die Gleichung (25) zunächst die Form: $0 = 0$ annimmt und erst nach Ausführung eines Gränzübergangs in die Gleichung einer bestimmten Geraden übergeht. So erhält man zum Beispiel, wenn man $A = F(l)$ setzt, den Faktor $\sin A$ weghebt und dann $A = 0$ wählt, die Gleichung:

$$\cos F(y) = e^{-x}$$

der Geraden, die nach der einen Richtung hin zur x-Axe, nach der andern hin zur y-Axe parallel ist.

Alle Geraden überhaupt umfasst die Gleichung (24) oder (25) erst dann, wenn man den Koordinatenanfang auf der x-Axe unbestimmt lässt, wenn man also statt x schreibt: $x + m$, unter m eine beliebige Linie verstanden. Die Gleichung:

$$\cos F(y) = \frac{\cos F(l)}{\sin F(x+m)} - \sin F(l) \cdot \cot A \cdot \cot F(x+m)$$

oder nach S. 244, (II):

$$\cos F(y) \cdot \sin F(x) \cdot \sin F(m) = \cos F(l) - \sin F(l) \cot A \cos F(m) +$$
$$+ \cos F(x) \{\cos F(l) \cdot \cos F(m) - \sin F(l) \cdot \cot A\}$$

stellt daher, wenn man l, m und A alle möglichen reellen, endlichen Werthe annehmen lässt, sämtliche Gerade der Ebene dar, aber allerdings jede unendlich oft.

Will man eine Gleichung haben, die zwei reelle Parameter enthält und die alle Geraden aber jede nur einmal darstellt, so denke man sich vom Koordinatenanfange aus auf die darzustellende Gerade das Loth p gefällt (Fig. 11'), das mit der positiven x-Axe den Winkel ω bilden möge.

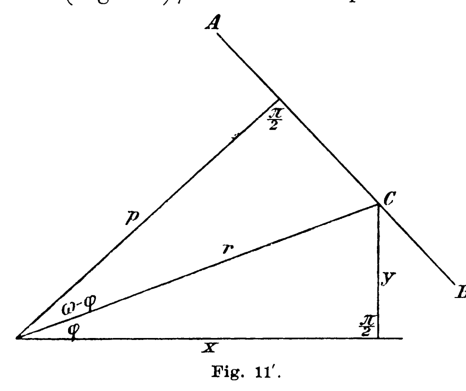


Fig. 11'.

Sind dann x, y die rechtwinkligen Koordinaten eines beliebigen Punktes C der Geraden AB und sind r, φ die Polarkoordinaten desselben Punktes, so ist nach 14 III:

$$\cos F(r) \,.\, \cos(\omega - \varphi) = \cos F(p)$$

$$\cos F(r) \,.\, \cos\varphi = \cos F(x)$$

und nach 14 V:

$$\operatorname{tg}\varphi = \cos F(y) \,.\, \operatorname{tg} F(x),$$

also:

$$\cos F(r) \,.\, \sin\varphi = \cos F(y) \,.\, \sin F(x),$$

somit ist:

$$\cos\omega \,.\, \cos F(x) + \sin\omega \,.\, \cos F(y) \,.\, \sin F(x) = \cos F(p)$$

die allgemeine Gleichung aller Geraden. Lässt man hier p alle endlichen Werthe $\geqq 0$ durchlaufen und ω für $p > 0$ die Werthe: $0 \leqq \omega < 2\pi$, für $p = 0$ die Werthe: $0 \leqq \omega < \pi$, so erhält man jede Gerade der Ebene und zwar jede nur einmal.

Allem Anscheine nach ist es Lobatschefskij vollständig entgangen, dass jede der beiden Gleichungen (24) und (25) als eine lineare Gleichung zwischen zwei Funktionen von x und y aufgefasst werden kann. Setzt man nämlich zum Beispiel in (24):

$$\cos F(x) = \mathfrak{x}, \quad \cos F(y) \,.\, \sin F(x) = \mathfrak{y},$$

so erhält man zwischen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ die lineare Gleichung:

$$\mathfrak{y} = \cos F(l) - \sin F(l) \,.\, \cot A \,.\, \mathfrak{x}.$$

Andrerseits erhält man aus den vorigen Gleichungen durch Wegschaffung von x:

$$\mathfrak{x}^2 + \frac{\mathfrak{y}^2}{\cos^2 F(y)} = 1$$

und da $F(+\infty) = 0$, $F(-\infty) = \pi$ ist, so erkennt man sofort, dass der Inbegriff aller unendlich entfernten Punkte x, y in den neuen Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ durch die Gleichung:

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = 1$$

dargestellt wird. Man gelangt also hier ganz von selbst zur Gleichung eines Kegelschnittes; benutzt man diesen als Fundamentalkegelschnitt einer projektiven Massbestimmung im Sinne Cayleys, so erhält man eine Massbestimmung, die mit der Lobatschefskijschen Geometrie übereinstimmt (vgl. F. Klein, Ueber die sogenannte nichteuklidische Geometrie. Math. Ann. Bd. IV, S. 573—625 (1871) und Bd. VI, S. 112—145 (1873).

S. 27, Z. 16—10 v. u. (23, Z. 5—10). Der K. B. hat: „$F(\frac{1}{2}z) - F(y)$ und $F(y)$". — Ein durch O (Fig. 12') gehender Kreis, dessen Mittelpunkt auf OO' liegt, geht nach § 9 in einen Gränzkreis über, wenn der Mittelpunkt

ins Unendliche rückt: die Durchmesser des Kreises werden dabei zu einander parallel und Axen des Gränzkreises. Demnach ist A ein Punkt dieses Gränzkreises, wennn

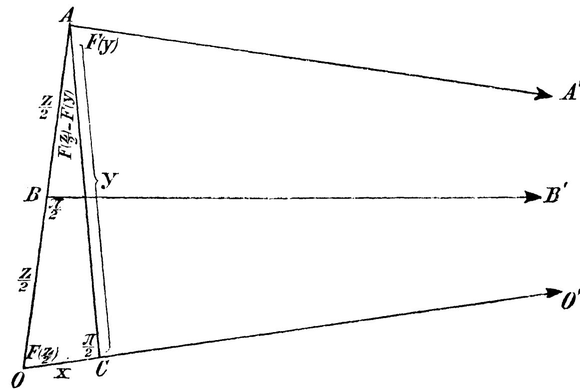


Fig. 12'.

$$\angle A'AO = \angle AOO'$$

und AA' parallel OO'. Steht dann BB' auf OA in der Mitte B senkrecht, so ist augenscheinlich auch BB' parallel zu OO' und AA', demnach

$$\angle O'OA = \angle A'AO = F(\tfrac{1}{2} z),$$
$$\angle A'AC = F(y).$$

Von den Gleichungen des Textes folgt jetzt die zweite unmittelbar aus 14 V. Andrerseits wird nach 14 IV:

$$\sin F(z) = \operatorname{tg} F(\tfrac{1}{2} z) \,.\, \operatorname{tg} (F(\tfrac{1}{2} z) - F(y))$$

oder, wenn man die linke Seite nach S. 244, (II) umgestaltet:

$$\frac{\sin^2 F(\frac{1}{2} z)}{1 + \cos^2 F(\frac{1}{2} z)} = \operatorname{tg} F(\tfrac{1}{2} z) \frac{\operatorname{tg} F(\frac{1}{2} z) - \operatorname{tg} F(y)}{1 + \operatorname{tg} F(\frac{1}{2} z) \,.\, \operatorname{tg} F(y)},$$

also wie im Texte:

$$2 \operatorname{tg} F(y) = \operatorname{tg} F(\tfrac{1}{2} z).$$

Die Wegschaffung von z ergiebt:

$$2 \sin F(y) = \cos^2 F(y) \,.\, \operatorname{tg} F(x),$$

also:

$$\sin F(y) = -\cot F(x) + \sqrt{1 + \cot^2 F(x)}$$
$$= \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} F(x) = e^{-x},$$

wo das Pluszeichen gewählt ist, weil für $x = 0$ auch $y = 0$, also $F(y) = \frac{1}{2}\pi$ wird. Der andre Werth der Quadratwurzel liefert übrigens eine Gleichung:

$$\sin F(y) = -e^x,$$

die nicht durch reelle Werthe von x und y befriedigt werden kann, denn $F(y)$ liegt für reelles y stets zwischen 0 und π.

S. 28, Z. 16 (23, Z. 11 v. u.). Der K. B. hat: $AF <$ statt $>$.

S. 29, Z. 3 f. (24, Z. 12 f.). Die Gleichungen des Textes erhält man, wenn man 14 II und V auf Fig. 13' anwendet. Im K. B. lautet die erste Gleichung irrig:

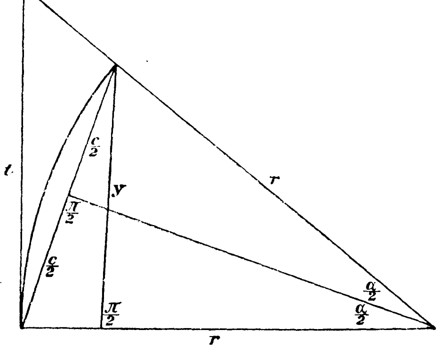


Fig. 13'.

$$\cos F(c) = \sin \alpha \,.\, \cot F(r),$$

dementsprechend steht auch Z. 8, 10 (Z. 17, 18) $n \cos F(c)$ statt: $2n \cot F(\frac{1}{2} c)$.

S. 29, Z. 13 (24, Z. 14 v. u.). Der K. B. hat: $\frac{1}{2}\alpha(e^{-r} - e^{r})$, das Richtige hat A. P.

S. 29. Z. 11—5 v. u. (24, Z. 5—1 v. u.). Nach 14 II ist in Fig. 13′:

$$\operatorname{tg} F(r) = \sin \alpha \,.\, \operatorname{tg} F(y).$$

Hält man nun y fest, während man r ins Unendliche wachsen lässt, so verwandelt sich der Kreisbogen in einen Gränzkreisbogen, dessen Länge nach (28) den Werth:

$$\left[\frac{\alpha}{\operatorname{tg} F(r)}\right]_{r=\infty} = \left[\frac{\frac{d\alpha}{dr}}{\frac{d \operatorname{tg} F(r)}{dr}}\right]_{r=\infty} = \left[\frac{1}{\cos\alpha \operatorname{tg} F(y)}\right]_{r=\infty} = \cot F(y)$$

besitzt.

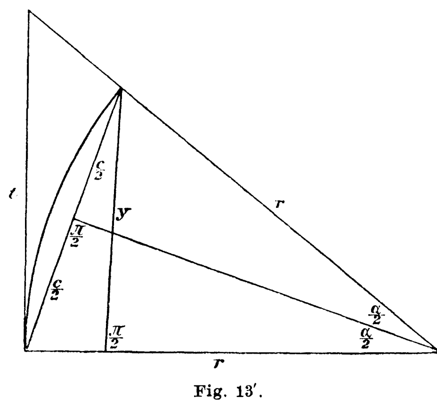


Fig. 13′.

S. 29, Z. 4 v. u.—30, Z. 5 (25, Z. 1—8). Fig. 14′ stellt ein solches Dreieck dar, es ist also: $AA' \parallel CC' \parallel BB'$ und

$$\angle A'AB = \angle B'BA = F(\tfrac{1}{2} c)$$
$$\angle A'AC = \angle C'CA = F(\tfrac{1}{2} b)$$
$$\angle B'BC = \angle C'CB = F(\tfrac{1}{2} a).$$

Aus 17 IV folgt nun wegen:

$$\sin F(c) = \frac{\sin^2 F(\frac{1}{2} c)}{1 + \cos^2 F(\frac{1}{2} c)}$$

die Gleichung:

$$\sin^2 F(\tfrac{1}{2}c).\cos C + \cos(A+B) = \cos^2 F(\tfrac{1}{2} c)\,.\,\cos(A-B),$$

oder, da $A+B = C - 2F(\frac{1}{2} c)$ ist:

$$\cos^2 F(\tfrac{1}{2} c)\,.\,\cos C + 2\sin F(\tfrac{1}{2}c).\cos F(\tfrac{1}{2}c).\sin C = \cos^2 F(\tfrac{1}{2} c)\,.\,\cos(A-B),$$

es ist aber:

$$\cos C - \cos(A-B) = -2\sin F(\tfrac{1}{2} a).\sin F(\tfrac{1}{2} b),$$

also ergiebt sich:

$$\cot F(\tfrac{1}{2} c) = \cot F(\tfrac{1}{2} a) + \cot F(\tfrac{1}{2} b).$$

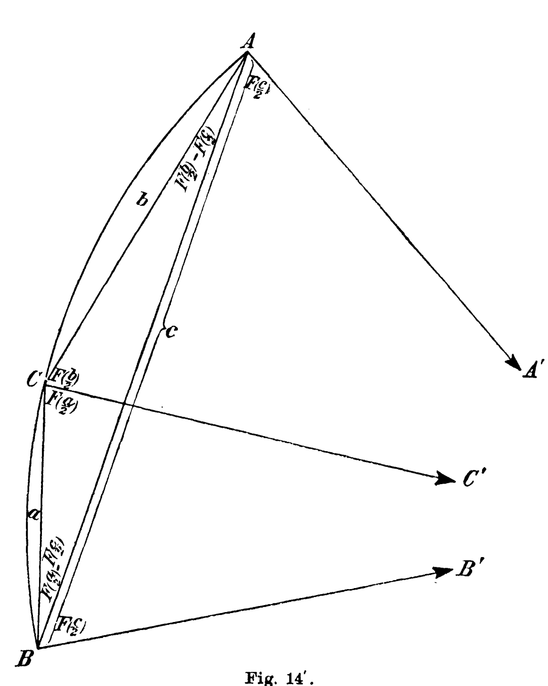


Fig. 14′.

S. 30, Z. 8 (25, Z. 10). Der K. B. hat: $2 \cot F(c)$ statt: $2 \cot F(\frac{1}{2} c)$.

S. 30, Z. 11—15 (25, Z. 14—11 v. u.). In Fig. 15′ ist AA' parallel BB' und AB der Gränzkreisbogen s. Nach (19) lautet die Gleichung der Geraden DB':

$$\cos F(y) = e^{-x} \,.\, \cos F(t)$$

und nach (27) die des Gränzkreises AB:

$$\sin F(y) = e^{-x},$$

also wird nach (29):

$$\cot F(y) = s = \cos F(t).$$

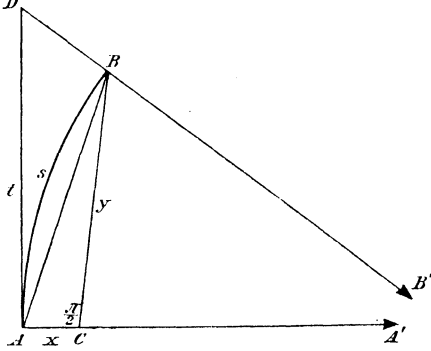


Fig. 15′.

S. 30, Z. 1 v. u., 31, Z. 1 (25, Z. 1 v. u., 26, Z. 1). Diese Gleichungen folgen aus 17 II, III.

S. 31, Z. 2—6 (26, Z. 2—6). Da T stumpf ist, so erhält man:

$$\cos T = -\frac{\cos F(\frac{1}{2} a)}{\sqrt{\cos^2 F(\frac{1}{2} a) + \operatorname{tg}^2 F(y)}} = -\frac{\cos F(y)}{\sqrt{1 + \sin^2 F(y) \,.\, \operatorname{tg}^2 F(\frac{1}{2} a)}},$$

ferner ist nach S. 244 (II):

$$\sin F(2q) = \frac{\sin^2 F(q)}{1 + \cos^2 F(q)} = \frac{\operatorname{tg}^2 F(q)}{2 + \operatorname{tg}^2 F(q)}$$

$$= \frac{\sin^2 F(y) \,.\, \operatorname{tg}^2 F(\frac{1}{2} a)}{2 + \sin^2 F(y) \,.\, \operatorname{tg}^2 F(\frac{1}{2} a)}$$

$$\cos F(2q) = \frac{2\sqrt{1 + \sin^2 F(y) \,.\, \operatorname{tg}^2 F(\frac{1}{2} a)}}{2 + \sin^2 F(y) \,.\, \operatorname{tg}^2 F(\frac{1}{2} a)}.$$

Ersetzt man jetzt noch $\sin F(y' - y)$, $\cos F(y' - y)$ durch die Ausdrücke S. 244, (II), so wird $\sin F(t)$ gleich:

$$\frac{\sin^2 F(y) \,.\, \operatorname{tg}^2 F(\frac{1}{2} a) \,.\, \sin F(y) \,.\, \sin F(y')}{(2 + \sin^2 F(y) \operatorname{tg}^2 F(\frac{1}{2} a))\,(1 - \cos F(y) \cos F(y')) + 2 \cos F(y)\,(\cos F(y') - \cos F(y))},$$

woraus auf Grund der Gleichung:

$$\sin F(a) = \frac{\operatorname{tg}^2 F(\frac{1}{2} a)}{2 + \operatorname{tg}^2 F(\frac{1}{2} a)}$$

der Werth (31) des Textes sofort folgt. Andrerseits bekommt man:

$$-\frac{\cot \omega' \,.\, \operatorname{tg} F(y)}{\cos F(\frac{1}{2} a)} \sin F(y) \sin F(y') + 1 - \cos F(y) \cos F(y') +$$

$$+ \frac{(\cos F(y') - \cos F(y))\,(2 + \sin^2 F(y) \operatorname{tg}^2 F(\frac{1}{2} a))}{2 \cos F(y)} = 0,$$

und wenn man darin vermöge der Gleichung für $\sin F(a)$ und vermöge:

$$\cos F(a) = \frac{2 \cos F(\frac{1}{2} a)}{1 + \cos^2 F(\frac{1}{2} a)} = \frac{2}{\cos F(\frac{1}{2} a)\,(2 + \operatorname{tg}^2 F(\frac{1}{2} a))}$$

die Grössen $\sin F(a)$ und $\cos F(a)$ einführt, so ergiebt sich die auf (31) folgende Gleichung des Textes.

S. 31, Z. 3 (26, Z. 3). Der K. B. hat im Nenner $\sin F(y)$ statt: $\sin^2 F(y)$.

S. 31, Z. 7f. (26, Z. 7f.). Der K. B. hat: $-\cot\omega$ statt: $\cot\omega$. — In den beiden ersten der vier ursprünglichen Gleichungen hat man (s. Fig. 16′) y, q, T durch y', q', $\pi - T'$ zu ersetzen, in den beiden letzten dagegen blos: q, T, ω' durch q', T', $\pi - \omega$. Dasselbe erreicht man, wenn man

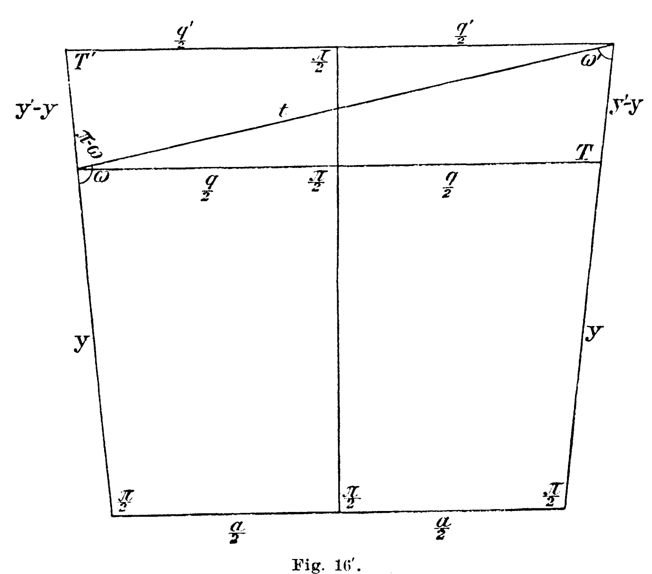


Fig. 16′.

in allen vier Gleichungen: y, y', a, q, T, ω' durch y', y, $-a$, $-q$, T', $\pi - \omega$ ersetzt; demnach bleiben die gefundenen Gleichungen richtig, wenn man y mit y' vertauscht und a, ω' durch $-a$, $\pi - \omega$ ersetzt. Kürzer gelangt man freilich zum Ziele, wenn man beachtet, dass die Gleichungen für t und ω' richtig bleiben, wenn man y mit y' und ω mit ω' vertauscht.

S. 31, Z. 12f. (26, Z. 11f.). Berechnet man $\operatorname{tg}(\omega + \omega')$, so hebt sich in Zähler und Nenner der Faktor:

$$1 - \sin F(a) \,.\, \cos\left(F(y') - F(y)\right).$$

Der K. B. hat im Nenner von Gl. (32): $\sin F(y)$ statt: $\sin F(a)$.

S. 31, Z. 15—17 (26, Z. 14f.). Sind t und a in der Richtung nach y' hin zu einander parallel, so ist: $\omega = F(y)$, $\omega' = \pi - F(y')$, also:

$$\cos F(y)\left(1 - \cos F(a)\right) = \cos F(y') \sin F(a)$$

oder:

$$\cos F(y') = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} F(a) \,.\, \cos F(y) = e^{-a} \cos F(y),$$

was mit (19) übereinstimmt. Demnach kommt aus (31):

$$\sin F(t) = \frac{\sin F(a) \sin F(y) \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} F(a) \cos^2 F(y)}}{1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} F(a) \cos^2 F(y)}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2} F(a) \sin F(y) \sqrt{\cos F(a) + \sin^2 \frac{1}{2} F(a) \sin^2 F(y)}}{\cos F(a) + 2 \sin^2 \frac{1}{2} F(a) \sin^2 F(y)},$$

also:

$$\cos F(t) = \frac{\cos F(a)}{\cos F(a) + 2\sin^2 \frac{1}{2} F(a) \sin^2 F(y)},$$

wo das Pluszeichen genommen ist, weil die Winkel $F(a)$ und $F(t)$ beide spitz sind. Endlich wird:

$$\sin^2 F(y) = \frac{\cos F(a)}{1 - \cos F(a)} \cdot \frac{1 - \cos F(t)}{\cos F(t)}$$
$$= \frac{e^{2a} - 1}{e^{2t} - 1}.$$

S. 31, Z. 14—8 v. u. (26, Z. 11—6 v. u.). Man findet aus:

$$F(y) = 2 \operatorname{arctg} (e^{-y})$$

durch Differentiation:

$$\text{(V)} \qquad dF(y) = -\frac{2e^{-y} dy}{1 + e^{-2y}} = -\sin F(y)\, dy.$$

Ferner wird:

$$\tfrac{1}{2} ds^2 = 1 - \sin F(t) = \frac{1 - \sin F(a) . \cos (F(y) - F(y'))}{1 - \sin F(a) . \cos F(y) . \cos F(y')}$$

oder nach S. 21, Z. 5 v. u.:

$$\tfrac{1}{2} ds^2 = \frac{1 - (1 - \frac{1}{2} dx^2)(1 - \frac{1}{2} dy^2 \sin^2 F(y))}{1 - \cos^2 F(y)}$$
$$= \tfrac{1}{2} dy^2 + \tfrac{1}{2} \frac{dx^2}{\sin^2 F(y)}.$$

Endlich:

$$\cot \omega' = \frac{\cos F(y') - \sin F(a) . \cos F(y)}{\cos F(a) \sin F(y')}$$
$$= \frac{-\sin F(y) . (-\sin F(y)\, dy)}{dx . \sin F(y)}.$$

Aehnlich ergiebt sich:

$$\cot \omega = -\cot \omega',$$

also $\omega' = \pi - \omega$, wenn unendlich kleine Grössen erster Ordnung vernachlässigt werden.

S. 31, Z. 10 v. u. (26, Z. 8 v. u.). Der K. B. hat: $\cot \omega$ statt: $\cot \omega'$.

S. 31, Z. 5—1 v. u. (26, Z. 3 v. u.—27, Z. 1). Werden a, $y' - y$ und q unendlich klein, so kann man nach S. 21, Z. 5 v. u. setzen:

$$\cos F(\tfrac{1}{2} a) = \tfrac{1}{2} a, \quad \operatorname{tg} F(q) = \frac{1}{q}, \quad \cos F(2q) = 2q,$$
$$\sin F(t) = 1 - \tfrac{1}{2} t^2, \quad \sin F(2q) = 1 - 2q^2,$$
$$\sin F(y' - y) = 1 - \tfrac{1}{2} (y' - y)^2,$$

wonach sich aus den vier ersten Gleichungen des § 21 die Gleichungen des Textes leicht ergeben, da augenscheinlich $\operatorname{tg} T = \infty$ wird.

Besonders behalte man die Gleichung:

$$\text{(VI)} \qquad du = \frac{dx}{\sin F(y)}$$

im Gedächtnisse, die sich auf die Fig. 17′ bezieht.

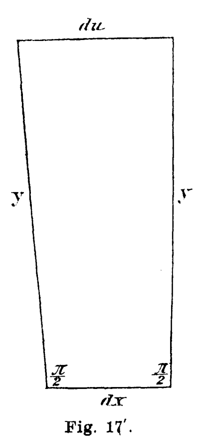


Fig. 17′.

S. 32, Z. 2—6 (27, Z. 2—5). Man erinnere sich an die Gleichung (V); es wird demnach:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{\cos^2 F(x) \,.\, \sin^2 F(x)}{\sin^2 F(x) - \sin^2 F(r)} + \frac{\sin^2 F(x)}{\sin^2 F(r)}}$$
$$= \frac{\cot F(r) \,.\, \sin^2 F(x)}{\sqrt{\sin^2 F(x) - \sin^2 F(r)}}.$$

Die Integration hat keine Schwierigkeit, da $\sin^2 F(x)\, dx = d \cos F(x)$ ist.

S. 32, Z. 7 f. (27, Z. 6), nämlich nach 14 III.

S. 32, Z. 14 (27, Z. 12). Der K. B. hat (24) statt (29).

S. 32, Z. 15 v. u. (27, Z. 11 v. u.). Der Nenner lässt sich in der Form $4UV$ darstellen, wenn man setzt:

$$U = \sin^2 \tfrac{1}{2}(A + F(l)) \,.\, e^{-x} - \sin^2 \tfrac{1}{2}(A - F(l)) \,.\, e^{x}$$
$$V = \cos^2 \tfrac{1}{2}(A - F(l)) \,.\, e^{x} - \cos^2 \tfrac{1}{2}(A + F(l)) \,.\, e^{-x},$$

dann wird zugleich:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(A - F(l)) \,.\, e^{x}}{U} + \frac{\cos^2 \frac{1}{2}(A - F(l)) \,.\, e^{x}}{V}.$$

S. 32, Z. 10, 9 v. u. (27, Z. 6 v. u.). Wendet man die Gleichungen 14 I und 17 II auf die beiden Dreiecke in Fig. 18′ an und schafft $\sin F(u)$ weg, so kommt:

$$\cos A \,.\, \cos F(l) \,.\, \cos F(s) + \frac{\sin F(l) \,.\, \sin F(s)}{\sin F(x) \,.\, \sin F(y)} = 1.$$

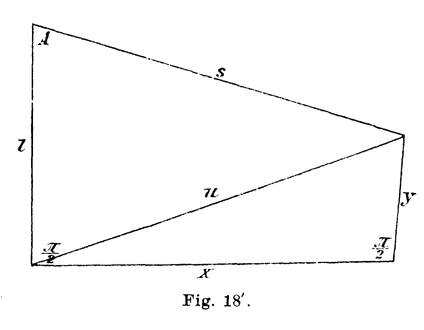


Fig. 18′.

Setzt man hier für $\sin F(s)$ seinen Werth aus (31) ein, nachdem man a, y, y', t durch x, l, y, s ersetzt hat, so bekommt man:

$$\cos A \,.\, \cos F(l) \,.\, \cos F(s) + \frac{\sin^2 F(l)}{1 - \sin F(x) \,.\, \cos F(l) \,.\, \cos F(y)} = 1,$$

und hieraus ergiebt sich bei Benutzung von (24) sofort der Ausdruck des Textes für $\cos F(s)$.

S. 32, Z. 8—6 v. u. (27, Z. 5, 4 v. u.). Es wird ja:

$$\cos F(s) = \frac{\cos F(x)}{\cos F(x) + \sin^2 F(l)\,(1 - \cos F(x))}$$

also:

$$\sin^2 F(l) = \frac{\cos F(x)}{1 - \cos F(x)} \cdot \frac{1 - \cos F(s)}{\cos F(s)}.$$

S. 32. In der Fig. 14 des K. B. sind die Buchstaben s und s' nicht zu sehen.

S. 33, Z. 4 (28, Z. 3). Der K. B. hat: Gl. (28), (29) statt: (29), (19).

S. 33, Z. 7 (28, Z. 6). Der K. B. hat: $\sqrt{e^{-2a} - \cos^2 F(y)}$.

S. 33, Z. 8—12 (28, Z. 7—10). Man vgl. hierzu Fig. 19′ und beachte, dass die beiden Gränzkreisbögen auf jeder der beiden Parallelen ein Stück von der Länge t abschneiden.

S. 33, Z. 14—16 (28, Z. 12—14). Der K. B. hat: $s = s' \,.\, e^{-t}$. Eine

Ableitung der Gleichung (36) aus den Eigenschaften des Gränzkreises findet man in § 117 der N. A., hier S. 189 f. Allerdings wird dort nur gezeigt, dass $s' = s \,.\, e^{-t}$ ist, unter e eine Zahl > 1 verstanden, für die man bei geeigneter Wahl der Längeneinheit die Grundzahl der natürlichen Logarithmen setzen kann. Später, in § 137, hier S. 212 ff., zeigt sich dann, dass diese Wahl der Längeneinheit mit der in § 12, S. 20 getroffenen übereinstimmt.

Fig. 19'.

S. 33, Z. 15, 13 v. u. (28, Z. 14, 12 v. u.). Im K. B. lauten diese Gleichungen:

$$\frac{e^{-2t}-1}{e^{-2a}-1} = \sin^2 F(y), \qquad \frac{e^{2a}-1}{e^{2t}-1} = \sin^2 F(y').$$

S. 33, Z. 11—8 v. u. (28, Z. 11—9 v. u.). Nach 14 II, III ist:

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} \cot F(y) = \cot F(r) \,.\, \sin \varphi, \\ \cos F(x) = \cos F(r) \,.\, \cos \varphi, \end{cases} \qquad \sin F(y) = \frac{\sin F(r)}{\sqrt{1-\cos^2 \varphi \,.\, \cos^2 F(r)}}$$

und umgekehrt, nach 14 I, V:

$$\text{(VIII)} \quad \begin{cases} \sin F(r) = \sin F(x) \,.\, \sin F(y) \\ \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} F(x) \,.\, \cos F(y), \end{cases}$$

woraus die Gleichungen des Textes leicht folgen. In der Gleichung für $dx : \sin F(y)$ hat der K. B. im Nenner: $\cot^2 F(r)$ statt: $\cos^2 F(r)$.

S. 34, Z. 10 (29, Z. 2 v. o.). Nach dieser Zeile sind in den G. A. folgende Worte ausgefallen:

„Ohne diese Annahmen ist es unmöglich ein allgemeines Verfahren zur Messung von Flächenräumen anzugeben. Es ist leicht zu sehen, dass die wirkliche Messung ebenfalls darauf gegründet ist.“

S. 34, Fig. 15. Der Buchstabe h steht auf der Figurentafel des A. P.

S. 34, Z. 19—14 v. u. (29, Z. 8—12). Das ist die einzige Stelle, an der Lobatschefskij die Abstandslinie erwähnt, das heisst, den Ort aller Punkte, die von einer gegebenen Geraden gleichen Abstand haben. Es bleibt daher auch ungewiss, ob er erkannt hat, dass die gewöhnlichen Kreise, die Gränzkreise und die Abstandslinien die drei Arten von Kreisen sind, die man in der nichteuklidischen Geometrie unterscheiden muss. Dagegen macht Johann Bolyai in seinem Appendix von der Abstandslinie den ausgiebigsten Gebrauch. Uebrigens stimmt das Lobatschefskijsche Verfahren zur Untersuchung des Dreiecksinhalts vollständig mit dem von J. Bolyai angewendeten überein (s. Appendix, § 39 ff.). Lobatschefskij selbst wendet es später auch auf die Untersuchung des Inhalts sphärischer Dreiecke an, s. N. A., § 68, hier S. 133—135.

Uebrigens hat auch schon Saccheri in seinem Euclides ab omni naevo vindicatus, Mailand 1733 den Begriff der Abstandslinie eingeführt und eine Anzahl Sätze über diese Kurve bewiesen, s. P. Th., S. 123 ff.

Man beachte übrigens, dass die Winkelsumme des Vierecks $AFGC$ erhalten wird, wenn man π zu der Winkelsumme des Dreiecks ABC hinzufügt. Demnach haben alle die im Texte besprochenen flächengleichen Dreiecke auch gleiche Winkelsummen.

S. 34, Z. 3 v. u. (29, Z. 11 v. u.). Der K. B. hat: $c < c'$ statt: $c > c'$.

S. 34, Z. 14 v. u. — 35, Z. 13 (29, Z. 12 — 30, Z. 2). Die Gleichung:

$$\sin A = \frac{\cos F(h)}{\cos F(\frac{1}{2}c)}$$

wäre nur richtig, wenn $\angle FAC = \frac{1}{2}\pi$, also $\angle FAD = \frac{1}{2}\pi - A$ wäre; dann würde sie aus 14 III folgen. Dann aber wäre auch $\angle ACG = CAF = \frac{1}{2}\pi$, und das Viereck $AFGC$ enthielte vier rechte Winkel, was unmöglich ist. Aehnlich verhält es sich mit dem Schlusse, der nachher gezogen wird, dass jedes Dreieck ABC in ein rechtwinkliges von gleichem Flächeninhalte verwandelt werden könne; da nämlich flächengleiche Dreiecke stets gleiche Winkelsummen haben, so lässt sich ein Dreieck nur dann in ein rechtwinkliges von demselben Inhalte verwandeln, wenn seine Winkelsumme $> \frac{1}{2}\pi$ ist.

Dieses merkwürdige Versehen Lobatschefskijs hätte sich nur durch vollständige Umgestaltung des ganzen hier in Rede stehenden Abschnittes beseitigen lassen; es erschien daher angemessen, den Text des Originals beizubehalten und die Richtigstellung in einer Anmerkung zu geben.

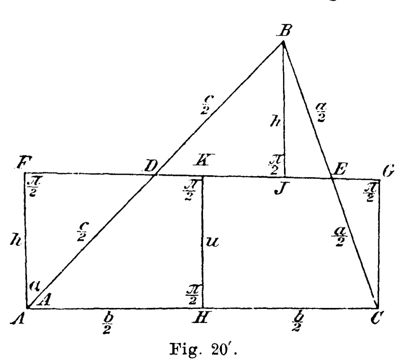


Fig. 20′.

Wir bezeichnen, wie im Texte den Winkel BAC mit A und ausserdem den Winkel FAD (Fig. 20′) mit α, wo α positiv oder negativ zu nehmen ist, jenachdem D rechts oder links von F liegt. Dann ist nach 14 III:

$$\cos\alpha = \frac{\cos F(h)}{\cos F(\frac{1}{2}c)},$$

eine Gleichung, die möglich ist, so lange $c \geqq 2h$, weil dann $F(\frac{1}{2}c) \leqq F(h)$. Man kann also, indem man c_1 aus:

$$\cos F(\tfrac{1}{2}c_1) = \cos\alpha \,.\, \cos F(\tfrac{1}{2}c)$$

bestimmt, das Dreieck ABC ohne Aenderung der Winkelsumme in ein flächengleiches AB_1C verwandeln, dessen Grundlinie wieder AC ist und dessen von A ausgehende Seite $AB_1 = c_1$ ist und auf DE senkrecht steht. Dagegen kann man das Dreieck ABC unter Beibehaltung der Grundlinie AC nur dann, dann aber auch stets, in ein rechtwinkliges von gleichem Inhalte und von gleicher Winkelsumme verwandeln, wenn die auf AC in A errichtete Senkrechte die Gerade ED oder deren Verlängerung trifft.

Ist andrerseits $c' > c$, so kann man α' aus der Gleichung:

$$\cos\alpha' = \frac{\cos\alpha \,.\, \cos F(\frac{1}{2}c)}{\cos F(\frac{1}{2}c')}$$

bestimmen und gelangt so ohne Aenderung der Winkelsumme und des Flächeninhalts zu einem Dreiecke $AB'C$, das wieder die Grundlinie AC hat und dessen Seite $AC' = c'$ ist. Man erhält dieses Dreieck sofort,

wenn man auf FG den Punkt D' so bestimmt, dass $AD' = \frac{1}{2}c'$ wird, und dann AD' über D' hinaus soweit verlängert, bis man $AC' = c'$ erhält.

Hierin liegt, dass sich zwei beliebige Dreiecke ohne Veränderung ihrer Flächeninhalte und ihrer Winkelsummen stets so verwandeln lassen, dass sie eine Seite gemein haben, die dann als gemeinsame Grundlinie beider Dreiecke benutzt werden kann.

Denken wir uns jetzt wieder das Dreieck ABC (Fig. 20′) und das flächengleiche Viereck $AFGC$, in dem $FA = GC = h$ und

$$\angle AFG = \angle FGC = \tfrac{1}{2}\pi$$

ist. Wir halbiren AC in H und FG in K und ziehen HK; dann sind die Winkel bei H und K augenscheinlich Rechte. Setzen wir daher noch $HK = u$, $FK = v$, so gelten für das Viereck $AHKF$, das drei rechte Winkel enthält, nach S. 25 Gl. (20) die Beziehungen:

$$\operatorname{tg}(A + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} F(\frac{1}{2}b)}{\cos F(u)} = \frac{\operatorname{tg} F(h)}{\cos F(v)},$$

woraus hervorgeht, dass der spitze Winkel $A + \alpha > F(\frac{1}{2}b)$ und $> F(h)$ ist. Ferner ist nach S. 26, Gl. (22):

$$\operatorname{tg} F(\tfrac{1}{2}b) = \sin F(h) \,.\, \operatorname{tg} F(v),$$

also wird:

$$\operatorname{tg}(A + \alpha) = \frac{\sqrt{\sin^2 F(h) + \operatorname{tg}^2 F(\frac{1}{2}b)}}{\cos F(h)} = \frac{\sqrt{\sin^2 F(\frac{1}{2}b) + \operatorname{tg}^2 F(h)}}{\cos F(\frac{1}{2}b)}$$

oder:

$$\cos(A + \alpha) = \cos F(\tfrac{1}{2}b) \,.\, \cos F(h),$$

mithin ist: $A + \alpha < F(\frac{1}{2}b) + F(h)$. Setzen wir daher $\alpha'' = A + \alpha - F(\frac{1}{2}b)$, so wird $\alpha'' < F(h)$ und wir können c'' aus der Gleichung:

$$\cos F(\tfrac{1}{2}c'') = \frac{\cos F(h)}{\cos \alpha''}$$

bestimmen. Damit ist unser ursprüngliches Dreieck in ein flächengleiches $AB''C$ (Fig. 21′) verwandelt, das dieselbe Grundlinie $AC = b$ hat, während der Winkel bei A gleich $F(\frac{1}{2}b)$ und die Seite AB'' gleich c'' ist. Die Winkelsumme des neuen Dreiecks ist wieder gleich der des alten.

Schneller gelangt man zu diesem Dreiecke rein geometrisch. Es ist ja unmittelbar klar, dass die von A aus zu HK gezogene Parallele AA' in dem Winkelraume FAH liegt, weil die Geraden AF und HK, die beide auf FK senkrecht stehen, einander nicht schneiden können. Demnach muss diese Parallele AA' die Gerade FK in einem Punkte L zwischen F und K schneiden, und macht man jetzt $LB'' = AL$, so erhält man ein Dreieck $AB''C$, das dem Vierecke $AFGC$ und also auch dem ursprünglichen Drei-

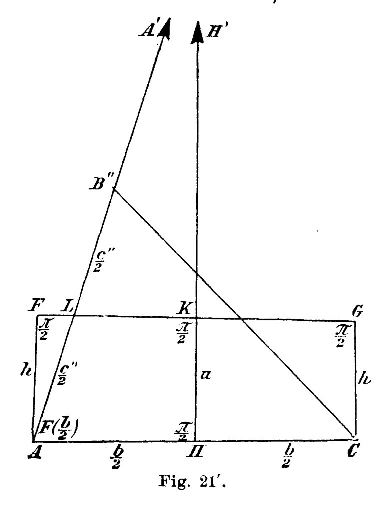


Fig. 21′.

ecke ABC flächengleich ist. Der Winkel $B''AC$ aber ist dann nach der Konstruktion gleich $F(\frac{1}{2}b)$.

Durch das Vorstehende ist gezeigt, dass man zwei beliebige Dreiecke ohne Aenderung ihres Inhalts und ihrer Winkelsummen so verwandeln kann, dass sie die Grundlinie b gemein haben und dass in beiden der eine an der Grundlinie liegende Winkel gleich $F(\frac{1}{2}b)$ ist. Haben nun die ursprünglichen Dreiecke gleichen Flächeninhalt, so müssen offenbar die verwandelten Dreiecke einander decken, demnach sind auch die Winkelsummen der ursprünglichen Dreiecke gleich. Haben andrerseits die beiden ursprünglichen Dreiecke gleiche Winkelsummen, so können die Inhalte der verwandelten Dreiecke nicht verschieden sein, weil sonst der Unterschied der Inhalte ein Dreieck bildete, dessen Winkelsumme gleich π wäre. Folglich sind zwei geradlinige Dreiecke stets dann aber auch nur dann flächengleich, wenn sie gleiche Winkelsummen haben.

Bei allen diesen Betrachtungen ist allerdings zunächst vorausgesetzt, dass alle Ecken der Dreiecke im Endlichen liegen, dass also in keinem der Dreiecke zwei Seiten parallel sind. Merkwürdiger Weise erwähnt Lobatschefskij diesen Fall hier gar nicht. Wir wollen daher auch nicht auf ihn eingehen und nur bemerken, dass der vorhin ausgesprochene Satz bestehen bleibt. Es beruht das darauf, dass jedes geradlinige Dreieck der nichteuklidischen Geometrie einen endlichen Flächeninhalt besitzt, selbst wenn bei ihm parallele Seiten vorkommen. Man kann das leicht beweisen, wenn man sich auf den Satz stützt, dass der von einem Gränzkreisbogen und von zwei parallelen Axen dieses Bogens begränzte Flächenraum stets endlich und zwar der Länge des Bogens proportional ist (vgl. S. 273f.).

S. 35, Z. 15—22 (30, Z. 3—7). Denkt man sich ein beliebiges geradliniges Dreieck durch gerade Linien in eine Anzahl Dreiecke zerlegt, so ist augenscheinlich der Betrag, der der Winkelsumme des ganzen Dreiecks an π fehlt, gleich der Summe der Beträge, die den Winkelsummen der einzelnen Dreiecke an π fehlen. Hierin liegt, dass die Winkelsumme eines geradlinigen Dreiecks abnimmt, sobald der Inhalt des Dreiecks wächst. — Hat man andrerseits zwei beliebige Dreiecke, deren Inhalte verschieden sind, so kann man die nach dem Früheren ohne Aenderung der Inhalte und der Winkelsummen in zwei Dreiecke verwandeln, die eine Seite und einen anliegenden Winkel gemein haben. Von den beiden verwandelten Dreiecken ist jetzt das kleinere ganz in dem grösseren enthalten und hat daher eine grössere Winkelsumme als dieses. Die Betrachtungen des Textes sind also in Ordnung, wenn man für: „und den rechten Winkeln" setzt: „und den anliegenden gleichen Winkeln".

Die übrigen Entwickelungen des ganzen § 25 sind allerdings zunächst nur auf solche Dreiecke anwendbar, deren Winkelsumme $\geqq \frac{1}{2}\pi$ ist, die sich also in flächengleiche rechtwinklige verwandeln lassen. Da man aber jedes beliebige geradlinige Dreieck in zwei rechtwinklige zerlegen kann, so zeigen diese Betrachtungen doch, dass der Betrag, der der Winkelsumme eines Dreiecks an π fehlt, als Mass für den Dreiecksinhalt genommen werden kann.

S. 35, Z. 13—9 v. u. (30, Z. 8—13). Vgl. die Anm. S. 249, Z. 4 v. u.

S. 35, Z. 8—5 v. u. (30, Z. 14—11 v. u.). Man muss sich erst y aus der zweiten Gleichung bestimmt denken und dann c aus der ersten. Das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten a und c hat die Winkelsumme

$\pi - (n:m) \,.\, s = \pi - s'$ und ist daher nach dem Früheren dem Dreiecke A' flächengleich.

S. 35, Z. 2 v. u. — 36, Z. 2 (30, Z. 8 v. u.). Die Worte „gleiche" und: „von denen ... in m gleiche Theile" sind in den G. A. ausgefallen. Das letzte „gleiche" ist ein Zusatz der Uebersetzung und hätte in eckige Klammern eingeschlossen werden sollen.

S. 36, Z. 13—15 (31, Z. 1 f.). $\varDelta$ ist dasselbe, was auf S. 24 (S. 20) mit 2ω bezeichnet ist. Die Ableitung des Werthes von $\operatorname{tg}\omega$ ist in der zugehörigen Anmerkung, S. 249, Z. 4 v. u. auseinandergesetzt.

Da Lobatschefskij hier blos die Winkelsumme des rechtwinkligen geradlinigen Dreiecks durch dessen Seiten ausdrückt, so scheint es angebracht, die Ableitung mitzutheilen, die er später in einer andern Abhandlung für die Winkelsumme eines beliebigen geradlinigen Dreiecks entwickelt hat. Man findet diese Ableitung in der I. G. R., s. K. G. S. 1835, I, 16 ff., G. A. I, S. 78 und in der I. G. F., s. Crelle, Bd. XVII, S. 301 f., G. A. II, S. 588 f.

Aus der Gleichung 17 II auf S. 21 folgt:

$$\cos A = \frac{1}{\sin F(a)} \cdot \frac{\sin F(a) - \sin F(b) \,.\, \sin F(c)}{\cos F(b) \,.\, \cos F(c)}$$

oder nach S. 243, (I):

$$\cos A = \frac{(e^b + e^{-b})(e^c + e^{-c}) - 2(e^a + e^{-a})}{(e^b - e^{-b})(e^c - e^{-c})},$$

mithin, wenn man $a + b + c = s$ setzt:

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(e^{s-2a} - 1)(e^s - 1)}{(e^{2b} - 1)(e^{2c} - 1)}$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = e^{s-2a} \frac{(e^{s-2b} - 1)(e^{s-2c} - 1)}{(e^{2b} - 1)(e^{2c} - 1)}.$$

Da die Winkel $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$ nothwendig spitz sind, so findet man leicht:

$$\cos \tfrac{1}{2} A \,.\, \cos \tfrac{1}{2} B = \frac{e^s - 1}{e^{2c} - 1} \cdot e^{c - \frac{1}{2}s} \,.\, \sin \tfrac{1}{2} C$$

$$\sin \tfrac{1}{2} A \,.\, \sin \tfrac{1}{2} B = \frac{e^{s-c} - e^c}{e^{2c} - 1} \cdot e^{c - \frac{1}{2}s} \,.\, \sin \tfrac{1}{2} C$$

$$\sin \tfrac{1}{2} A \,.\, \cos \tfrac{1}{2} B = e^{\frac{1}{2}s - a} \,.\, \frac{e^{s-2b} - 1}{e^{2c} - 1} \cdot \cos \tfrac{1}{2} C$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A \,.\, \sin \tfrac{1}{2} B = e^{\frac{1}{2}s - b} \,.\, \frac{e^{s-2a} - 1}{e^{2c} - 1} \cdot \cos \tfrac{1}{2} C$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(A + B) = e^{-\frac{1}{2}s} \,.\, \frac{e^s + e^c}{e^c + 1} \cdot \sin \tfrac{1}{2} C$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(A + B) = e^{\frac{1}{2}s} \,.\, \frac{e^{-a} + e^{-b}}{e^c + 1} \cdot \cos \tfrac{1}{2} C$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(A + B + C) = \frac{(1 - e^{-a})(1 - e^{-b})}{e^c + 1} \,.\, e^{\frac{1}{2}s} \,.\, \sin \tfrac{1}{2} C \,.\, \cos \tfrac{1}{2} C$$

und somit schliesslich:

$$\text{(IX)}\quad \cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\frac{\sqrt{(e^s-1)(e^{s-2a}-1)(e^{s-2b}-1)(e^{s-2c}-1)}}{(e^a+1)(e^b+1)(e^c+1)}.$$

Hierbei sind einige Druckfehler der G. A. berichtigt.

Setzt man $A+B+C=\pi-\varDelta$, so liefert diese Formel den Flächeninhalt $\varDelta$ des Dreiecks, ausgedrückt durch die Dreiecksseiten a, b, c; für unendlich kleine Seiten a, b, c verwandelt sie sich in die bekannte Formel der Euklidischen Geometrie:

$$\varDelta=\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}.$$

Uebrigens hat Taurinus dieselbe allgemeine Formel für $\varDelta$ schon 1826 in seinen „Geometriae prima elementa" veröffentlicht, s. P. Th. S. 279.

Eine andre, viel umständlichere Ableitung der Formel für $A+B+C$ giebt Lobatschefskij in der P. G. R. und F., s. G. A. I, S. 536 ff., II, S. 666 ff., und zwar ist die Ableitung deshalb so umständlich, weil er dort nicht die Exponentialfunktion einführt, sondern stets mit den Funktionen $\sin\Pi(a)$ und so weiter arbeitet; die Endformel für $\cos\frac{1}{2}(A+B+C)$ bekommt daher auch eine andre, bei Weitem nicht so einfache Gestalt.

S. 36, Z. 11—7 v. u. (31, Z. 12—16). Man erhält nämlich nach S. 244, (II):

$$\operatorname{tg}(A+A')=\frac{\sin F(\beta)\,.\,\sin F(\alpha)}{\cos F(\alpha)-\cos F(\beta)}$$

$$=-\operatorname{tg}F(\beta-\alpha),$$

woraus, da die Winkel $A+A'$ und $F(\beta-\alpha)$ beide $<\pi$ sind, die Gleichung des Textes folgt. — Der K. B. hat: $2\pi-A-A'$ statt: $\pi-A-A'$.

S. 37, Z. 11—15 (31, Z. 4 v. u.—32, Z. 1). In Fig. 22′ ist nach 14 IV:

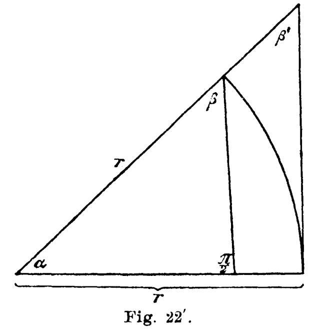


Fig. 22′.

$$\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta=\sin F(r)$$

also:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha+\sin F(r)}{\operatorname{tg}\alpha\,(1-\sin F(r))}=\frac{1}{\operatorname{tg}A},$$

denn A ist gleich: $\frac{1}{2}\pi-(\alpha+\beta)$. Ferner ist nach 14 VI:

$$\sin\alpha=\sin F(r)\,.\,\cos\beta',$$

mithin:

$$\sin A'=\cos(\alpha+\beta')=$$

$$=\frac{\cos\alpha\,.\,\sin\alpha}{\sin F(r)}-\frac{\sin\alpha\sqrt{\sin^2F(r)-\sin^2\alpha}}{\sin F(r)}.$$

S. 37, Z. 16 f. (32, Z. 2 f.). Beide Ausdrücke nehmen für verschwindendes α den Gränzwerth an:

$$\frac{2\pi\,(1-\sin F(r))}{\sin F(r)}=\pi(e^r+e^{-r}-2).$$

S. 37, Z. 11 v. u. (32, Z. 8). Erst bei Vergleichung der beiden im Gaussschen Nachlasse vorhandenen Hefte des K. B. habe ich bemerkt, dass der Originaldruck hier und im Folgenden überall dS und S hat, wofür in

den G. A. höchst unnöthiger Weise zum Theile ds und s gesetzt ist. Lobatschefskij wendet durchgehends s und ds bei Bogenlängen an, bei Flächenräumen dagegen S und dS. Von § 32 an haben auch die G. A. das richtige S.

S. 37, Z. 12—3 v. u. (32, Z. 7—14). Es wird:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} ds &= \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} F(\beta - \alpha) = e^{\alpha - \beta} \\ &= \cot \tfrac{1}{2} F(\alpha) \,.\, \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} F(\beta) \\ &= \cot \tfrac{1}{2} F(\alpha) \,.\, \frac{1 - e^{-dx}}{1 + e^{-dx}}. \end{aligned}$$

S. 37, Z. 2 v. u.—38, Z. 10 v. o. (32, Z. 12—3 v. u.). Nach Gl. (35), S. 31 ist der Winkel ω' zwischen der Kurventangente und der Ordinate z (s. Fig. 23') durch:

$$\cot \omega' = \frac{dy}{dx} \cdot \sin F(y)$$

bestimmt, während nach S. 263, Z. 19 $\omega = \pi - \omega'$ ist, wenn man unendlich kleine Grössen erster Ordnung vernachlässigt. Nach Gl. (24), S. 27 ist ferner:

$$\begin{aligned} \cos F(z) &= \frac{\cos F(y)}{\sin F(dx)} - \sin F(y) . \cot \omega . \cot F(dx) \\ &= \frac{e^{dx} + e^{-dx}}{2} \cdot \cos F(y) + \\ &+ \sin^2 F(y) \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{e^{dx} - e^{-dx}}{2}, \\ &= \cos F(y) + \sin^2 F(y)\, dy \\ &= \cos F(y + dy) \\ &= \cos F(y'), \end{aligned}$$

wobei die unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung vernachlässigt sind.

Fig. 23'.

Der K. B. hat:

$$„\cot F(z) = \frac{e^{dx} + e^{-dx}}{2} \cdot \cos F(y) - \frac{e^{dx} - e^{-dx}}{2dx} \cdot dy \,.\, \sin^2 F(y)$$

bestimmt, folglich ist: $z = y$."

S. 38, Z. 15 f. (33, Z. 2 f.). Setzt man: $\cos F(x) = u$, so wird: $\sin^2 F(x) \,.\, dx = du$, also:

$$\begin{aligned} ds &= \frac{du}{1 - u^2} \sqrt{\frac{1 - u^2}{\sin^2 F(r)} - 1} \\ &= \frac{du}{\sin F(r) \sqrt{\cos^2 F(r) - u^2}} - \frac{\sin F(r)\, du}{(1 - u^2) \sqrt{\cos^2 F(r) - u^2}}. \end{aligned}$$

Das zweite Differential aber verwandelt sich bei der Substitution:

$$u \sqrt{1 + v^2} = v,$$

das heisst: $v = \cot F(x)$, in:

$$-\frac{\sin F(r)\,dv}{\sqrt{(1+v^2)\cos^2 F(r)-v^2}}=-\frac{\operatorname{tg} F(r)\,dv}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 F(r)\,.\,v^2}}.$$

Integrirt wird von $x = 0$ an, wo $F(x) = \frac{1}{2}\pi$ wird.

S. 38, Z. 14 v. u.—39, Z. 3 v. o. (33, Z. 4—18). Nach 14 II, III ist in Fig. 24':

$$\sin\psi = \frac{\operatorname{tg} F(r)}{\operatorname{tg} F(x)}, \quad \cos\varphi = \frac{\cos F(x)}{\cos F(r)},$$

und nach § 25 ist der Flächeninhalt des Dreiecks OAB gleich

$$\tfrac{1}{2}\pi - \varphi - \psi.$$

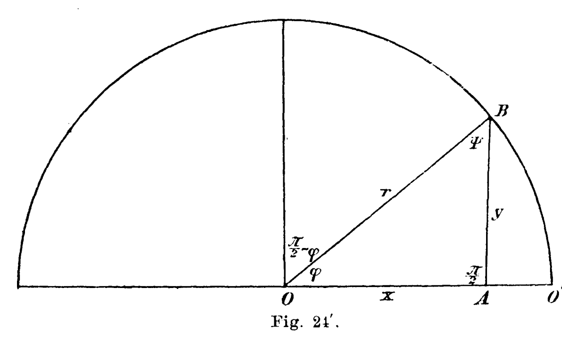


Fig. 24'.

Werden die x nicht mehr von O aus nach rechts, sondern von O' aus nach links gerechnet, so muss man $r - x$ an die Stelle von x setzen und den so entstehenden Ausdruck von dem Viertelkreise:

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sin F(r)} - 1\right)$$

abziehen, um den Kreisabschnitt zu erhalten. Da überdies nach S. 27 die Gleichung des Kreises jetzt folgendermassen lautet:

$$\sin F(r-x)\,.\,\sin F(y) = \sin F(r),$$

so wird:

$$\sqrt{1-\frac{\cos^2 F(r-x)}{\cos^2 F(r)}} = \frac{\operatorname{tg} F(r)}{\operatorname{tg} F(y)},$$

$$\sqrt{1-\frac{\cot^2 F(r-x)}{\cot^2 F(r)}} = \frac{\cos F(y)}{\cos F(r)}.$$

Für $r = \infty$ wird schliesslich $F(r) = 0$, also:

$$\lim_{r=\infty} \frac{1}{\sin F(r)} \cdot \arcsin\frac{\operatorname{tg} F(r)}{\operatorname{tg} F(y)} = \cot F(y).$$

S. 38, Z. 1 v. u. (33, Z. 15) hat der K. B. $\cos F(x)$ statt: $\cos F(y)$.

S. 39, Z. 4—6 (33, Z. 8, 7 v. u.). Aus $\sin F(y) = e^{-x}$ (s. S. 27, Gl. (27)) und aus S. 263, (V) folgt ja: $dx = \cos F(y)\,.\,dy$, also wird:

$$ds = \frac{\cos^2 F(y)\,dy}{\sin F(y)} = \frac{dy}{\sin F(y)} - \sin F(y)\,dy$$
$$= d\,(\cot F(y)) + dF(y).$$

S. 39, Z. 6—12 (33, Z. 7—2 v. u.). Denkt man sich in Fig. 24' den Punkt O' fest und lässt O auf der Geraden $O'O$ ins Unendliche rücken, so geht der Punkt B, dessen Ordinate y ist, in einen bestimmten Punkt des Gränzkreises durch O' über, der $O'O$ zur Axe hat; φ wird dabei $= 0$, $\psi = F(y)$, also der Flächenraum des Dreiecks BAO gleich $\frac{1}{2}\pi - F(y)$. Man kann aber auch so verfahren: In Fig. 25' sei BB' parallel AA', dann ist nach Gl. (19), S. 25:

$$\cos F(z) = e^{-u}\,.\,\cos F(y)$$

und demnach der von AB und von den beiden Parallelen AA' und BB' begränzte Flächenraum gleich:

$$\int\limits_0^\infty \cot F(z)\,.\,du = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-u}\,.\,\cos F(y)}{\sqrt{1-e^{-2u}\,.\,\cos^2 F(y)}}\cdot du$$

$$= \Big[\arccos\,(e^{-u}\,.\,\cos F(y))\Big]_0^\infty$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi - F(y).$$

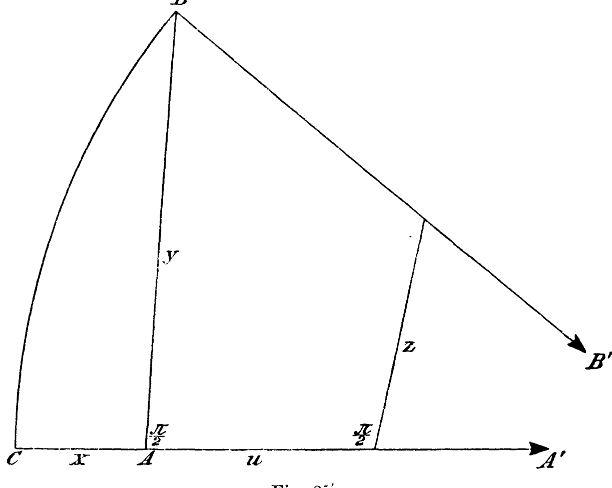


Fig. 25'.

Ist überdies CB ein Gränzkreis mit der Axe CA', so ist der Flächenraum CAB nach dem Früheren $= \cot F(y) - \frac{1}{2}\pi + F(y)$.

S. 39, Z. 12 (33, Z. 2 v. u.) hat der K. B. (39) statt (29).

S. 39, Z. 16 (34, Z. 3). Diese Gleichung trägt im K. B. die Nummer (39).

S. 39, Z. 20—24 (34, Z. 7—9). Der K. B. hat (26) statt (36). Eine solche Ableitung der Gleichung (36) findet sich in § 117 der N. A., hier S. 189 f. Die Gleichung (39a) wird ganz ähnlich abgeleitet. Man denke sich zu diesem Zwecke (Fig. 26', S. 274) zwischen zwei parallelen Geraden als gemeinsamen Axen eine unendliche Reihe von Gränzkreisbögen derart, dass je zwei aufeinanderfolgende wie in Fig. 19', S. 265 auf den Axen die gleichen Stücke t abschneiden. Der erste und grösste dieser Gränzkreisbögen sei gleich s, die folgenden also der Reihe nach gleich: $s\,.\,e^{-t}$, $s\,.\,e^{-2t}, \ldots$. Ist dann S der Inhalt des Flächenstücks zwischen den beiden ersten Gränzkreisbögen und den beiden Axen, so ist S augenscheinlich dem s proportional, und die übrigen Flächenstücke, die von den beiden Axen und von je zwei aufeinanderfolgenden Gränzkreisbögen begränzt werden, sind daher der Reihe nach gleich: $S\,.\,e^{-t}$, $S\,.\,e^{-2t}, \ldots$. Die Summe aller dieser Flächenstücke:

$$S\,.\,(1 + e^{-t} + e^{-2t} + \cdots) = \frac{S}{1-e^{-t}}$$

ist der Inhalt des Flächenraums zwischen dem Bogen s und den beiden Axen; da aber dieser Inhalt nicht mehr von t abhängen kann, so ist nothwendig:

$$S = c \,.\, s(1 - e^{-t}).$$

Hier ist c eine Konstante, die von der Wahl der Flächeneinheit abhängt und die gleich 1 wird, wenn man den vom Bogen 1 und von zwei parallelen Axen begränzten Flächenraum zur Flächeneinheit wählt.

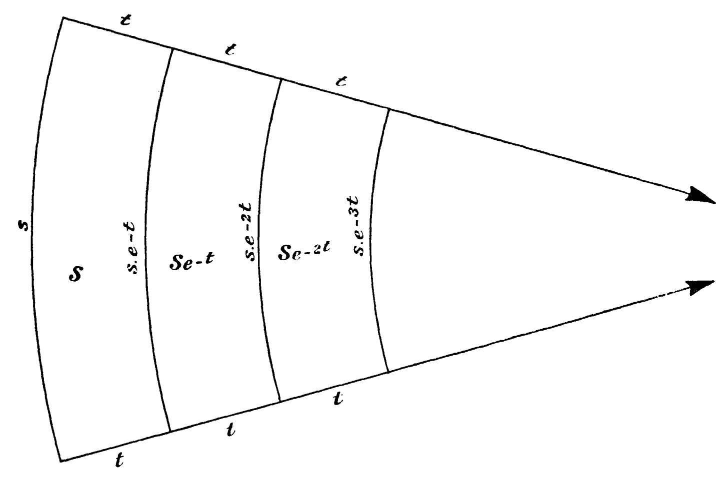


Fig. 26′.

Man findet diese Betrachtungen in der P. G. R. und F., G. A. I, S. 494 und II, S. 622. Uebrigens wendet sie Lobatschefskij schon bald nachher, in § 37, S. 46 f. (S. 40 f.), ganz in derselben Weise auf die Berechnung von Rauminhalten an.

S. 39, Z. 3 v. u.—40, Z. 4 (34, Z. 10—15). Aus Fig. 27′ liest man die Gleichung:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\pi - F(\tfrac{1}{2}r)$$

unmittelbar ab. Nach S. 244, (II) ist nun:

$$\sin F(r) = \frac{\sin^2 F(\frac{1}{2}r)}{1 + \cos^2 F(\frac{1}{2}r)} = \frac{\cos^2\varphi}{1 + \sin^2\varphi},$$

also:

$$\frac{d\varphi}{\sin F(r)} = \frac{2\,d\varphi}{\cos^2\varphi} - d\varphi.$$

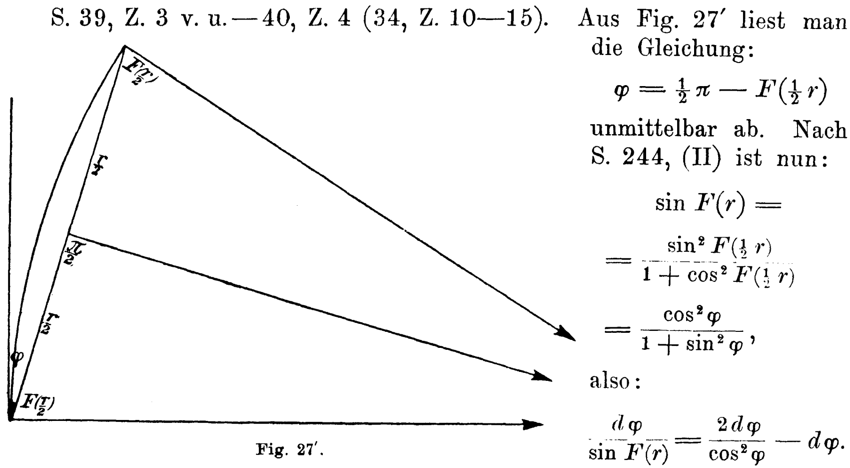


Fig. 27′.

S. 40, Z. 9—16 (34, Z. 11—7 v. u.). Der Flächenraum, der zwischen der x-Axe, der y-Axe und der durch den Endpunkt von x gezogenen Parallelen zur y-Axe liegt, ist nach S. 273 gleich $\frac{1}{2}\pi - F(x)$, woraus der

Werth: $-dF(x)$ für den im Texte beschriebenen unendlich schmalen Flächenraum folgt. Als Gränze dieses letzteren kann man sich statt der x-Axe auch einen unendlich kleinen Gränzkreisbogen denken, der von dem Endpunkte von x ausgeht und die von x und $x+dx$ aus gezogenen Parallelen zu Axen hat. Nach S. 39, Z. 9—12 ist dann: $-dF(x)$ zugleich die Länge dieses Gränzkreisbogens. Denkt man sich ferner das unendlich kleine Kurvenstück, das zwischen jenen beiden Parallelen liegt und von dem das Flächenelement ds begränzt wird, ebenfalls durch einen unendlich kleinen Gränzkreisbogen ersetzt, der die Parallelen zu Axen hat, so hat dieser Gränzkreisbogen nach Gl. (36), S. 33 die Länge: $-e^{-u}.dF(x)$, und durch denselben Ausdruck wird das zwischen ihm und den beiden Parallelen liegende Flächenstück dargestellt. Hiernach ergiebt sich der Werth von ds unmittelbar.

S. 40, Z. 15 (34, Z. 8 v. u.). Der K. B. hat hier: „Formel (37)“.

S. 40, Fig. 17. Es erschien zweckmässig diese Figur so zu stellen wie hier, während sie allerdings im K. B. und auf der von Lobatschefskij eigenhändig gezeichneten Figurentafel des A. P. umgekehrt steht, also die x-Axe oben und das $F(x)$ verkehrt.

S. 40, Z. 9, 8 v. u. (35, Z. 2, 3). Der K. B. hat: $e^{-u'}$ statt $e^{u'}$ und: Fig. 11 statt 17.

S. 40, Z. 2 v. u.—41, Z. 6 (35, Z. 7—13). In Fig. 28′ sei AA' parallel OO', dann liefert Gl. 17 II, S. 21 auf das Dreieck OAB angewendet die erste Gleichung des Textes und ebenso erhält man für das Dreieck OAC die Gleichung:

$$-\cos^2 F(x)\,.\cos F(u') + \frac{\sin F(u')\,.\sin F(x)}{\sin F(r)} = 1,$$

die übrigens aus der Gleichung für u entsteht, wenn man u durch $-u'$ ersetzt. Die Gleichung für u lässt sich nun nach S. 243, (I) schreiben:

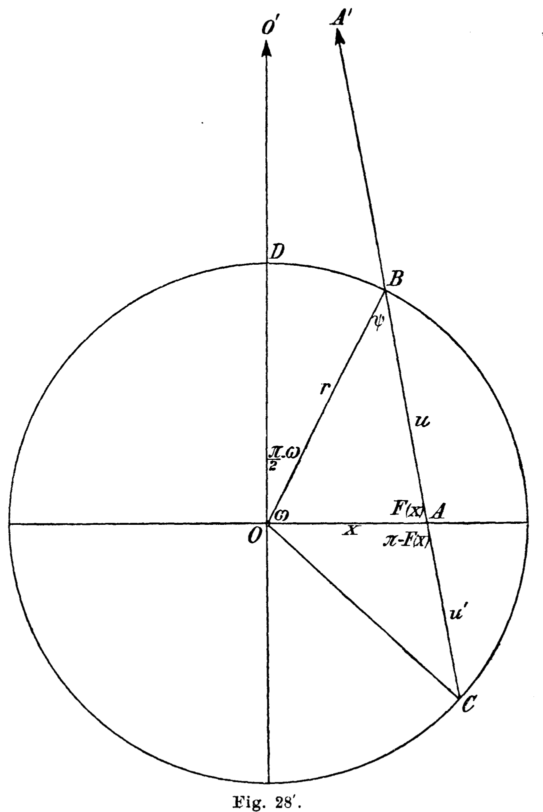


Fig. 28′.

$$e^{2u}\,.\sin^2 F(x) - 2e^u \frac{\sin F(x)}{\sin F(r)} = -1 - \cos^2 F(x),$$

und es ergiebt sich für e^u der Werth des Textes, wo der Quadratwurzel das Pluszeichen ertheilt ist, weil sich für $x=0$ ergeben muss: $u=r$, also:

$$e^u = \cot \tfrac{1}{2} F(r) = \frac{1 + \cos F(r)}{\sin F(r)}.$$

Dagegen wird:

$$e^{-u'} . \sin F(x) = \frac{1 - \sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) \cos^2 F(x)}}{\sin F(r)},$$

weil für $x = 0$ auch $u' = r$ wird, und dieser Ausdruck lässt sich leicht auf die Gestalt des Textes bringen. Der K. B. hat irrthümlich:

$$e^{u'} = \frac{\sin F(x)}{\sin F(r)} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - \sin^2 F(x) \sin^2 F(r)}}{1 + \cos^2 F(x)}.$$

S. 41, Z. 7—10 (35, Z. 14—17). Es ist:

$$\int_0^x e^{-u} . \sin F(x) . dx = \int_0^x \frac{\sin F(r) . \sin^2 F(x) . dx}{1 + \sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) . \cos^2 F(x)}},$$

oder, wenn $\cos F(x) = \vartheta = \sin \varphi$ gesetzt wird:

$$= \int_0^\vartheta \frac{\sin F(r) . d\vartheta}{1 + \sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) . \vartheta^2}}$$

$$= \frac{1}{\sin F(r)} \left\{ \int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{1 + \vartheta^2} - \int_0^\vartheta \frac{\sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) . \vartheta^2}}{1 + \vartheta^2} . d\vartheta \right\}.$$

Hier ist das zweite Integral in der Klammer gleich:

$$\int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{(1 + \vartheta^2) \sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) . \vartheta^2}} - \sin F(r) \int_0^\vartheta \frac{\operatorname{tg} F(r) . d\vartheta}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 F(r) . \vartheta^2}},$$

und von diesen beiden Integralen verwandelt sich das erste bei der Substitution:

$$\frac{\sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) . \vartheta^2}}{\vartheta} = \omega = \frac{\sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) . \sin^2 \varphi}}{\sin \varphi}$$

in:

$$-\int_\infty^\omega \frac{d\omega}{1 + \omega^2} = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) . \sin^2 \varphi}}{\sin \varphi}.$$

In dem Ausdrucke des K. B. für s fehlt das Glied:

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sin F(r)}.$$

S. 41, Z. 10—12 (35, Z. 10, 9 v. u.). Der eben gefundene Flächenraum s ist gleich der Summe aus dem Dreiecke OAB und dem Kreisausschnitte OBD (Fig. 28'). In dem Dreiecke ist nach Gl. 171, S. 21:

$$\operatorname{tg} F(x) . \sin \psi = \operatorname{tg} F(r) . \sin F(x) = \operatorname{tg} F(u) . \sin \omega,$$

also:

$$\sin\psi = \operatorname{tg} F(r) \,.\, \cos F(x)$$

$$\sin\omega = \frac{\sin F(x) \,.\, \operatorname{tg} F(r)}{\operatorname{tg} F(u)} = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \cdot \sin F(x) \,.\, \operatorname{tg} F(r)$$

$$= \frac{\cos^2 F(x) + \sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) \,.\, \cos^2 F(x)}}{\cos F(r) \,.\, (1 + \cos^2 F(x))}$$

oder:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\cos^2 F(x) + \sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) \,.\, \cos^2 F(x)}}{\cos F(x) \,.\, \left\{1 - \sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) \cos^2 F(x)}\right\}},$$

da ja ω für positives x nothwendig spitz ist. Hieraus ergiebt sich:

$$\omega = \operatorname{arctg}\,(\cos F(x)) + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) \,.\, \cos^2 F(x)}}{\cos F(x)}.$$

Der Inhalt des Dreiecks ist nun:

$$\pi - F(x) - \psi - \omega,$$

und der des Kreisausschnittes (s. Gl. (38), S. 37):

$$(\tfrac{1}{2}\pi - \omega)\left(\frac{1}{\sin F(r)} - 1\right),$$

also der ganze Inhalt

$$s = \tfrac{1}{2}\pi - F(x) - \psi + \\ + \frac{1}{\sin F(r)}\,(\tfrac{1}{2}\pi - \omega),$$

was mit dem vorhin abgeleiteten Werthe übereinstimmt.

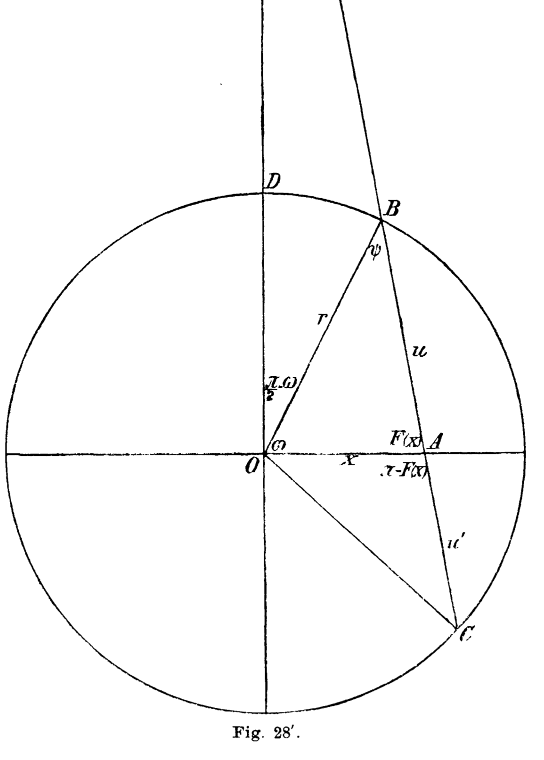


Fig. 28'.

S. 41, Z. 5 v. u.—42, Z. 2 (36, Z. 5—8). Die Quadrate der Abstände zwischen den drei Punkten:

$$x,\ y,\ z \quad x + dx,\ y,\ z$$
$$x + dx,\quad y + dy,\ z$$

haben für $z = 0$ die Werthe:

$$\frac{dx^2}{\sin^2 Y},\quad \frac{dx^2}{\sin^2 Y} + dy^2,\quad dy^2$$

(s. S. 31, Gl. (34) und S. 263, Gl. (VI)). Ist $z \neq 0$, so müssen diese Werthe noch durch $\sin^2 Z$ dividirt werden. Ganz ähnlich erhält man hieraus die Ausdrücke des Textes.

S. 42, Z. 3—6 (36, Z. 9—11). Setzt man die im Texte angegebenen Abstandsquadrate der Reihe nach gleich:

$$b^2 = \beta \,.\, dy^2,\quad a^2 = \alpha \,.\, dx^2,\quad c^2 = \alpha \,.\, dx^2 + \beta \,.\, dy^2 - 2\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) dx \,.\, dy,$$

so erhält man für den Inhalt des unendlich kleinen Dreiecks, der auf Grund von § 26 nach den Regeln der Euklidischen Geometrie zu berechnen ist:

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)} = \frac{dx.dy}{2}\sqrt{\alpha.\beta-\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

S. 42, Z. 14 (S. 36, Z. 6 v. u.). Diese merkwürdige Schreibweise für eine Gleichung, die man sonst durch ein Doppelintegral ausdrückt, erscheint nicht gerade empfehlenswerth.

S. 42, Z. 10 v. u. (36, Z. 1 v. u.). Im K. B. lautet die Formel:

$$\left(\frac{d^2S}{dX\,dY}\right) = \frac{1}{\sin R}\sqrt{\frac{\cos^2 X}{\cos^2 Z}+\frac{\cot^2 Y}{\cos^2 Z}+\frac{1}{\sin^2 Y.\sin^2 Z}},$$

wofür in den G. A. höchst überflüssiger Weise die Formel des Textes gesetzt ist. Beide Formeln sind allerdings gleichbedeutend, weil:

$$dX = -\sin X.dx, \quad dY = -\sin Y.dy.$$

S. 42, Z. 7—1 v. u. (37, Z. 3—7). Mit 4 dY wird multiplicirt, weil längs der x-Axe vier Oktanten zusammenstossen. Die unbestimmte Integration ergiebt:

$$\int\frac{\sin^2 X.\sin Y.dY}{\sqrt{\sin^2 X.\sin^2 Y-\sin^2 R}} = -\sin X.\arcsin\frac{\sin X\cos Y}{\sqrt{\sin^2 X-\sin^2 R}},$$

wozu noch die Integrationskonstante kommt. Man beachte, dass bei den Integrationen nach Y und nach X jedesmal $\frac{1}{2}\pi$ als obere Gränze genommen wird, also die Werthe, die den Werthen: $y=0$ und $x=0$ entsprechen.

S. 43, Z. 6—9 (37, Z. 13—16). Nach S. 244, (II) ist nämlich:

$$\cos R-\cos F(r-x) = \frac{\cos X\sin^2 R}{1-\cos X.\cos R},$$

S. 43, Z. 14—17 (37, Z. 4—1 v. u.). In § 33 war zuerst nach Y und dann nach X integrirt worden. Integrirt man zuerst nach X, so stösst man augenscheinlich auf ein elliptisches Integral. Das Verfahren, das Lobatschefskij hier einschlägt, hat keinen andern Zweck als den, das Doppelintegral auf ein solches zurückzuführen, bei dem die Integrationsordnung gleichgültig ist.

Es handelt sich um das Integral:

$$\iint\frac{\cos R}{\sin^2 R}\cdot\frac{\sin Y.\sin^2 X.dX.dY}{\sqrt{\sin^2 X.\sin^2 Y-\sin^2 R}}$$

oder:

$$\iint\frac{\cos R}{\sin^2 R}\cdot\frac{\sin^2 X.dX.dY}{\sqrt{\cos^2 R-\cos^2 X-\sin^2 R.\cot^2 Y}}.$$

Man setze:

$$\sin R.\cot Y = \cos R.\cos\psi$$

also:

$$dY = \cot R.\sin\psi.\sin^2 Y.d\psi,$$

dann erhält das Doppelintegral die Gestalt:

$$\iint\frac{\cos^2 R.\sin^2 X\,dX.\sin\psi.d\psi}{\sin^3 R(1+\cot^2 R\cos^2\psi)\sqrt{\cos^2 R.\sin^2\psi-\cos^2 X}} =$$

$$=\iint\frac{\cos^2 R}{\sin R}\cdot\frac{\sin\psi.\sin^2 X.dX.d\psi}{(1-\cos^2 R.\sin^2\psi)\sqrt{\cos^2 R.\sin^2\psi-\cos^2 X}}.$$

Setzt man ferner, was jetzt sehr nahe liegt:

$$\cos X = \cos R \,.\, \sin \psi \,.\, \sin \varphi,$$

so wird:

$$dX = -\frac{\cos R \,.\, \sin \psi \,.\, \cos \varphi \,.\, d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 R \,.\, \sin^2 \psi \,.\, \sin^2 \varphi}}$$

$$\frac{\sin^2 X \,.\, dX}{\sqrt{\cos^2 R \,.\, \sin^2 \psi - \cos^2 X}} = -\sqrt{1 - \cos^2 R \,.\, \sin^2 \psi \,.\, \sin^2 \varphi} \,.\, d\varphi.$$

Das dürfte ungefähr der Weg sein, auf dem Lobatschefskij zur Einführung von φ und ψ gekommen ist.

Uebrigens kann man φ und ψ auch geometrisch als gewisse Winkel deuten. Es sei (Fig. 29′) O der Mittelpunkt der Kugelfläche und A ein Punkt im Innern der Kugel, dessen Koordinaten x und y beide positiv sind, während $z = 0$ ist. Macht man dann $AC = r$, so ist in dem Dreiecke ABC nach 14II, III:

$$\cos \psi = \operatorname{tg} R \,.\, \cot Y,$$

$$\cos F(x + l) = \cos R \,.\, \sin \psi,$$

und, wenn man $BD = x + l$ macht, so ist in dem Dreiecke BOD nach 14III:

$$\cos X = \cos F(x + l) \,.\, \sin \varphi.$$

Da sich x und y von Null bis r ändern können, so können ψ und φ augenscheinlich alle Werthe zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ annehmen. Insbesondere wird für $Y = \frac{1}{2}\pi$: $\psi = \frac{1}{2}\pi$ und für $X = \frac{1}{2}\pi$: $\varphi = 0$.

Fig. 29′.

S. 43, Z. 10—7 v. u. (38, Z. 1—3). Mit $8\, d\psi \,.\, d\varphi$ wird multiplicirt wegen der acht Kugeloktanten. Das Minuszeichen fällt weg, weil sich für $X = \frac{1}{2}\pi$ ergiebt: $\varphi = 0$ und weil also nach φ eigentlich von $\frac{1}{2}\pi$ bis 0 zu integriren wäre.

S. 43, Z. 7—3 v. u. (38, Z. 4—7). Man setze in (46):

$$\cos R \,.\, \sin \psi = x, \quad \cos R = a,$$

also:

$$\sin \psi = \frac{x}{a}, \quad d\psi = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

S. 44, Z. 1—4 (38, Z. 10—13). Setzt man in der zweiten Gleichung: $x = \sin R \,.\, \sin \psi$ und erstreckt man die Integration nach ψ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, so ergiebt sich die erste. Die Beziehung:

$$xH(x) = \int_0^x \frac{E(x)\, dx}{1 - x^2}$$

selbst ist bewiesen, sobald die andre:

$$xH'(x) + H(x) = \frac{E(x)}{1 - x^2}$$

bewiesen ist. Nun aber wird:

$$H(x) + xH'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1 - x^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

also muss sein:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2x^2 \sin^2\varphi + x^4 \sin^4\varphi - 1 + x^2}{(1 - x^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \, d\varphi = 0,$$

das heisst:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi \,.\, d\varphi}{(1 - x^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi \,.\, d\varphi}{(1 - x^2 \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}.$$

In der That findet man für das letzte Integral:

$$-\left[\frac{\sin\varphi \cos\varphi}{(1 - x^2 \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi \, d\varphi}{(1 - x^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

S. 44, Z. 5—7 (38, Z. 6—4 v. u.). Man erhält zunächst:

$$\frac{\pi R}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R} \frac{dR \,.\, \cos R \,.\, \sin\psi \sqrt{1 - \sin^2 R \,.\, \sin^2\psi \,.\, \sin^2\varphi}}{1 - \sin^2 R \,.\, \sin^2\psi};$$

aber das Integral nach φ und R nimmt, wenn man: $\sin R \sin\psi = x$ setzt, die Form:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{x} \frac{dx \sqrt{1 - x^2 \sin^2\varphi}}{1 - x^2} = \sin R \,.\, \sin\psi \,.\, H(\sin R \sin\psi)$$

an, woraus die Formel des Textes unmittelbar folgt.

S. 44, Z. 8—10 (38, Z. 3—1 v. u.). Durch die Substitution:

$$\frac{\sin R \,.\, \sin\varphi \,.\, \cos\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 R \,.\, \sin^2\varphi}} = u$$

erhält man:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin R \,.\, \sin\psi \,.\, d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 R \,.\, \sin^2\varphi \,.\, \sin^2\psi}} = -\frac{1}{\sin\varphi} \int^{0} \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}}$$

$$= \frac{1}{\sin\varphi} \log\left(\frac{1 + \sin R \sin\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 R \sin^2\varphi}}\right).$$

S. 44, Z. 11 f. (39, Z. 1 f.). Dann wird nämlich:

$$d\varphi = -\sin\varphi \,.\, dx, \quad \sin F(x) = \frac{2e^x}{e^{2x}+1}$$

und für $\varphi = 0$: $x = \infty$, für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$: $x = 0$.

S. 44, Z. 13 f. (39, Z. 3 f.). Es ist nämlich, wie die Substitution: $e^{-x} = y$ sofort erkennen lässt:

$$\lim_{x=\infty} x \,.\, \log\left(\frac{1 + 2e^{-x} \,.\, \sin R + e^{-2x}}{1 - 2e^{-x} \,.\, \sin R + e^{-2x}}\right) = 0.$$

S. 44, Z. 1 v. u. (39, Z. 9). Man erhält ja für $\psi = \pi - \varphi$:

$$\int_0^\pi d\psi \,.\, \log\sin\tfrac{1}{2}\psi = -\int_\pi^0 d\varphi \,.\, \log\sin\tfrac{1}{2}(\pi - \varphi)$$

$$= \int_0^\pi d\psi \,.\, \log\cos\tfrac{1}{2}\psi.$$

S. 45, Z. 2 f. (39, Z. 11 f.). Der K. B. hat $d\varphi$ statt $d\psi$ und:

$$e^x = e^{-a} \,.\, \cot\tfrac{1}{2}\psi.$$

S. 45, Z. 9—5 v. u. (40, Z. 1—5). Nach S. 42, Gl. (44) wird:

$$\sin^2 Z\left(\frac{d^2S}{dx\,dy}\right)^2 = \frac{\cot^2 R \,.\, \sin^2 Y \,.\, \left(\frac{dR}{dx}\right)^2 + \cos^2 Y}{\sin^2 Y - \sin^2 R} + \frac{1}{\sin^2 R}$$

$$= \frac{\cos^2 R \,.\, \sin^2 Y}{(\sin^2 Y - \sin^2 R)\sin^2 R}\left(1 + \left(\frac{dR}{dx}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1 + \left(\frac{dR}{dx}\right)^2}{\sin^2 R(1 - \operatorname{tg}^2 R \,.\, \cot^2 Y)},$$

ausserdem erinnere man sich der Gleichungen:

$$dX = -\sin X \,.\, dx, \quad dY = -\sin Y \,.\, dy.$$

Bei der Integration ergiebt sich:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^R \frac{dY}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 R \,.\, \cot^2 Y}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^R \frac{\sin Y\, dY}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 Y}{\cos^2 R}}}$$

$$= -\cos R \,.\, \left[\arcsin\frac{\cos Y}{\cos R}\right]_{\frac{\pi}{2}}^R,$$

also wird:

$$\frac{dS}{dX} = -\frac{2\pi\cos R}{\sin X \,.\, \sin^2 R}\sqrt{1 + \left(\frac{dR}{dx}\right)^2},$$

Der K. B. hat: „Durch . . . und Integration von $Y = R$ bis $Y = \frac{1}{2}\pi$", was der Integration von $y = r$ bis $y = 0$ entsprechen würde.

S. 45, Z. 4 v. u. — 46, Z. 5 (40, Z. 6—13). Die Gleichungen des Textes zwischen X, A, L und R (s. Fig. 30′) erhält man durch Benutzung von S. 20, Gl. 14 V, III, II, ausserdem nehme man noch aus 14 I hinzu:

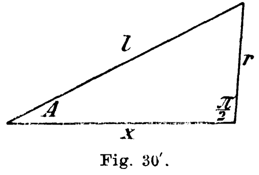


Fig. 30′.

$$\sin L = \sin X \,.\, \sin R.$$

und erinnere sich an: $dX = -\sin X \,.\, dx$.

S. 46, Z. 8 f. (40, Z. 16 f.). Hier wird:

$$\frac{dR}{dx} = -\operatorname{tg} R, \quad \frac{dS}{dx} = \frac{2\pi}{\sin^2 R} = 2\pi \,.\, e^{2x}.$$

S. 46, Z. 15, 14 v. u. (40, Z. 4, 3 v. u.). Weil nämlich auf der Gränzfläche die Euklidische Geometrie gilt, s. § 9, S. 12 (G. A. S. 10 f.).

S. 47, Z. 1—3 (41, Z. 9—11). Für $c = \infty$ wird dieser Ausdruck gleich $\frac{1}{2} S$, das ist also der Rauminhalt, der begränzt wird von einem Flächenstücke S einer Gränzkugel und von den sämmtlichen durch die Begränzung dieses Flächenstücks gehenden parallelen Axen dieser Gränzkugel.

S. 47, Z. 11—26 (41, Z. 17—5 v. u.). Es sei AB der Gränzbogen b mit den beiden parallelen Axen AA' und BB' (Fig. 31′). Auf der Ebene dieses Gränzbogens denke man sich in A und B die Lothe $AD = BC = a$ errichtet und von D und C aus die Parallelen DD' und CC' zu AA' gezogen, die nach § 8 auch zu BB' und unter einander parallel sind und also in einer Ebene liegen.

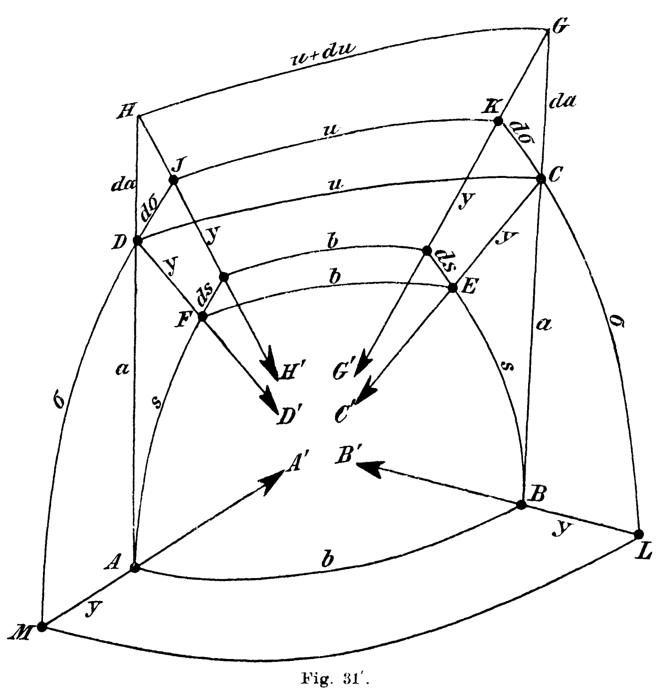


Fig. 31′.

Denkt man sich ferner durch den Bogen AB eine Gränzkugel mit den Axen AA', BB', CC', DD' gelegt, so wird diese die vier durch diese Axen bestimmten Ebenen in einem Gränzbogenvierecke $ABEF$ schneiden, und zwar wird $AF = BE = s$ sein und die Winkel $FAB = EBA = \frac{1}{2}\pi$, folglich nach § 9 auch $FE = AB = b$ und $\angle AFE = BEF = \frac{1}{2}\pi$. Das Gränzbogenviereck ist also ein Rechteck und das bedeutet nach § 9, dass die vier vorhin erwähnten Ebenen paarweise auf einander senkrecht stehen.

Da AD auf AA' und BC auf BB' senkrecht steht und da ausserdem

$AD = BC = a$, $AF = BE = s$ ist, so folgt: $DF = CE = y$, es giebt also in der Ebene $D'DCC'$ eine Gränzlinie, die DD' und CC' zu Axen hat und durch D und C geht. Es sei das der Gränzbogen $DC = u$. Denkt man sich jetzt b veränderlich, während a konstant bleibt, so bleiben s und y konstant, und es wird B den Gränzbogen BA und E den Gränzbogen EF durchlaufen. Die Gerade EC' bleibt parallel zu DD', bewegt sich also ebenso wie der Punkt E in der Ebene $D'DCC'$, und da überdies $CE = DF$ bleibt, so durchläuft der Punkt C den Gränzkreisbogen CD. Denkt man sich daher auf der Ebene $A'ABB'$ in allen Punkten des Gränzbogens AB Senkrechte von der Länge a errichtet, so liegen die Endpunkte dieser Senkrechten sämtlich auf dem Gränzbogen DC.

Der im Texte betrachtete Körperraum P ist nun begränzt von den vier Ebenen durch AA', BB', CC', DD' und von einer Cylinderfläche, die auf der Ebene $A'ABB'$ senkrecht steht und durch den Gränzbogen AB geht. Es ist klar, dass diese Cylinderfläche auch durch den Gränzbogen DC geht. Lässt man jetzt a um da wachsen, so wächst P um ein unendlich kleines Stück dP, das begränzt wird von den vier Ebenen durch DD', CC', GG', HH' und von der Fortsetzung jener Cylinderfläche. Unter Vernachlässigung einer unendlich kleinen Grösse zweiter Ordnung kann man aber das begränzende Cylinderflächenstück $DCGH$ ersetzen durch ein unendlich kleines Stück einer durch DC gelegten Gränzkugel, die auf den vier begränzenden Ebenen das Gränzbogenrechteck $DCKJ$ mit den Seiten: $DC = JK = u$, $DJ = CK = d\sigma$ ausschneidet. Nach S. 33, Gl. (36) ist aber $u = b \,.\, e^y$, $d\sigma = ds \,.\, e^y$, also wird der Flächeninhalt dieses Gränzbogenrechtecks gleich: $u \,.\, d\sigma = b \,.\, ds \,.\, e^{2y}$, und aus Gl. (49), in der jetzt $c = \infty$ zu setzen ist, ergiebt sich: $dP = \frac{1}{2} b \,.\, e^{2y} \,.\, ds$ wie im Texte.

S. 47, Z. 9, 8 v. u. (41, Z. 4, 3 v. u.). Es sei M der Punkt, in dem der durch D gehende Gränzbogen mit der Axe DD' die Axe AA' trifft und $DM = \sigma$, dann ist $AM = FD = y$ und nach Gl. (29), (30) und (36):

$$\sigma = \cot F(a), \quad s = \cos F(a),$$

$$\sigma = s \,.\, e^y,$$

demnach wird wie im Texte:

$$\sin F(a) = e^{-y}.$$

S. 47, Z. 5—1 v. u. (42, Z. 1—4). In der That ist nach S. 39, Z. 9—12 der Flächenraum zwischen dem Gränzbogen $AB = b$ und den beiden Axen AA' und BB' gleich b. Ist andrerseits in Fig. 32′ ds ein unendlich kleines Bogenstück einer durch B gehenden Gränzlinie mit den parallelen Axen AA', BB', CC' und ist die Gerade CBA senkrecht zu AA', so unterscheidet sich der unendlich kleine Flächenraum zwischen ds und den beiden Parallelen BB' und DC' nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung

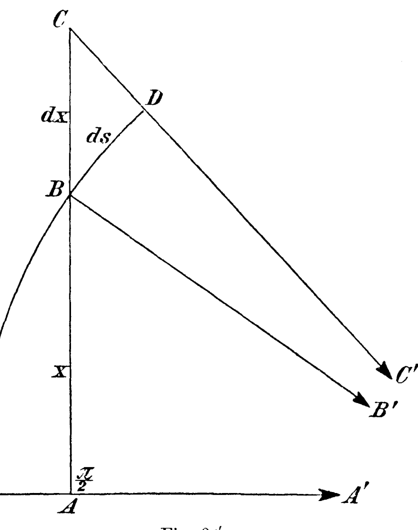


Fig. 32′.

von dem Flächenraume zwischen dx und den beiden Parallelen BB' und CC'. Nun aber ist der Flächenraum zwischen AA', AB und BB' nach S. 39, Z. 6—9 gleich $\frac{1}{2}\pi - F(x)$, also wird der vorhin beschriebene unendlich kleine Flächenraum gleich: $-dF(x)$.

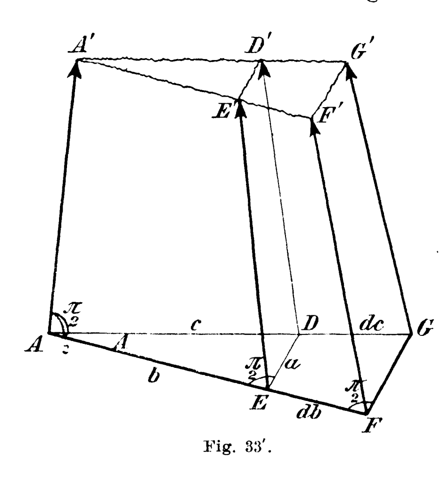


Fig. 33'.

S. 48, Z. 2—11 (42, Z. 5—12). In Fig. 33' sei AA' senkrecht zu der Ebene FAG, ferner seien DE und GF senkrecht zu AF, und EE', DD', FF', GG' seien parallel zu AA', also die Winkel $E'ED$ und $F'FG$ Rechte. Das dP des Textes ist die Pyramide mit der Grundfläche $EFGD$ und den parallelen Kanten EE', FF', GG', DD'. Nach § 38 ist der Rauminhalt dieser Pyramide unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung gleich $\frac{1}{2}a$ multiplicirt mit dem sich ins Unendliche erstreckenden Flächenraume $E'EFF'$, der seinerseits gleich: $-dF(b)$ ist.

S. 48, Z. 12—15 (42, Z. 13—16). Nach S. 20, Gl. 14V ist:

$$\cot F(b) = \cot A \,.\, \cos F(a) = \cot A \cdot \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}},$$

also:

$$e^{2a} = \frac{1 + \operatorname{tg} A \,.\, \cot B}{1 - \operatorname{tg} A \,.\, \cot B} = \frac{\sin (B + A)}{\sin (B - A)}.$$

S. 48, Z. 16—26 (42, Z. 17—26). Der Ausdruck:

$$\left[\frac{2\pi}{A}\, dP\right]_{A=0} = -\pi \,.\, dB \,.\, \cot B = \pi \,.\, db \,.\, \cos F(b)$$

ist der Raum, der entsteht, wenn das unendlich kleine Flächenstück $E'EFF'$ eine volle Umdrehung um AA' als Axe beschreibt (s. Gl. (54)). Demnach ist:

$$\int_0^b \pi\, db \cos F(b) = -\pi \,.\, \log \sin F(b)$$

der Rauminhalt des im Texte beschriebenen Kegels.

Versteht man jetzt unter P wieder den Inhalt der Pyramide mit der Grundfläche AED und den parallelen Kanten AA', EE', DD', und lässt man den Winkel A um dA wachsen, so wächst P um ein Stück dP, das sich auffassen lässt als ein Stück eines Kegels, dessen Grundkreis den Halbmesser $AD = c$ besitzt und dessen Erzeugende zu AA' parallel sind. Aus der Formel (53) für den Rauminhalt dieses Kegels ergiebt sich für die Pyramide P die später mehrfach benutzte Gleichung:

$$\frac{dP}{dA} = -\tfrac{1}{2} \log \sin F(c),$$

in der man c durch A und b ausdrücken und dann b als konstant betrachten muss.

Es ist ein Mangel, dass Lobatschefskij hier den Buchstaben A für einen Winkel benutzt, der nicht gleich $F(a)$ ist, während $B = F(b)$ ist. Dieselbe Bemerkung ist bei § 40 und 41 zu machen. Von § 43 an werden dagegen die Winkel stets mit griechischen Buchstaben bezeichnet. — Im K. B. fehlt bei Gleichung (53) das zweite π.

S. 49, Z. 8—14 (43, Z. 7—13). Die zu EE' parallele Gerade BB' (Fig. 34′) hat nach S. 25, Gl. (19) die Gleichung:

$$\cos F(y) = e^x \,.\, \cos F(l),$$

weil hier x nach der Seite des Parallelismus hin negativ gerechnet wird. Auf $FJ = y + dy$ schneidet BB' das Stück $FH = y + \delta y$ ab, wo δy durch:

$$\sin^2 F(y) \cdot \frac{\delta y}{dx} = e^x \,.\, \cos F(l)$$
$$= \cos F(y)$$

bestimmt ist. Demnach ist δy gerade der Ausdruck, in den das dy des Textes für $x = \infty$ übergeht. Dasselbe folgt auch daraus, dass die Gleichung des Textes für dy von A frei ist und also auch für $A = 0$, das heisst für $x = \infty$ anwendbar bleibt. Man findet jetzt sofort:

$$dy - \delta y = \frac{2\,dx \,.\, \sin^2 \tfrac{1}{2} X \,.\, \cos Y}{\cos X \,.\, \sin^2 Y}.$$

S. 49, Z. 14—18 (43, Z. 13—16). Die Kegelschale, die durch Drehung des Flächenraums $B'HJJ'$ um die Axe FE' entsteht, hat nach Gl. (54) den Inhalt:

$$\pi\,(dy - \delta y) \cos F(y) =$$
$$= \frac{2\pi \,.\, dx \,.\, \sin^2 \tfrac{1}{2} X \,.\, \cos^2 Y}{\cos X \,.\, \sin^2 Y}.$$

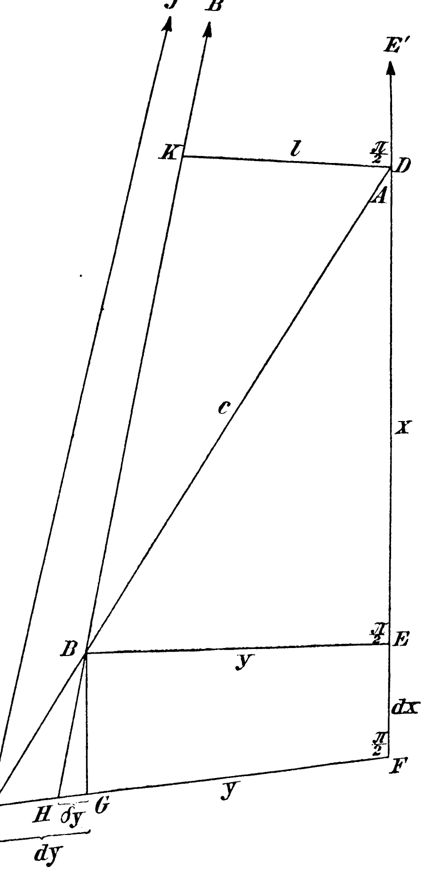
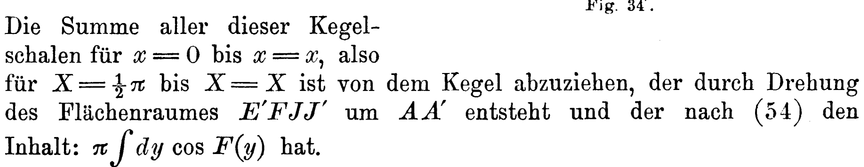


Fig. 34′.


Die Summe aller dieser Kegelschalen für $x = 0$ bis $x = x$, also für $X = \tfrac{1}{2}\pi$ bis $X = X$ ist von dem Kegel abzuziehen, der durch Drehung des Flächenraumes $E'FJJ'$ um AA' entsteht und der nach (54) den Inhalt: $\pi \int dy \cos F(y)$ hat.

S. 49, Z. 10 v. u. (43, Z. 9 v. u.). $\sin X \,.\, \sin Y = \sin C$ nach S. 20, Gl. 14 I.

S. 49, Z. 6 v. u. (43, Z. 6 v. u.). Aus: $\cos X = \cos A \,.\, \cos C$ und aus (55) ergiebt sich bei konstantem c:

$$\sin^2 X \cdot \left(\frac{dx}{dA}\right)_{dc=0} = -\sin A \cdot \cos C$$

$$\left(\frac{dP}{dA}\right)_{dc=0} = \pi \left\{ -c \sin A + \frac{\sin A \cdot \cos C}{1 - \cos^2 A \cdot \cos^2 C} \right\}.$$

Andrerseits ist bei konstantem A (s. S. 49, Z. 14 v. u., 4 v. o.):

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)_{dA=0} = \pi \cdot \cot^2 Y = \pi \cdot \sin^2 A \cdot \cot^2 C.$$

Sind P und Π die Inhalte der Körper, die durch Drehung des Dreiecks DFE und des Kreisausschnittes DFK (Fig. 35′) um die Axe KD entstehen, so ist, wie ein Blick auf die Figur zeigt, bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung:

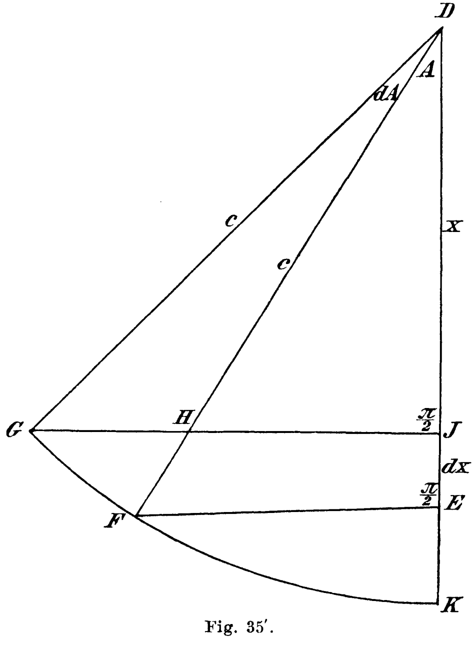


Fig. 35′.

$$\left(\frac{d\Pi}{dA}\right)_{dc=0} dA = \left(\frac{dP}{dA}\right)_{dc=0} dA - \left(\frac{dP}{dx}\right)_{dA=0} \cdot \left(\frac{dx}{dA}\right)_{dc=0} \cdot dA,$$

wo das zweite Glied das Minuszeichen hat, weil $DE = x$ mit wachsendem A abnimmt. Demnach ergiebt sich:

$$\left(\frac{d\Pi}{dA}\right)_{dc=0} = \pi \left\{ -c \sin A + \frac{\sin A \cdot \cos C}{1 - \cos^2 A \cdot \cos^2 C} + \frac{\sin^2 A \cdot \cot^2 C \cdot \sin A \cdot \cos C}{1 - \cos^2 A \cdot \cos^2 C} \right\}$$

$$= \pi \left\{ -c \sin A + \frac{\sin A \cdot \cos C}{\sin^2 C} \right\}$$

und hieraus:

$$\Pi = \pi \left(\frac{\cos C}{\sin^2 C} - c\right)(1 - \cos A).$$

Für $A = \frac{1}{2}\pi$ wird Π gleich der halben Kugel (vgl. S. 50, Gl. (56)):

$$\pi \left(\frac{\cos C}{\sin^2 C} - c\right) = \frac{\pi}{4}\left(e^{2c} - e^{-2c} - 4c\right).$$

S. 49, Z. 5 v. u.—50, Z. 2 (43, Z. 5 v. u.—44, Z. 2). Es ist:

$$\cos A \cdot \cos C = \cos X$$

oder:

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \cos A \, \frac{e^{2c} - 1}{e^{2c} + 1}$$

$$e^{2x} = \frac{2 + (1 + \cos A)(e^{2c} - 1)}{2 + (1 - \cos A)(e^{2c} - 1)},$$

also bis zur dritten Potenz von c genau:

$$x = \tfrac{1}{2}\cos A\left\{2c + \frac{4c^2}{1.2} + \frac{8c^3}{1.2.3} - \tfrac{1}{2}(4c^2 + 8c^3) + \tfrac{1}{3}\,8c^3 \cdot \frac{3 + \cos^2 A}{4}\right\}.$$

S. 50, Z. 6—9 (44, Z. 6—8). Nach S. 243, (I) ist:

$$\cot Y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = y + \frac{y^3}{3!} + \cdots,$$

woraus hervorgeht, warum im Texte nach Potenzen von $\cot Y$ entwickelt werden kann. Die erste Gleichung des Textes folgt sofort aus der Gl. S. 49, Z. 4: $\sin A = \operatorname{tg} C \,.\, \cot Y$; sodann ergiebt sich:

$$e^{2x} = \frac{1 + \cos C - \frac{1}{2}\sin C \,.\, \operatorname{tg} C \,.\, \cot^2 Y}{1 - \cos C + \frac{1}{2}\sin C \,.\, \operatorname{tg} C \,.\, \cot^2 Y}$$

$$= \cot^2 \tfrac{1}{2} C\left\{1 - \tfrac{1}{2}\sin C \,.\, \operatorname{tg} C \,.\, \cot^2 Y \cdot \frac{2}{\sin^2 C}\right\}$$

$$= e^{2c}\left\{1 - \frac{\cot^2 Y}{\cos C}\right\}.$$

S. 50, Z. 10—14 (44, Z. 9—12). Die Grundfläche des Kegels hat nach S. 37, Gl. (38) den Werth: $4\pi \,.\, \cot^2 F(\frac{1}{2}y)$, wofür, wegen der Kleinheit von y hier: $\pi \,.\, \cot^2 F(y)$ gesetzt werden kann. Ferner ist die Kugeloberfläche nach S. 43, Gl. (45):

$$\pi(e^c - e^{-c})^2 = 4\pi \cot^2 C,$$

demnach wird der Kugelinhalt gleich:

$$\left[\frac{\pi\left(c - \frac{1}{2}c \,.\, \operatorname{tg}^2 C \,.\, \cot^2 Y - c + \dfrac{\cot^2 Y}{2\cos C}\right)}{\pi \,.\, \cot^2 Y}\right]_{y=0} \cdot 4\pi \,.\, \cot^2 C,$$

das heisst, gleich:

$$2\pi\left(\frac{\cot C}{\sin C} - c\right),$$

was mit dem Werthe des Textes übereinstimmt.

S. 50, Z. 15—7 v. u. (44, Z. 16—10 v. u.). Man vgl. Fig. 36′. Die Gleichung der zu AA' parallelen Geraden BB' lautet hier (s. S. 25, Gl. (19)):

$$\cos F(y) = e^{-x} \,.\, \cos F(l),$$

wenn also x um dx wächst, so wächst y um:

$$\delta y = -\frac{\cos F(y)}{\sin^2 F(y)}\, dx$$

und das Stück, das BB' auf der Ordinate $y + dy$ abschneidet wird gleich: $dy - \delta y$.

S. 51, Z. 10 (45, Z. 5). Der K. B. hat $\sin X$ statt: $\cos X$.

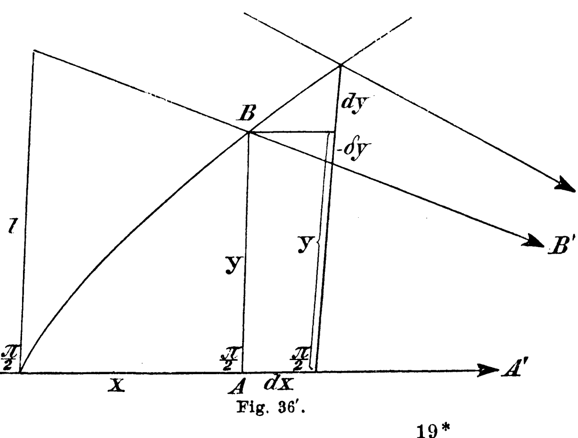


Fig. 36′.

S. 51, Z. 13—16 (45, Z. 7—9). Der Ausdruck des Textes ist auf S. 286, Z. 5ff. abgeleitet. Man erhält ihn übrigens noch einfacher, wenn man bedenkt, dass die sphärische Geometrie von dem Euklidischen Parallelenaxiome unabhängig ist und dass also der hier betrachtete kegelförmige Kugelausschnitt zur ganzen Kugel stets in demselben Verhältnisse steht, mag nun die Lobatschefskijsche Geometrie gelten oder die Euklidische.

S. 51, Z. 17—20 (45, Z. 10—12). Hierbei ist die Beziehung: $\cos X = \cos A \, . \cos R$ benutzt, vgl. S. 49, Z. 3.

S. 51, Z. 4 v. u. — 52, Z. 11 (45, Z. 11—1 v. u.). In Fig. 37′ ist ein Raumelement der hier benutzten Art dargestellt: vier seiner Kanten sind geradlinig, einander parallel und alle gleich $d\xi$, die übrigen sind unendlich kleine Gränzbögen. Das untere Gränzbogenrechteck hat den Flächeninhalt: $d\eta \, . \, d\zeta$, das obere den Inhalt: $d\eta' \, . \, d\zeta'$, wo nach S. 33, Gl. (36):

$$d\eta' \, . \, d\zeta' = e^{2 d\xi} \, . \, d\eta \, . \, d\zeta.$$

Nach S. 47, Gl. (50) wird daher das Raumelement gleich:

$$\tfrac{1}{2} d\eta' \, . \, d\zeta' - \tfrac{1}{2} d\eta \, . \, d\zeta = d\xi \, . \, d\eta \, . \, d\zeta.$$

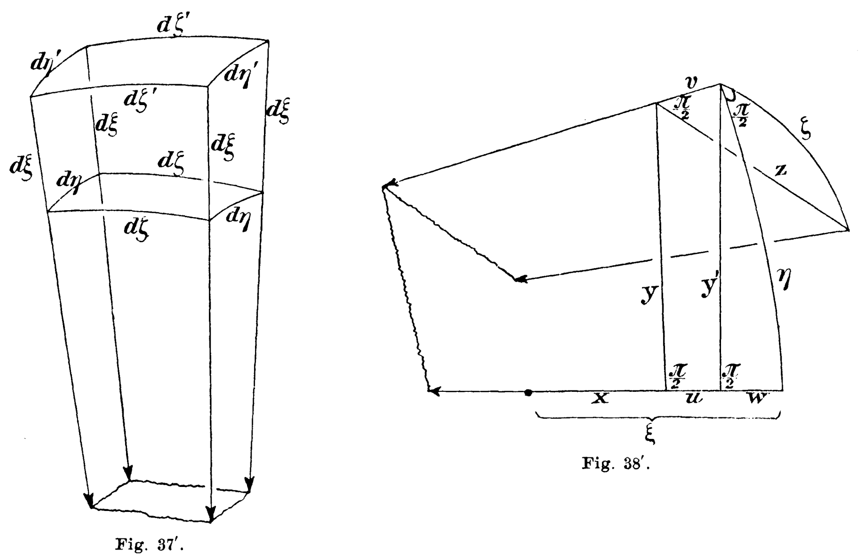


Fig. 37′.

Fig. 38′.

S. 52, Z. 12—17 (46, Z. 1—5). In Fig. 38′ ist nach S. 29, Gl. (29):

$$\zeta = \cot Z, \quad \eta = \cot F(y')$$

und nach Gl. (19), (27) und (33):

$$\cos F(y) = e^{-u} \, . \cos F(y'),$$

$$\sin F(z) = e^{-v}, \quad \sin F(y') = e^{-w}$$

$$\frac{e^{2u} - 1}{e^{2v} - 1} = \sin^2 F(y').$$

Hieraus folgt:

$$e^{2u} = 1 + \sin^2 F(y') \, . \, \cot^2 F(z),$$

also:

$$\frac{\cos^2 F(y')}{\cos^2 F(y)} = \frac{1 - \cos^2 F(y') \, . \, \cos^2 F(z)}{\sin^2 F(z)}$$

und somit:

$$\cos^2 F(y') = \frac{\cos^2 F(y)}{1 - \cos^2 F(z) \, . \, \sin^2 F(y)}, \quad \sin^2 F(y') = \frac{\sin^2 F(y) \, . \, \sin^2 F(z)}{1 - \cos^2 F(z) \sin^2 F(y)}$$

$$\eta = \cot F(y') = \frac{\cot Y}{\sin Z},$$

denn η, y' und y haben stets gleiches Vorzeichen. Endlich wird:

$$e^{2u} = \frac{1}{1 - \cos^2 F(z) \, . \, \sin^2 F(y)}, \quad e^{2w} = \frac{1 - \cos^2 F(z) \, . \, \sin^2 F(y)}{\sin^2 F(y) \, . \, \sin^2 F(z)},$$

demnach:

$$\begin{aligned} \xi &= x + u + w \\ &= x - \log \sin Y - \log \sin Z. \end{aligned}$$

S. 52, Z. 18—20 (46, Z. 6f.). Nach der allgemeinen Regel für die Transformation eines dreifachen Integrals wird:

$$\iiint d\xi \, d\eta \, d\zeta = \iiint dx \, dy \, dz \sum \pm \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

(s. z. B. Kroneckers Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale, hrsg. von Netto, Leipzig 1894, S. 229ff.). Im vorliegenden Falle ist:

$$\sum \pm \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{1}{\sin Y \, . \, \sin^2 Z}.$$

S. 52, Z. 13—10 v. u. (46, Z. 10—12). Nach S. 41f. (vgl. die Anmerkung dazu, S. 277) werden die Seiten des unendlich kleinen Parallelepipedons, das die Punkte x, y, z; $x + dx$, y, z; ... bestimmen, gleich:

$$\frac{dx}{\sin Y \, . \, \sin Z}, \quad \frac{dy}{\sin Z}, \quad dz.$$

Dass der Inhalt des Parallelepipedons durch das Produkt dieser Seiten dargestellt wird, geht aus der Anmerkung auf S. 288 hervor, da man jede Kante des Parallelepipedons durch einen unendlich kleinen Gränzbogen und jede Seitenfläche durch ein Stück einer Gränzkugel ersetzen kann.

S. 52, Z. 3 v. u.—53, Z. 3 (46, Z. 11—7 v. u.). Für die Kugel ist:

$$\sin X \, . \, \sin Y \, . \, \sin Z = \sin R,$$

also:

$$\cot Y = \sin X \, . \, \sin Z \, . \sqrt{\frac{1}{\sin^2 R} - \frac{1}{\sin^2 X \, . \, \sin^2 Z}},$$

$$\left(\frac{d^2 P}{dX dZ}\right) = \frac{1}{\sin^2 Z} \sqrt{\frac{\sin^2 X - \sin^2 R}{\sin^2 X \, . \, \sin^2 R} - \frac{\cot^2 Z}{\sin^2 X}},$$

und, wenn man:

$$\frac{\sin R \, . \cot Z}{\sqrt{\sin^2 X - \sin^2 R}} = u$$

setzt:

$$\frac{dP}{dX} = -\frac{\sin^2 X - \sin^2 R}{\sin X \,.\, \sin^2 R} \int_0^1 du \sqrt{1-u^2}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\sin X} - \frac{\sin X}{\sin^2 R}\right)$$

oder:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sin^2 X}{\sin^2 R} - 1\right)$$

$$P = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\cos X}{\sin^2 R} - x\right).$$

S. 53, Z. 4—8 (46, Z. 6—3 v. u.). In Fig. 39′ ist nach S. 20, Gl. 14I:

$$\sin X \,.\, \sin Y = \sin \mathsf{P}, \qquad \sin \mathsf{P} \,.\, \sin Z = \sin R,$$

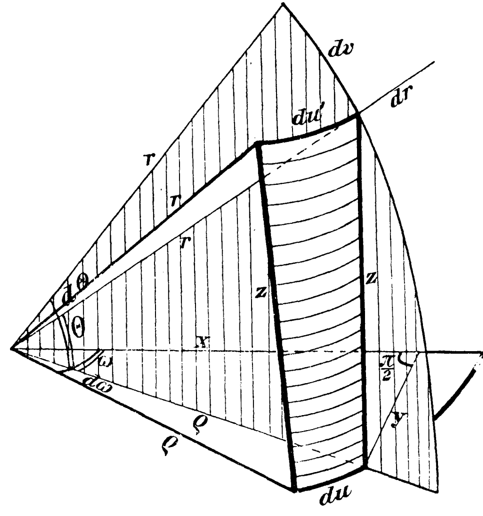


Fig. 39′.

wo $F(\varrho) = \mathsf{P}$ gesetzt ist. Demnach ergiebt sich durch Benutzung von 14V, II:

$$(\mathrm{X}) \begin{cases} \sin R = \sin X \,.\, \sin Y \,.\, \sin Z \\ \operatorname{tg} \omega = \cos Y \,.\, \operatorname{tg} X \\ \sin \theta = \operatorname{tg} R \,.\, \cot Z. \end{cases}$$

Nach S. 33, Gl. (37) und nach S. 31, Z. 2 v. u. oder S. 263, Gl. (VI) ist ferner:

$$dv = \cot R \,.\, d\theta, \quad du = \cot \mathsf{P} \,.\, d\omega,$$

$$du' = \frac{du}{\sin Z},$$

aber aus Gl. 14II, V folgt:

$$\operatorname{tg} R = \operatorname{tg} Z \,.\, \sin \theta,$$

$$\operatorname{tg} \theta = \cos Z \,.\, \operatorname{tg} \mathsf{P},$$

also wird:

$$\frac{\cot \mathsf{P}}{\sin Z} = \cos \theta \,.\, \cot R, \quad du' = d\omega \,.\, \cos \theta \,.\, \cot R.$$

Da endlich dr, du', dv paarweise auf einander senkrecht stehen, so kommt:

$$d^3 P = dr \,.\, du' \,.\, dv = d\omega \,.\, d\theta \,.\, dr \,.\, \cos \theta \,.\, \cot^2 R,$$

wie im Texte.

Will man umgekehrt von den Polarkoordinaten zu rechtwinkligen Koordinaten übergehen, so kann man die folgenden Gleichungen benutzen:

$$(\mathrm{XI}) \qquad \begin{cases} \cos X = \cos R \,.\, \cos \theta \,.\, \cos \omega \\ \cot Y = \dfrac{\cos R \,.\, \sin \omega \,.\, \cos \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 R \,.\, \cos^2 \theta}} \\ \cot Z = \cot R \,.\, \sin \theta. \end{cases}$$

Man vgl. hierzu J. G. R. in den K. G. S. 1835, I, S. 51, G. A. I, S. 97 und J. G. F., Crelle XVII, S. 309, G. A. II, S. 599.

S. 53, Z. 12—20 (47, Z. 1—7). In Fig. 40′ ist das Element dP durch die Pyramide $TNQO$ dargestellt. Man muss sich dP als Element des geraden Kreiskegels denken, der entsteht, wenn sich das rechtwinklige Dreieck OTN um TO als Axe dreht. Der Inhalt dieses Kegels hat nach Gl. (55) den Werth: $\pi(r\cos\varphi - h)$, woraus dP durch Multiplikation mit $d\psi : 2\pi$ entsteht.

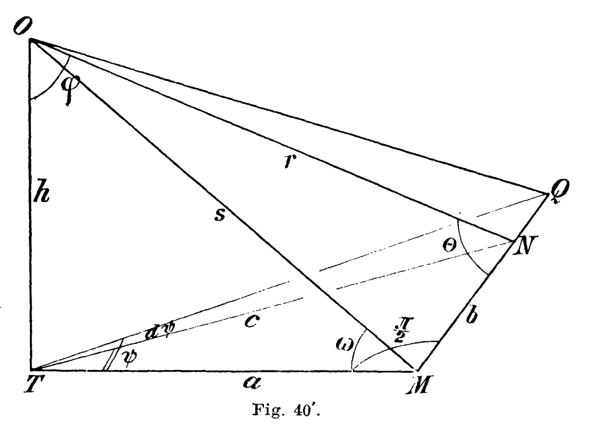


Fig. 40′.

S. 53, Z. 12—9 v. u. (47, Z. 10—12). Da MN auf der Ebene OTM senkrecht steht, so kann man sich die Punkte: T, O, N, M der Reihe nach durch M, N, O, T ersetzt denken, also h, b, ψ, ω, φ, ϑ durch b, h, ω, ψ, ϑ, φ, während a und r ungeändert bleiben.

S. 53, Z. 6—4 v. u. (47, Z. 14—12 v. u.). Nach S. 20, Gl. 14 V, III ist:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}H \,.\, \cos F(c), \quad \cos A = \cos F(c) \,.\, \cos\psi,$$

die beiden andern Gleichungen (64) folgen auch aus 14 V, III.

S. 54, Z. 4—7 (47, Z. 6—3 v. u.). Aus 64 I, II folgt:

$$\cos^2\varphi = \frac{\cos^2\psi}{\cos^2\psi + \cos^2 A \,.\, \operatorname{tg}^2 H}$$

$$= \frac{\cos^2\psi \,.\, \operatorname{tg}^2\omega}{(\cos^2\psi - \cos^2 A)\operatorname{tg}^2\omega + \sin^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2\psi \,.\, \sin^2\omega}{\sin^2 A - \sin^2\psi \,.\, \sin^2\omega}.$$

Ferner aus 64 II, III:

$$\cos R = \frac{\cos H}{\cos\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\omega \,.\, \cot A}{\cos\varphi}$$

$$= \frac{\cot A}{\cos\omega \,.\, \cos\psi}\sqrt{\sin^2 A - \sin^2\omega \,.\, \sin^2\psi}\,.$$

Die Wurzeln sind positiv zu nehmen, da alle vorkommenden Winkel spitz sind. Bei Gl. 66 III steht im K. B. die Wurzel im Nenner.

S. 54, Z. 9—14 (47, Z. 2 v. u.—48, Z. 4). Hier werden A und H als fest betrachtet und nur R als veränderlich. Aus der Gleichung 66 I folgt:

$$-\sin\psi \,.\, d\psi = \frac{\cos A \,.\, \sin H \,.\, \sin R \,.\, \cos R \,.\, dR}{(\sin^2 H - \sin^2 R)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\sin\psi = \sqrt{\frac{\sin^2 H \,.\, \sin^2 A - \sin^2 R}{\sin^2 H - \sin^2 R}},$$

also wird nach (64) und (66):

$$\cos\varphi \,.\, d\psi = -\frac{\cos A \,.\, \sin H \,.\, \cos H \,.\, \sin R \,.\, dR}{(\sin^2 H - \sin^2 R)\sqrt{\sin^2 H \,.\, \sin^2 A - \sin^2 R}}\,.$$

Aus $\cot\frac{1}{2}F(h) = e^h$ ergiebt sich überdies: $h = \log\cot\frac{1}{2}H$ und ebenso ist: $r = \log\cot\frac{1}{2}R$. Für $\psi = 0$ wird endlich: $r = MO = s$, also nach S. 20, Gl. 14I:

$$\sin R = \sin A \,.\, \sin H.$$

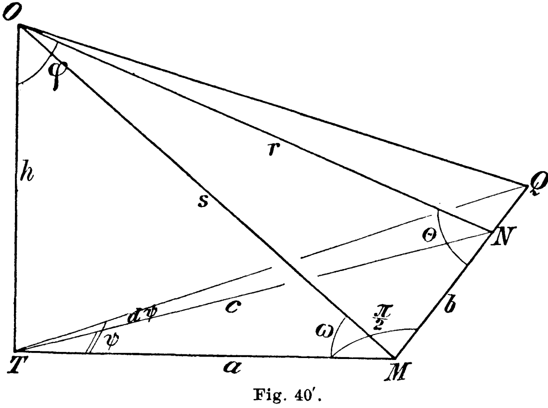


Fig. 40′.

S. 54, Z. 13—4 v. u. (48, Z. 5—13). Da φ, ψ und ω in (67) nicht vorkommen, so hat man nach S. 291, Z. 19f. nur H durch R zu ersetzen. Aus S. 20, Gl. 14I folgt ferner:

$$\sin A \,.\, \sin B = \sin C,$$

$$\sin C \,.\, \sin H = \sin R,$$

mithin ist:

$$\text{(XII)} \qquad \sin R = \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin H;$$

ässt man daher b von 0 bis b wachsen, das heisst, B von $\frac{1}{2}\pi$ bis B abnehmen, so liefern die entsprechenden Werthe von R die Gränzen des einen Integrals; die Gränzen des andern entsprechen den Werthen $h = 0$ und $h = h$. Endlich ist wegen (XII):

$$\arccos\frac{\cos A \,.\, \sin H}{\sqrt{\sin^2 H - \sin^2 R}} = \arccos\frac{\cos A}{\sqrt{1 - \sin^2 A \,.\, \sin^2 B}}$$

$$= \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} A \,.\, \cos B)\,.$$

S. 54, Z. 8 v. u. (48, Z. 9) hat der K. B. $\log\cot\frac{1}{2}H$ statt: $\log\cot\frac{1}{2}B$.

S. 54, Z. 3 v. u. — 55, Z. 13 (48, Z. 12—1 v. u.). Da MO die Gerade TO und TN die Gerade MN trifft, so ist: $A = F(a) > \omega$ und $> \psi$, also der Winkel α immer möglich. Man hat sich α spitz zu denken. In § 46 zeigt sich überdies, dass α auch eine geometrische Bedeutung hat.

Verbindet man die Gleichung (68) mit 66III, so kommt:

$$\text{(XIII)} \qquad \cos R = \frac{e^{2r} - 1}{e^{2r} + 1} = \frac{\cos A \,.\, \cos\alpha}{\cos\omega \,.\, \cos\psi}$$

oder:

$$\text{(XIV)} \qquad \cos\alpha = \frac{\cos R \,.\, \cos\psi \,.\, \cos\omega}{\cos A}\,.$$

Hierin liegt die Gleichung des Textes für r.

Andrerseits folgt aus (68), wenn man A und ω als konstant betrachtet:

$$\cos\alpha \,.\, d\alpha = \frac{\sin\omega \,.\, \cos\psi \,.\, d\psi}{\sin A}$$

oder wegen (XIV):

$$\operatorname{tg}\omega \,.\, d\psi = \operatorname{tg} A \,.\, \cos R \,.\, d\alpha,$$

also nach 64II:

$$\cos H \,.\, d\psi = \cos R \,.\, d\alpha$$

und durch Benutzung von 64 III erhält man schliesslich:

(XV) $$\cos\varphi \,.\, d\psi = d\alpha.$$

Demnach verwandelt sich (63) in:

$$2P = \int\limits_0^\alpha r \,.\, d\alpha - \psi \,.\, h = \alpha \,.\, r - \psi \,.\, h - \int \alpha\, dr,$$

wie im Texte.

Um hier r durch α auszudrücken, denken wir uns wieder ω und A und also auch H konstant und betrachten blos α, r und ψ als veränderlich, aber r und ψ als Funktionen von α. Dann bekommen wir aus (64), (66) und (68):

$$\cos H = \frac{\cos R \,.\, \cos\psi \,.\, \sin\omega}{\sqrt{\sin^2 A - \sin^2\omega \,.\, \sin^2\psi}}$$

$$= \cos R \,.\, \frac{\sqrt{\sin^2\omega - \sin^2\alpha \,.\, \sin^2 A}}{\sin A \,.\, \cos\alpha},$$

$$\cos H \,.\, \sin A = \cos R \,.\, \sqrt{\sin^2\omega - (\sin^2 A - \sin^2\omega)\operatorname{tg}^2\alpha},$$

also, da H, A und ω konstant sind:

$$\sin^2 R \frac{dr}{d\alpha}(\sin^2\omega - \sin^2\alpha \sin^2 A) = \cos R \operatorname{tg}\alpha\, (\sin^2 A - \sin^2\omega).$$

Aber aus (XIII) und (68) folgt:

$$\cos R = \frac{\cos\alpha \,.\, \cos A \,.\, \sin\omega}{\cos\omega\sqrt{\sin^2\omega - \sin^2\alpha \,.\, \sin^2 A}}$$

$$\sin^2 R = \frac{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2 A - \sin^2\omega)}{\cos^2\omega\,(\sin^2\omega - \sin^2\alpha \,.\, \sin^2 A)},$$

also wird:

(XVI) $$\left\{\begin{aligned} \frac{dr}{d\alpha} &= \frac{\sin\alpha \,.\, \cos A \,.\, \sin\omega \,.\, \cos\omega}{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)\sqrt{\sin^2\omega - \sin^2\alpha \,.\, \sin^2 A}} \\ &= \frac{\sin\alpha \,.\, \cos A \,.\, \cos\omega}{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)\cos\psi}. \end{aligned}\right.$$

Endlich ist nach (64), (65):

$$\cos H = \operatorname{tg}\omega \,.\, \cot A, \quad \cos B = \operatorname{tg}\psi \,.\, \cot A,$$

mithin:

(XVII) $$c^{2h} = \frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)}, \quad c^{2b} = \frac{\sin(A+\psi)}{\sin(A-\psi)}.$$

Hierzu ist noch zu bemerken, dass man nach S. 291, Z. 16 ff. in allen Formeln ω mit ψ vertauschen kann, wenn man gleichzeitig b mit h vertauscht und A, R, α ungeändert lässt.

Die Formeln des Textes sind hiermit alle abgeleitet. Uebrigens hat S. 55, Z. 1 (48, Z. 9 v. u.) der K. B. $\int\limits_a \alpha\, dr$, was unverständlich ist, wenn nicht etwa α statt a zu lesen ist und das α bedeuten soll, dass nach α integrirt wird. Ferner hat S. 55, Z. 3 (48, Z. 7 v. u.) der K. B. im Nenner $\cos A \,.\, \cos\omega$ statt: $\cos A \,.\, \cos\alpha$. Auf S. 55, Z. 5 (48, Z. 5 v. u.) ψh und: $\sin^2\alpha - \sin^2\omega$ statt: $2\psi h$ und: $\sin^2\omega - \sin^2\alpha$. Auf Z. 7 (Z. 3 v. u.)

fehlt der Faktor $\cos A$ und steht: $\sin^2\alpha - \sin^2\omega$ statt: $\sin^2\omega - \sin^2\alpha$, $\sin^2\psi - \sin^2\alpha \,.\, \sin^2 A$ statt: $\sin^2\omega - \sin^2\alpha \,.\, \sin^2 A$. Auf Z. 8 (Z. 2 v. u.) fehlt ebenfalls der Faktor $\cos A$ und steht: $\sin^2\alpha - \sin^2\psi$ statt: $\sin^2\psi - \sin^2\alpha$.

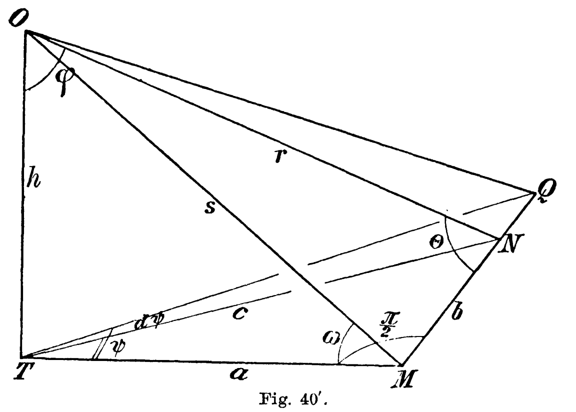


Fig. 40′.

S. 55, Z. 9—5 v. u. (49, Z. 7—10). Vorhin haben wir den Differentialquotienten von r nach α berechnet, indem wir A und ω als konstant und r, ψ als Funktion von α betrachteten. Sehen wir jetzt ψ und r als Funktionen der beiden Veränderlichen α und A an, so erhalten wir den Differentialquotienten von r nach A augenscheinlich aus dem von r nach α (s. Gl. (XVI)), wenn wir α mit A vertauschen; also wird:

$$\frac{\partial r}{\partial A} = \frac{\sin A \,.\, \cos\alpha \,.\, \cos\omega}{(\sin^2\omega - \sin^2 A)\cos\psi}$$

und, da r für $A = \frac{1}{2}\pi$ verschwindet:

$$r = \cos\alpha \,.\, \cos\omega \int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin A \,.\, dA}{(\sin^2 A - \sin^2\omega)\cos\psi}.$$

Das Integral auf S. 55, Z. 5 v. u. ist daher $= 2\int_0 r\,d\alpha$.

S. 55, Z. 5—3 v. u. (49, Z. 10—12). Es ist:

$$\int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{dA}{\sin^2 A - \sin^2\omega} = \int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{dA}{\sin(A+\omega)\,.\,\sin(A-\omega)}$$
$$= \frac{1}{\sin 2\omega}\log\frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)},$$

ferner, da ψ als Funktion von A und α betrachtet wird, nach (68):

$$\frac{\partial}{\partial A}\frac{\sin A}{\cos\psi} = \frac{\cos A}{\cos\psi} + \frac{\sin A \,.\, \sin\psi}{\cos^2\psi}\cdot\frac{\sin\alpha \,.\, \cos A}{\sin\omega \,.\, \cos\psi}$$
$$= \frac{\cos A}{\cos\psi} + \frac{\sin^2\psi \,.\, \cos A}{\cos^3\psi},$$

das heisst:

(XVIII) $$\frac{\partial}{\partial A}\frac{\sin A}{\cos\psi} = \frac{\cos A}{\cos^3\psi},$$

und ebenso:

(XIX) $$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\sin\alpha}{\cos\psi} = \frac{\cos\alpha}{\cos^3\psi}.$$

Man beachte überdies, dass:

$$\int_A^{\frac{\pi}{2}} u \,.\, v \,.\, dA = u \int_A^{\frac{\pi}{2}} v \,.\, dA + \int_A^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{du}{dA} \int_A^{\frac{\pi}{2}} v \,.\, dA \right\} dA.$$

S. 55, Z. 4 v. u. — 56, Z. 1 (49, Z. 11—15). Das erste Doppelintegral ist unmittelbar ein Produkt zweier einfacher Integrale, weil von den darin vorkommenden Grössen nur ψ von α abhängt. Das Integral nach A ist schon vorhin angegeben. Das Integral nach α findet man sofort, wenn man bedenkt, dass aus (68) folgt:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = \frac{1}{\sin \omega} \cdot \frac{\sin A \,.\, \cos \alpha}{\cos \psi};$$

es wird also:

$$\int_0^{\alpha} \frac{\sin A \,.\, \cos \alpha}{\cos \psi} \, d\alpha = \sin \omega \int_0^{\psi} d\psi = \psi \,.\, \sin \omega.$$

Andrerseits sind in dem zweiten Doppelintegrale die Gränzen von einander unabhängig, man kann also die Integrationsordnung umkehren. Berücksichtigt man (XIX), so findet man:

$$\int_0^{\alpha} \frac{\cos \alpha \,.\, d\alpha}{\cos^3 \psi} = \frac{\sin \alpha}{\cos \psi}.$$

Die Endgleichung S. 56, Z. 1 (49, Z. 15) ergiebt sich jetzt ganz von selbst. Im K. B. fehlt bei dieser Gleichung der Faktor 2 vor $\int r \, d\alpha$.

S. 56, Z. 2—9 (49, Z. 7—1 v. u.). Werden nur A und ψ als veränderlich betrachtet, alle übrigen Grössen dagegen als konstant, so ist nach (68):

$$\frac{d\psi}{dA} = \frac{\sin \alpha \,.\, \cos A}{\sin \omega \,.\, \cos \psi},$$

also:

$$\int \frac{\cos A \,.\, dA}{\cos \psi} = \frac{\sin \omega}{\sin \alpha} \cdot \psi + \text{const.},$$

mithin:

$$\int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{dA \,.\, \cos A}{\cos \psi} \cdot \log \frac{\sin (A + \omega)}{\sin (A - \omega)} = - \psi \cdot \frac{\sin \omega}{\sin \alpha} \cdot \log \frac{\sin (A + \omega)}{\sin (A - \omega)} -$$

$$- \frac{\sin \omega}{\sin \alpha} \int_A^{\frac{\pi}{2}} \psi \,.\, dA \cdot \frac{d}{dA} \log \frac{\sin (A + \omega)}{\sin (A - \omega)},$$

da der Logarithmus für $A = \frac{1}{2}\pi$ verschwindet. Demnach ergiebt sich:

$$2 \int r \, d\alpha = \sin 2\omega \int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi \,.\, dA}{\sin (A + \omega) \,.\, \sin (A - \omega)}$$

und damit die Gleichung (71).

Ferner wird:

$$dA = \frac{\sin\omega \,.\, \cos\psi \,.\, d\psi}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\omega \,.\, \sin^2\psi}}$$

$$\sin(A+\omega) \,.\, \sin(A-\omega) = \sin^2 A - \sin^2\omega$$
$$= \frac{\sin^2\omega}{\sin^2\alpha}(\sin^2\psi - \sin^2\alpha)\,.$$

Im K. B. fehlt die Gleichungsnummer (71); ferner steht dort in der Endgleichung für P $\frac{1}{2}\cos\omega \,.\, \sin\alpha$ statt: $\frac{1}{2}\cos\omega \,.\, \sin^2\alpha$ und im Nenner unter dem Integrale beide Male $\sin^2 a$ statt: $\sin^2\alpha$.

S. 56, Z. 11—7 v. u. (50, Z. 4—8). Was auf S. 48 bei Ableitung der Gleichung (51) mit A, b, a bezeichnet worden war, das heisst jetzt: ω, a, h, das damalige $F(b) = B$ wird also jetzt gleich $F(a)$ und unter der hier gemachten besonderen Voraussetzung gleich ψ. Der aus (64) folgende Werth von h ist der auf S. 293, Gleichung (XVII) gefundene.

S. 56, Z. 6 v. u.—57, Z. 2 (50, Z. 9—15). Nach einer zu S. 48 gemachten Anmerkung, s. S. 284, Z. 10—1 v. u., ist:

$$\frac{dP}{d\omega} = -\tfrac{1}{2}\log\sin F(s),$$

wenn man sich in Fig. 40′ die Kanten TN und OM zu MN parallel denkt und MO mit s bezeichnet. Nach S. 20, Gl. 14I ist aber:

$$\sin F(s) = \sin A \,.\, \sin H,$$

und andrerseits folgt aus Gl. 64II:

$$\sin^2 A \,.\, \sin^2 H = 1 - \frac{\cos^2 A}{\cos^2\omega}\,.$$

Dass die beiden Ausdrücke (73) und (74) mit einander identisch sind, erkennt man daraus, dass beide ergeben:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial A\,\partial\omega} = -\frac{1}{2}\,\frac{\sin A \,.\, \cos A}{\cos^2\omega - \cos^2 A}$$

und dass beide sowohl für $A = \frac{1}{2}\pi$ als für $\omega = 0$ verschwinden.

Bei der Gleichung hinter (73) fehlt im K. B. das Minuszeichen vor dem Integrale und bei der Gleichung hinter (74) ist als untere Gränze des Integrals 0 angegeben statt A.

S. 57, Z. 9—11 (50, Z. 3—1 v. u.). Man wird dazu die Gleichung (XVII), S. 293 benutzen. Bei Gleichung (75) fehlt im K. B. der Faktor 2 vor $\cos 2\omega$. Die Seitenzahl [*602* gehört nicht an Z. 11, sondern an Z. 13.

S. 57, Z. 13—58, Z. 10 (51, Z. 1—25). Man sehe Fig. 41′. Addirt werden die Pyramiden mit den Grundflächen OTM und OVU, abgezogen die mit den Grundflächen OTU und NVU.

S. 58, Z. 10, 9 v. u. (52, Z. 3—5). Man denke sich D in der Form:

$$D = F((c+d) - c)$$

geschrieben und bilde $\sin D$, $\cos D$ nach S. 244, Gl. (II).

S. 58, Z. 5, 4 v. u. (52, Z. 8f.). In der That wird bei Benutzung von Gl. 78IV, I:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\sin C \,.\, \cos \psi}{\sin A} \cdot \frac{\cot C}{\cos H}$$
$$= \frac{\cot A}{\cos H}.$$

S. 59, Z. 1—4 (52, Z. 12—9 v. u.). Dies ist die schon auf S. 292 angekündigte geometrische Deutung des in § 44 eingeführten Hülfswinkels α.

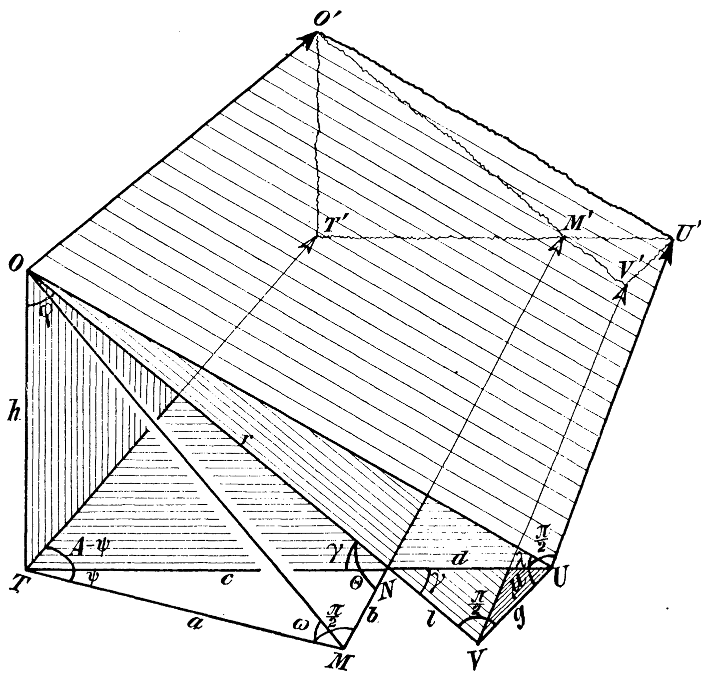


Fig. 41′.

S. 59, Z. 13—16 (53, Z. 2—5). Man beachte, dass in der Formel (75) h und ω gegenüberliegende Stücke des rechtwinkligen Dreiecks MTO sind, das die Grundfläche der Pyramide P' mit den parallelen Kanten MM', TT', OO' bildet, und zwar ist h die Kathete des rechtwinkligen Dreiecks, die auf einer Seitenfläche der Pyramide senkrecht steht. Bei der Pyramide P'' mit der Grundfläche OTU sind die entsprechenden Stücke h und $\angle OUT = \lambda$. Bei der Pyramide P_1, die OVU zur Grundfläche hat, sind es $OV = r + l = h'$ und $\angle OUV = \lambda + \mu = \frac{1}{2}\pi - (\omega - \lambda)$. Bei der Pyramide P_2 endlich, die NVU zur Grundfläche hat, sind es: $NV = l$ und $\angle NUV = \mu = \frac{1}{2}\pi - \omega$.

S. 59, Z. 10—5 v. u. (53, Z. 6—11). In der Gleichung (73) ist der Winkel ω derselbe wie bei (75), aber die untere Gränze A des Integrals ist gleich $F(a)$, wo a die dem Winkel ω anliegende Kathete des rechtwinkligen Dreiecks MTO ist. Bei den übrigen Pyramiden P'', P_1, P_2 treten daher an die Stelle von ω die vorhin angegebenen Winkel, während a der Reihe nach durch: $TU = c + d$, $VU = g$, $VU = g$ zu ersetzen ist, also die untere Gränze A des Integrals durch:

$$F(c + d) = A - \psi, \quad F(g) = G = \tfrac{1}{2}\pi - \alpha, \quad F(g) = \tfrac{1}{2}\pi - \alpha.$$

Zunächst wird daher:

$$4P_1 = \int_G^{\frac{\pi}{2}} dA \, . \log \frac{\sin(A + \frac{1}{2}\pi - (\omega - \lambda))}{\sin(A - \frac{1}{2}\pi + (\omega - \lambda))}$$

$$4P_2 = \int_G^{\frac{\pi}{2}} dA \, . \log \frac{\sin(A + \frac{1}{2}\pi - \omega)}{\sin(A - \frac{1}{2}\pi + \omega)} .$$

Da die Winkel $\frac{1}{2}\pi - (\omega - \lambda) = \lambda + \mu$ und $\frac{1}{2}\pi - \omega = \mu$ beide spitz und beide kleiner als $F(g) = G = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ sind, so ist $\omega > \alpha$ und $\omega - \lambda > \alpha$. Man kann daher in den vorhin angegebenen Ausdrücken für P_1 und P_2 die Veränderliche A durch $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ ersetzen und erhält so die Ausdrücke des Textes.

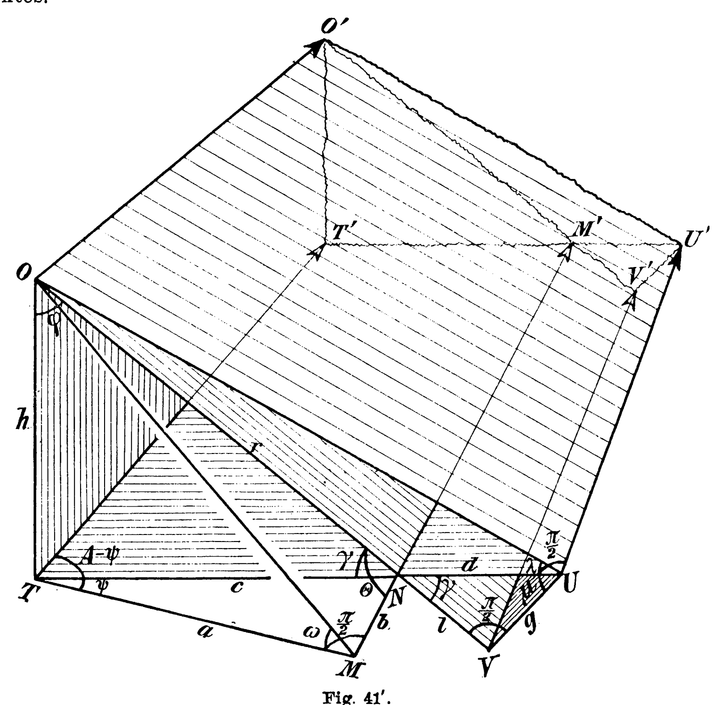


Fig. 41'.

Bei allen vier Gleichungen (81) fehlt im K. B. links der Faktor 4 und in der dritten Gleichung steht $\alpha - \omega + \lambda$ statt: $\omega - \alpha - \lambda$.

S. 59, Z. 4—1 v. u. (53, Z. 11, 10 v. u.). Dass der Werth von P ungeändert bleibt, wenn man h mit b und gleichzeitig ω mit ψ vertauscht, ohne A zu ändern, ist nach S. 291 unmittelbar klar; auch α bleibt dabei nach S. 54, Gl. (68) ungeändert. Bei der genannten Operation bleibt auch r ungeändert, während $L = F(l)$ in $L' = F(l')$ übergeht, wo L' nach (79) aus:

$$\cos L' = \cot \psi \, . \operatorname{tg} \alpha$$

zu bestimmen ist; demnach bekommt h' den neuen Werth: $h'' = r + l'$. Andrerseits tritt an die Stelle von λ ein neuer Winkel λ', der nach (79) aus:

$$\operatorname{tg} \lambda' = \cos B \,.\, \operatorname{tg}(A - \omega)$$

zu entnehmen ist. Nach S. 293, Z. 12 v. u. ist:

$$\operatorname{tg} \lambda = \operatorname{tg} \omega \,.\, \cot A \,.\, \operatorname{tg}(A - \psi)$$

$$\operatorname{tg} \lambda' = \operatorname{tg} \psi \,.\, \cot A \,.\, \operatorname{tg}(A - \omega).$$

Da nun $A = F(a)$, ω und ψ, solange die Pyramide P nicht eine ganz besondere Gestalt hat, von einander unabhängig sind, so wird λ' im allgemeinen von λ verschieden sein und ebenso l' von l, h'' von h'.

S. 60, Z. 2—6 (53, Z. 9—6 v. u.). In Fig. 42′ ist $LMNO$ die Grundfläche der betrachteten Pyramide, die Kante MM' steht auf der Grundfläche senkrecht und die übrigen LL', OO', NN' sind zu MM' parallel. Auf Z. 4 (Z. 9, 8 v. u.) hat der K. B. h, a, h', a' statt: h, a, a', h'.

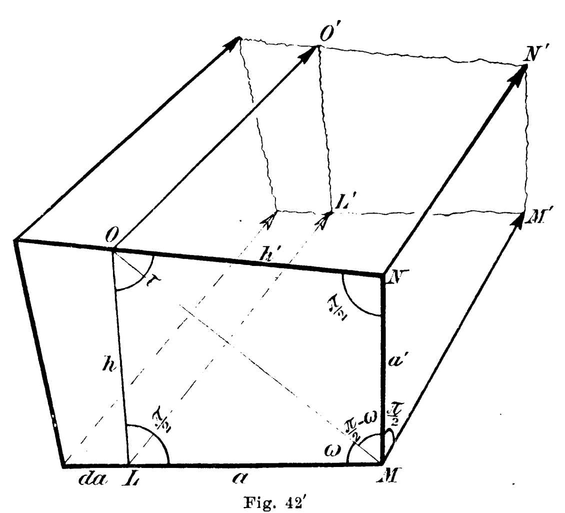


Fig. 42′

S. 60, Z. 8 f. (53, Z. 4, 3 v. u.). Wächst a um da, so wächst die vierseitige Pyramide um ein unendlich kleines Stück dP, das man unter Vernachlässigung einer unendlich kleinen Grösse zweiter Ordnung ersetzen kann durch den Zuwachs $d\Pi$, den die dreiseitige Pyramide mit der Grundfläche MLO und den parallelen Kanten MM', LL', OO' erhält, wenn a um da wächst, während $\angle OML = \omega$ konstant bleibt. Dieser Zuwachs $d\Pi$ hat aber nach S. 48, Gl. (51) den Werth: $d\Pi = -\frac{1}{2} h \,.\, dF(a) = -\frac{1}{2} h \,.\, dA$.

Aus: $\sin A \,.\, \cos H = \cos A'$ folgt:

$$\frac{e^{2h} - 1}{e^{2h} + 1} = \frac{\cos A'}{\sin A},$$

also wird:

$$-\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{A} h \,.\, dA = \frac{1}{4} \int_{A}^{\frac{\pi}{2}} dA \,.\, \log \frac{\sin A + \cos A'}{\sin A - \cos A'}.$$

S. 60, Z. 10 v. u.—61, Z. 7 (54, Z. 8—20). Es ist ja:

$$\frac{\sin A + \cos A'}{\sin A - \cos A'} = \frac{\sin\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}(A - A')\right) . \cos\left(\frac{1}{2}(A + A') - \frac{1}{4}\pi\right)}{\cos\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}(A - A')\right) . \sin\left(\frac{1}{2}(A + A') - \frac{1}{4}\pi\right)},$$

und es wird gesetzt:

$$x = \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}(A - A'), \quad y = \tfrac{1}{2}(A + A') - \tfrac{1}{4}\pi.$$

Ferner ergiebt sich, wenn man $x = \frac{1}{2}\pi - u$ setzt:

$$\int\limits_{\frac{\pi - A'}{2}}^{\frac{A'}{2}} dx \,.\, \log \operatorname{tg} x = -\int\limits_{\frac{A}{2}}^{\frac{\pi - A'}{2}} du \,.\, \log \cot u = 0.$$

Endlich erhält man bei der Substitution: $\log \cot x = z$:

$$dx = - dz \,.\, \sin^2 x \,.\, \cot x = - \frac{e^z\, dz}{1 + e^{2z}},$$

$$dx \,.\, \log \operatorname{tg} x = \frac{z\, dz}{e^z + e^{-z}}.$$

S. 61, Z. 2 (54, Z. 11 v. u.) steht im K. B.: $+ 2\cos\omega$ statt: $+ 2\cos 2\omega$.

S. 61, Z. 14—16 (55, Z. 3—5). Die Gleichung (83) ergiebt sich, wenn man noch die frühere Gleichung: $\cos A' = \sin A \,.\, \cos H$ zuzieht. Aus $\operatorname{tg} H' = \operatorname{tg}\omega \,.\, \operatorname{tg} H$ oder:

$$\frac{e^{h'}}{e^{2h} - 1} = \operatorname{tg}\omega \cdot \frac{e^h}{e^{2h} - 1}$$

folgt:

$$e^{2h'} - e^{h'}(e^h - e^{-h}) \cot\omega = 1.$$

S. 61, Z. 17 (55, Z. 6). Ausser: $\cos A' = \sin A \,.\, \cos H$ besteht offenbar auch noch die Gleichung: $\cos A = \sin A' \,.\, \cos H'$, die übrigens auch aus:

$$\cos H' \,.\, \operatorname{tg} A' = \cot\omega = \frac{\cos A}{\cos A'}$$

unmittelbar folgt. Also ergiebt sich:

$$\cos^2 A' + \sin^2 A' \,.\, \cos^2 H \,.\, \cos^2 H' = \cos^2 H$$

und:

$$\sin A' = \frac{\sin H}{\sqrt{1 - \cos^2 H \,.\, \cos^2 H'}}, \quad \cos A' = \frac{\cos H \,.\, \sin H'}{\sqrt{1 - \cos^2 H \,.\, \cos^2 H'}}$$

$$\sin A = \frac{\sin H'}{\sqrt{1 - \cos^2 H \,.\, \cos^2 H'}}, \quad \cos A = \frac{\sin H \,.\, \cos H'}{\sqrt{1 - \cos^2 H \,.\, \cos^2 H'}},$$

wo die Wurzel positiv zu nehmen ist, da die Winkel A, A', H, H' alle spitz sind. Nunmehr wird (vgl. S. 244, (II)):

$$\cos(A - A') = \frac{\sin H \,.\, \sin H'}{1 - \cos H \,.\, \cos H'} = \sin F(h' - h)$$

$$\cos(A + A') = \frac{- \sin H \,.\, \sin H'}{1 + \cos H \,.\, \cos H'} = - \sin F(h' + h)$$

$$\sin(A - A') = - \cos F(h' - h), \quad \sin(A + A') = \cos F(h' + h),$$

mithin:

$$A - A' = F(h' - h) - \tfrac{1}{2}\pi, \quad A + A' = \tfrac{1}{2}\pi + F(h' + h)$$

$$\cot\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}(A - A')\right) = e^{h' - h}, \quad \cot\left(\tfrac{1}{2}(A + A') - \tfrac{1}{4}\pi\right) = e^{h' + h}.$$

S. 61, Z. 12—8 v. u. (55, Z. 7—9). Der Fall $h = \infty$ tritt ein, wenn in Fig. 42′ LO zu MO parallel wird, also $F(a) = \omega$ ist, dann aber wird auch NO zu MO parallel, und es ist also $h' = \infty$, $F(a') = \frac{1}{2}\pi - \omega$. Man kann in diesem Falle in der Gleichung (82) $h' = h$ setzen und bekommt:

$$\int_0^\infty \frac{2h(e^{2h} + e^{-2h})\,dh}{e^{4h} + e^{-4h} - 2\cos 4\omega} = \frac{1}{2\sin 2\omega}\int \frac{z\,dz}{e^z + e^{-z}},$$

wo das Integral rechts von $z = \log\cot\omega$ bis $z = \infty$ geht. Ersetzt man hier h durch $\frac{1}{2}h$ und ω durch $\frac{1}{2}\omega$, so kommt man auf die Gleichung (84) des Textes.

S. 61, Z. 5, 3 v. u. (55, Z. 12, 14). Im K. B. steht beide Male rechts $\frac{1}{2}$ statt 2. Da bei der Pyramide mit der Grundfläche MNO die Grössen: A' und $\frac{1}{2}\pi - \omega$ an die Stelle von A und ω treten, so ergiebt sich:

$$\int_{A'}^{\frac{\pi}{2}} dA' \log\frac{\sin(A' + \frac{1}{2}\pi - \omega)}{\sin(A' - \frac{1}{2}\pi + \omega)} = \int_{A'}^{\frac{\pi}{2}} dA' . \log\frac{\cos(A' - \omega)}{-\cos(A' + \omega)}.$$

Hier ist aber $\cos(A' + \omega)$ negativ, weil $A' > \frac{1}{2}\pi - \omega$ und also $A' + \omega > \frac{1}{2}\pi$ ist. Im Texte ist das Minuszeichen vor $\cos(A' + \omega)$ weggelassen; man muss daher die auf S. 62, Z. 3—5 gemachte Bemerkung auch auf die vor (85) vorhergehende Gleichung beziehen.

S. 62, Z. 7 (55, Z. 2 v. u.). Auch hier steht im K. B. rechts $\frac{1}{2}$ statt 2. Man hat sich wiederum die Zahl, von der der Logarithmus genommen wird, stets positiv gewählt zu denken.

S. 62, Z. 11—7 v. u. (56, Z. 9—13). In Fig. 43′ ist der Grundkreis des Kegels dargestellt; die Axe steht in O auf der Kreisebene senkrecht. Denkt man sich durch alle Punkte auf der Begränzung des unendlich kleinen Flächenraums $LMNP$ Parallele zur Axe gezogen, so erhält man ein Raumelement, das nach S. 48, Gl. (51) gleich $-\frac{1}{2}y \,.\, dX$ ist. Den Rauminhalt des ganzen Kegels erhält man, wenn man nach X von $\frac{1}{2}\pi$ bis R integrirt und dann mit 4 multiplicirt.

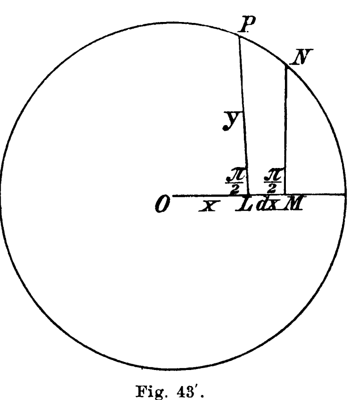


Fig. 43′.

S. 62, Z. 6 v. u.—63, Z. 5 (56, Z. 13 bis 5 v. u.). Aus $\sin X \,.\, \sin Y = \sin R$ folgt nach S. 243, (I):

$$e^{2y} - 2\frac{\sin X}{\sin R}e^y + 1 = 0$$

und andrerseits:

$$dX = -\frac{\sin R \,.\, \cot Y \,.\, dY}{\sqrt{\sin^2 Y - \sin^2 R}}.$$

Die im Texte erwähnte partielle Integration ergiebt:

$$-\pi \,.\, \log \sin R = \frac{\pi}{2} \log \frac{1+\cos R}{1-\cos R} - \int\limits_R^{\frac{\pi}{2}} X \,.\, dX \,.\, \frac{2 \cos X}{\sqrt{\sin^2 X - \sin^2 R}} .$$

Von Legendres Exercices de Calcul Intégral ist Band I in Paris 1811 erschienen. Ein besonderes Bändchen von 50 S. 4^0 trägt die Bezeichnung: „Exercices de Calcul Intégral. Supplément à la première partie", ohne Jahreszahl und Erscheinungsort. Die Worte „première partie" beziehen sich wohl darauf, dass das Werk in „parties" eingetheilt ist; Band I enthält deren drei. Auf S. 35—50 des Supplément wird eine Table générale des formules gegeben, in der die beiden hier von Lobatschefskij abgeleiteten Integrale vorkommen, das eine auf S. 43, Z. 14 in der Gestalt:

$$\int\limits_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \,.\, d\omega \,.\, \cos \omega}{\sqrt{\sin^2 \omega - \sin^2 \alpha}} = \tfrac{1}{2}\pi \,.\, \log(1+\cos\alpha),$$

das andre auf S. 46, Z. 2 in der Gestalt:

$$\int\limits_0^\beta \frac{\Omega \,.\, d\omega \,.\, \sin \omega}{\cos \omega \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \omega}} = \frac{\pi}{2 \cos \beta} \cdot \log \frac{1}{\cos \beta},$$

wo Ω die Bedeutung:

$$\Omega = \tfrac{1}{2} \log \frac{1+\sin\omega}{1-\sin\omega}$$

hat. Im ersten Falle ist also: $X = \omega$, $R = \alpha$, im zweiten:

$$Y = \tfrac{1}{2}\pi - \omega, \quad R = \tfrac{1}{2}\pi - \beta.$$

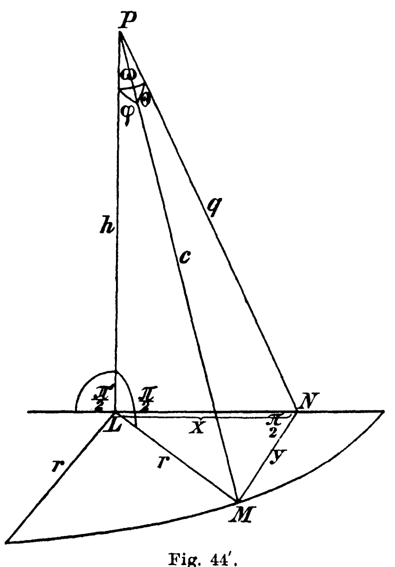


Fig. 44'.

S. 63, Z. 7—16 (56, Z. 4 v. u.—57, Z. 3). In Fig. 44' ist eine solche Pyramide dargestellt. Man hat sich die Spitze P dieser Pyramide $LMNP$ als Anfangspunkt der Polarkoordinaten c, ω, θ zu denken und die Ebene, in der h und x liegen, als die Anfangsebene, so dass also q die Projektion des Radiusvektors c ist.

S. 63, Z. 17f. (57, Z. 4f.) Es ist

$$\int\limits_0^c dc\,(e^c - e^{-c})^2 = \tfrac{1}{2}(e^{2c} - e^{-2c} - 4c)$$

$$= \frac{e^c - e^{-c}}{e^c + e^{-c}} \cdot \frac{(e^c + e^{-c})^2}{2} - \log \cot^2 \tfrac{1}{2} C.$$

S. 63, Z. 13—10 v. u. (57, Z. 6—9). Das Dreieck MNP ist bei N rechtwinklig, da NM auf der Ebene NLP senkrecht steht. Nach S. 20, Gl. 14III

ist daher: $\cos Q = \cos C \,.\, \cos\theta$ und somit, wenn man sich q konstant denkt:

$$dc = \frac{\operatorname{tg}\theta \,.\, \cos C \,.\, d\theta}{\sin^2 C}.$$

Berücksichtigt man nun, dass $\log\cot\frac{1}{2}C = c$ ist, und schreibt demgemäss $4\,d^2P$ in der Form:

$$4\,d^2P = d\omega \,.\, d\theta \,.\, \cos\theta\left\{\frac{2\cos C}{\sin^2 C} - 2\,c\right\},$$

so ergiebt die Integration nach θ:

$$4\,dP = d\omega\int_0^\theta \frac{2\cos\theta \,.\, \cos C \,.\, d\theta}{\sin^2 C} - d\omega \,.\, 2\,c \,.\, \sin\theta + d\omega\int_0^\theta 2\sin\theta \,.\, dc$$

$$= d\omega\int_0^\theta \frac{2\cos C \,.\, d\theta}{\cos\theta \,.\, \sin^2 C} - d\omega \,.\, 2\,c \,.\, \sin\theta.$$

Nach S. 20, Gl. 14 V, I ist aber:

$$\operatorname{tg}\theta = \cos Y \,.\, \operatorname{tg} Q, \quad \sin C = \sin Q \,.\, \sin Y,$$

mithin bei konstantem q:

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \sin^2 Y \,.\, \operatorname{tg} Q \,.\, dy = \frac{\sin^2 C \,.\, dy}{\sin Q \,.\, \cos Q},$$

oder wegen: $\cos Q = \cos C \,.\, \cos\theta$:

$$\frac{\cos C \,.\, d\theta}{\cos\theta\sin^2 C} = \frac{dy}{\sin Q}.$$

S. 63, Z. 9—5 v. u. (57, Z. 10—15). Nach S. 20, Gl. 14 II ist: $\operatorname{tg} C = \operatorname{tg} Y \,.\, \sin\theta$. Verbindet man damit die Gleichungen:

$$\sin C = \sin Q \,.\, \sin Y, \quad \sin Q = \sin H \,.\, \sin X,$$

so kommt:

$$\sin\theta = \frac{\cos Y \,.\, \sin Q}{\cos C} = \frac{\sin X \,.\, \cos Y \,.\, \sin H}{\cos C}.$$

Ferner ergiebt sich aus: $\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg} H \,.\, \cos X$, wenn man h als konstant betrachtet:

$$d\omega = -\cos^2\omega \,.\, \operatorname{tg} H \,.\, \sin X \,.\, dX$$
$$= -\frac{\operatorname{tg} H \,.\, \sin X \,.\, dX}{1 + \operatorname{tg}^2 H \,.\, \cos^2 X}$$
$$= -\frac{\sin H \,.\, \cos H \,.\, \sin X \,.\, dX}{1 - \sin^2 H \,.\, \sin^2 X}$$

und damit sofort die Gleichung (87), wenn man noch: $\sin Q = \sin H \sin X$ und den vorhin gefundenen Werth von $\sin\theta$ berücksichtigt.

In der Gleichung (87) ist nur H konstant, und man hat sich C als Funktion von X und Y zu denken.

S. 64, Z. 8 (57, Z. 1 v. u.). Der K. B. hat $\sin A$ statt $\sin R$. — Wegen $dX = -\sin X \,.\, dx$ und: $\sin R = \sin X \,.\, \sin Y$ ist hier:

$$\int_R^{\frac{\pi}{2}} \cos Y \,.\, dX = \sin R \,.\, \int_0^r \cot Y \,.\, dx,$$

wo rechts der Faktor von $\sin R$ nach S. 37, Z. 3 v. u. den Inhalt des Viertelkreises vom Halbmesser r darstellt und also nach S. 38, Z. 13—11 v. u. angegeben werden kann.

S. 64, Z. 9—11 (58, Z. 1 f.). Um den ganzen Kegel, dessen Rauminhalt P' sei, zu erhalten, muss man $4dP$ entweder nach X von $\frac{1}{2}\pi$ bis R oder nach Y von R bis $\frac{1}{2}\pi$ integriren und dabei: $\sin R = \sin X \,.\, \sin Y$ annehmen. Andrerseits ist nach S. 49, Gl. (55):

$$P' = \pi (c \cos \varphi - h),$$

wo h, c, φ konstant sind und φ der Werth ist, den der frühere Winkel ω für $x = r$ annimmt; es ist also:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} H \,.\, \cos R, \quad \sin H \,.\, \sin R = \sin C,$$

$$\cos \varphi = \frac{\cos H}{\sqrt{1 - \sin^2 H \sin^2 R}} = \frac{\cos H}{\cos C},$$

das heisst:

$$\tfrac{1}{2} P' = \frac{\pi}{2} \left(c \frac{\cos H}{\cos C} - h \right).$$

Die besprochene Integration liefert wegen:

$$dX = -\frac{\sin R \,.\, \cot Y \,.\, dY}{\sqrt{\sin^2 Y - \sin^2 R}}$$

$$\frac{1}{1 - \sin^2 H \,.\, \sin^2 X} = \frac{1}{1 - \sin^2 Q} = \frac{\sin^2 Y}{\sin^2 Y - \sin^2 C}$$

nach (87) den Ausdruck:

$$\tfrac{1}{2} P' = \cos H \,.\, \sin R \,.\, J + \frac{c \,.\, \sin^2 H \,.\, \cos H}{\cos C} \int_{\frac{\pi}{2}}^{R} \frac{\cos Y \,.\, \sin^2 X \,.\, dX}{1 - \sin^2 H \,.\, \sin^2 X},$$

wo J das Integral auf der linken Seite der Gleichung (88) bezeichnet. Nun ist:

$$\frac{\sin^2 H \,.\, \cos Y \,.\, \sin^2 X \,.\, dX}{1 - \sin^2 H \,.\, \sin^2 X} = -\cos Y \,.\, dX + \frac{\cos Y \,.\, dX}{1 - \sin^2 X \,.\, \sin^2 H},$$

$$\frac{\cos Y \;\; dX}{1 - \sin^2 X \,.\, \sin^2 H} = -\frac{\sin R \,.\, \cos^2 Y \,.\, \sin Y \,.\, dY}{(\cos^2 C - \cos^2 Y)\sqrt{\cos^2 R - \cos^2 Y}}$$

$$= \frac{\sin R \,.\, \sin Y \, dY}{\sqrt{\cos^2 R - \cos^2 Y}} - \frac{\sin R \,.\, \cos^2 C \,.\, \sin Y \,.\, dY}{(\cos^2 C - \cos^2 Y)\sqrt{\cos^2 R - \cos^2 Y}},$$

was nach Y von R bis $\frac{1}{2}\pi$ zu integriren ist. Der erste Theil liefert bei der Integration: $\frac{1}{2}\pi \,.\, \sin R$; der zweite aber nimmt bei der Substitution:

$$\cos Y = \frac{\cos R \,.\, v}{\sqrt{1 + v^2}}$$

$$\cos^2 C - \cos^2 Y = \frac{\cos^2 C + (\sin^2 R - \sin^2 C)\, v^2}{1 + v^2}$$

$$= \frac{\cos^2 C + \sin^2 R \,.\, \cos^2 H \,.\, v^2}{1 + v^2}$$

die Gestalt an:

$$\frac{\cos C}{\cos H} \cdot \frac{\sin R \,.\, \cos H \,.\, dv}{\cos C\left(1 + \frac{\sin^2 R \,.\, \cos^2 H}{\cos^2 C}\, v^2\right)},$$

er liefert also bei der Integration von $v = \infty$ bis $v = 0$ den Beitrag:

$$-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos C}{\cos H}.$$

Demnach wird:

$$\tfrac{1}{2} P' = \cos H \,.\, \sin R \,.\, J + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{c \,.\, \cos H}{\cos C}\left\{1 - \sin R + \sin R - \frac{\cos C}{\cos H}\right\}$$
$$= \frac{\pi}{2}\left\{c\frac{\cos H}{\cos C} - h\right\},$$

oder:

$$\cos H \,.\, \sin R \,.\, J = \frac{\pi}{2}(c - h),$$

was eben die Gleichung (88) ist.

Im K. B. fehlt die Gleichungsnummer (88).

S. 64, Z. 11—13 (58, Z. 3—5). In dem auf S. 302 näher bezeichneten „Supplément" zu seinen Exercices de Calcul Intégral betrachtet Legendre unter andern auch die folgenden beiden Arten von Integralen:

$$\text{(XX)} \qquad \int_\alpha^\beta \frac{\omega \,.\, d\omega}{M \,.\, N} \cdot \sin^\lambda \omega \,.\, \cos^\mu \omega,$$

$$\text{(XXI)} \qquad \int_\alpha^\beta \frac{\Omega \,.\, d\omega}{M \,.\, N} \cdot \sin^\lambda \omega \,.\, \cos^\mu \omega,$$

wo $\alpha < \beta$ ist, λ und μ positive oder negative ganze Zahlen bedeuten und unter M, N, Ω die Ausdrücke:

$$M = \sqrt{\sin^2 \omega - \sin^2 \alpha}, \quad N = \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \omega}$$
$$\Omega = \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + \sin \omega}{1 - \sin \omega} = \log \cot\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\omega\right)$$

verstanden werden. Insbesondere zeigt er, auf Grund der Betrachtung gewisser Doppelintegrale, dass die beiden Integrale:

$$\int_\alpha^\beta \omega \,.\, d\omega \cdot \frac{N}{M}, \qquad \int_\alpha^\beta \frac{\Omega \,.\, d\omega}{\cos \omega} \cdot \frac{M}{N}$$

durch elliptische Integrale und durch Logarithmen ausdrückbar sind; setzt man bei den betreffenden Formeln im ersten Falle $\beta = \frac{1}{2}\pi$, im zweiten $\alpha = 0$, so fallen die elliptischen Integrale weg und man erhält die auf S. 302 angegebenen Ausdrücke.

Lobatschefskij meint nun offenbar, dass aus der Gleichung (88) alle die Integrale folgen, die sich bei Legendre als besondere Fälle gewisser durch elliptische Integrale und durch Logarithmen ausdrückbarer Integrale ergeben, wenn man die betreffenden Integrale so specialisirt, dass die in ihrem Ausdrucke vorkommenden elliptischen Integrale verschwinden.

In der That, da nach S. 304, Z. 12 die Gleichung: $\sin C = \sin H . \sin R$ besteht und da aus dieser folgt:

$$\cot \tfrac{1}{2} C . \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} H = \frac{1 + \sqrt{1 - \sin^2 H . \sin^2 R}}{\sin R \left(1 + \sqrt{1 - \sin^2 H}\right)},$$

so kann man die beiden Seiten der Gleichung (88) nach Potenzen von $\sin H$ entwickeln. Indem man dann die Koefficienten der Potenzen von $\sin H$ auf beiden Seiten vergleicht, erhält man unter den Integralen von der Form (XXI), bei denen $\alpha = 0$ ist, eine unendliche Reihe von solchen, die in endlicher geschlossener Form durch Logarithmen ausdrückbar sind; man braucht zu diesem Zwecke nur $X = \frac{1}{2}\pi - \omega$, $R = \frac{1}{2}\pi - \beta$ zu setzen. Insbesondere erhält man aus (88) für $H = 0$ das Integral auf S. 63, Z. 1 wieder.

Wie man von der Gleichung (88) ausgehend auch zu gewissen Integralen von der Form (XX) gelangen kann, das zeigt Lobatschefskij in dem hier weggelassenen Abschnitte seiner Abhandlung, den er hinter § 49 vor dem „Schlusse" eingeschaltet hat. Er kommt da (K. B. 1830, Theil 28, in dem Hefte für Juli und August, S. 629ff., G. A. I, S. 65) auf das Integral (88) zurück, das er nunmehr so schreibt:

$$(102) \qquad \int_b^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi . \sin \xi . \cos \xi . \log \cot \frac{1}{2}\xi}{(\sin^2 \xi - \sin^2 a)\sqrt{\sin^2 \xi - \sin^2 b}} = \frac{\pi \log (\cot \frac{1}{2} a . \operatorname{tg} \frac{1}{2} c)}{2 \sin b . \cos c},$$

unter der Voraussetzung:

$$\sin a = \sin b . \sin c.$$

Setzt man:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{\sin^2 \xi - \sin^2 b}}{\sin b . \cos c}, \quad \sin \gamma = \frac{\cos b}{\cos a},$$

wo γ der Werth von φ ist, der dem Werthe: $\xi = \frac{1}{2}\pi$ entspricht, so ergiebt sich:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\cos b}{\sin b . \cos c}, \quad \cos^2 a = \frac{\cos^2 c}{1 - \sin^2 c . \sin^2 \gamma}$$

$$\sin \xi . \cos \xi . d\xi = \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} d\varphi . \sin^2 b . \cos^2 c$$

$$\sqrt{\sin^2 \xi - \sin^2 b} = \sin b . \cos c . \operatorname{tg} \varphi$$

$$\sin^2 \xi - \sin^2 a = \frac{\sin^2 b . \cos^2 c}{\cos^2 \varphi}$$

$$\cos \xi = \frac{\cos b}{\cos \varphi . \sin \gamma} \sqrt{\sin^2 \gamma - \sin^2 \varphi}$$

und das Integral (102) bekommt die Gestalt:

$$\frac{1}{\cos c . \sin b} \int_0^{\gamma} d\varphi . \log \cot \tfrac{1}{2}\xi.$$

Durch partielle Integration erhält man hieraus:

$$\frac{1}{\cos c . \sin b} \int_b^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi . d\xi}{\sin \xi} = \frac{\cos c . \sin \gamma}{\sin b . \cos b} \int_0^{\gamma} \frac{\varphi . \sin \varphi . d\varphi}{(1 - \sin^2 c . \sin^2 \varphi)\sqrt{\sin^2 \gamma - \sin^2 \varphi}},$$

also:

$$(103) \quad \int\limits_0^{\gamma} \frac{\varphi \,.\, d\varphi \,.\, \sin\varphi}{(1 - \sin^2 c \,.\, \sin^2\varphi)\sqrt{\sin^2\gamma - \sin^2\varphi}} = \frac{\pi \,.\, \log\left\{\dfrac{\cos c + \sqrt{1 - \sin^2\gamma \,.\, \sin^2 c}}{2\cos\gamma \,.\, \cos^2\frac{1}{2}c}\right\}}{2\cos c \,.\, \sqrt{1 - \sin^2\gamma \,.\, \sin^2 c}}.$$

Entwickelt man hier beide Seiten nach Potenzen von $\sin^2 c$, so erhält man durch Vergleichung der Koefficienten eine unendliche Reihe von Integralen von der Form (XX), die in endlicher geschlossener Form ausdrückbar sind, aber allerdings nur solche, bei denen α den Werth Null hat. Setzt man insbesondere $c = 0$, so bekommt man:

$$\int\limits_0^{\gamma} \frac{\varphi \,.\, d\varphi \,.\, \sin\varphi}{\sqrt{\sin^2\gamma - \sin^2\varphi}} = -\frac{\pi}{2} \cdot \log\cos\gamma$$

und durch die Substitution: $\varphi = \frac{1}{2}\pi - X$, $\gamma = \frac{1}{2}\pi - R$ gelangt man zu dem Integrale S. 63, Z. 3.

Erwähnt sei noch, dass nach einer Bemerkung Lobatschefskijs das Integral (88) oder (102) durch Betrachtung eines Doppelintegrals abgeleitet werden kann, das den von Legendre benutzten sehr ähnlich ist, es lautet:

$$\iint \frac{dp \,.\, d\varphi \,.\, \sin^2\varphi}{(1 - p^2 \,.\, \sin^2\varphi)(1 - n^2 \,.\, \sin^2\varphi)}$$

von $p = 0$ an und von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; man hat die Integration in der einen und in der andern Reihenfolge auszuführen und nach der Integration zu setzen:

$$\sin\varphi = \frac{\cos\xi}{\cos b}; \quad p = \cos b; \quad n = \frac{\cos b}{\cos a}.$$

In Gleichung (103) hat der K. B. im Nenner des Logarithmus $\cos\alpha$ statt: $\cos\gamma$.

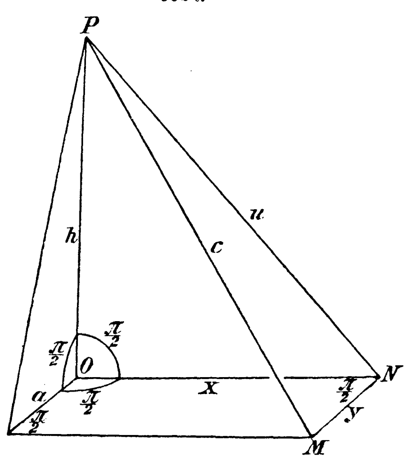


Fig. 45′.

S. 64, Z. 17—7 v. u. (58, Z. 6 bis 13). Nach S. 20, Gl. 14I ist (s. Fig. 45′), wenn man $NP = u$ setzt und U für $F(u)$ schreibt:

$$\sin X \,.\, \sin H = \sin U,$$

$$\sin Y \,.\, \sin U = \sin C,$$

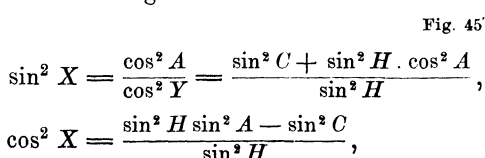
also:

$$\sin C = \sin H \,.\, \sin X \,.\, \sin Y$$

und wegen: $\sin X \,.\, \cos Y = \cos A$:

$$\sin C = \sin H \,.\, \cos A \,.\, \operatorname{tg} Y.$$

Ferner wird:



$$\sin^2 X = \frac{\cos^2 A}{\cos^2 Y} = \frac{\sin^2 C + \sin^2 H \,.\, \cos^2 A}{\sin^2 H},$$

$$\cos^2 X = \frac{\sin^2 H \sin^2 A - \sin^2 C}{\sin^2 H},$$

demnach:

$$\frac{c \,.\, \cos Y \,.\, \sin^2 X \,.\, dX}{\cos C(1 - \sin^2 H \sin^2 X)} = \frac{c \,.\, \cos A \,.\, \sin X \,.\, dX}{\cos C(\cos^2 C - \cos^2 A \,.\, \sin^2 H)}$$

und, um noch X durch C auszudrücken:

$$\sin X \,.\, dX = \frac{\sin C \,.\, \cos C \,.\, dC}{\cos X \,.\, \sin^2 H}$$

$$= \frac{\sin C \,.\, \cos C \,.\, dC}{\sin H \sqrt{\sin^2 H \,.\, \sin^2 A - \sin^2 C}}.$$

Zu integriren ist nach X von $\frac{1}{2}\pi$ bis X, während gleichzeitig Y von A bis Y geht; man erhält daher für die Integration nach C die im Texte angegebenen Gränzen.

Der andre Theil der Formel (89) ergiebt sich, wenn man X durch Y ausdrückt. Man hat zu diesem Zwecke:

$$dX = \frac{\cos A \,.\, \operatorname{tg} Y \,.\, dY}{\sqrt{\cos^2 Y - \cos^2 A}}$$

$$\frac{1}{1 - \sin^2 H \,.\, \sin^2 X} = \frac{\cos^2 Y}{\cos^2 Y - \sin^2 H \,.\, \cos^2 A}$$

zu setzen. Bei Gl. (89) hat der K. B. als Faktor vor dem zweiten Integrale: $-\cos H \,.\, \sin^2 H$ statt: $+\cos H \,.\, \sin H \,.\, \cos A$ und in dem Nenner unter dem zweiten Integrale fehlt der Wurzelausdruck.

S. 65, Z. 14—17 (67, Z. 11—13). In der That, ersetzt man a, b, c durch die im Texte angegebenen Werthe, so erhält man (vgl. S. 243, (I)):

$$\sin F(a\sqrt{-1}) = \frac{1}{\cos a}, \quad \cos F(a\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\operatorname{tg} a$$

$$\operatorname{tg} F(a\sqrt{-1}) = \frac{1}{\sqrt{-1}\sin a},$$

und die Gleichungen (17), S. 21 verwandeln sich der Reihe nach in die Gleichungen 16 II, I, III, IV.

S. 66, Z. 5—13 (67, Z. 6—1 v. u.). In der Mécanique céleste, Ière partie, livre I, Nr. 5 geht Laplace auf die Möglichkeit ein, dass die Geschwindigkeit, die durch eine momentan wirkende Kraft hervorgerufen wird, eine beliebige Funktion dieser Kraft sein könne, und er beweist, dass die Annahme einer solchen Möglichkeit durch die Erfahrung nicht bestätigt wird.

Unter v versteht er die Geschwindigkeit der Erde, die allen Körpern an der Erdoberfläche gemeinsam ist, f nennt er die Kraft, von der einer dieser Körper, M, vermöge dieser Geschwindigkeit getrieben wird, und endlich setzt er $v = f \,.\, \varphi(f)$, wo die Funktion $\varphi(f)$ durch die Erfahrung zu bestimmen ist. Ferner denkt er sich M durch eine andre Kraft f' bewegt und nennt F die aus f und f' resultirende Kraft, so dass $F \,.\, \varphi(F) = U$ die der Kraft F entsprechende Geschwindigkeit ist. Nach dem Parallelogramme der Kräfte werden f und f' parallel drei zu einander senkrechten Axen in die Komponenten a, b, c und a', b', c' zerlegt, und es ist also:

$$F = \sqrt{(a + a')^2 + (b + b')^2 + (c + c')^2},$$

und:

$$\frac{(a + a')U}{F} - \frac{v \,.\, a}{f} = (a + a')\,\varphi(F) - \frac{v \,.\, a}{f}$$

ist die Komponente der relativen Geschwindigkeit parallel der ersten Axe. Da man f' im Vergleiche mit f als unendlich klein betrachten muss, so sind auch a', b', c' unendlich klein, und es ergiebt sich:

$$F = f + \frac{aa' + bb' + cc'}{f}, \quad \varphi(F) = \varphi(f) + \frac{aa' + bb' + cc'}{f} \cdot \varphi'(f),$$

überdies wird:

$$(a + a') \cdot \varphi(F) - a \cdot \varphi(f) = a' \cdot \varphi(f) + \frac{a}{f}(aa' + bb' + cc') \cdot \varphi'(f)$$

die relative Geschwindigkeit, die M an der Erdoberfläche parallel der ersten Axe hat. Nimmt man endlich an, dass die Richtung der Kraft f' der ersten Axe parallel ist, so werden b' und c' null, und die Komponenten der relativen Geschwindigkeit von M erhalten die Werthe:

$$a'\left\{\varphi(f) + \frac{a^2}{f}\varphi'(f)\right\}, \quad \frac{a \cdot b}{f} a' \cdot \varphi'(f), \quad \frac{a \cdot c}{f} a' \cdot \varphi'(f).$$

Fallen daher die Richtungen von f und f' nicht zusammen, sind also b und c nicht beide null, so würde, falls $\varphi'(f)$ nicht null und also $\varphi(f)$ nicht konstant wäre, vermöge der Kraft $f' = a'$ eine relative Geschwindigkeit auftreten, deren Richtung zur Richtung der Kraft f' senkrecht stände. Das aber widerspricht der Erfahrung, die gemachte Annahme ist daher unzulässig.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass Lobatschefskij mit den im Texte erwähnten „Veränderungen in der Mechanik" eben das Auftreten einer solchen relativen Geschwindigkeit gemeint hat. Bei der von Laplace gemachten Annahme ist nämlich das Trägheitsgesetz auf die relative Bewegung so gut wie gar nicht mehr anwendbar, während es doch sonst, wenn die Kraft proportional der Geschwindigkeit ist, unter Voraussetzung der Euklidischen Geometrie wenigstens auf den Fall anwendbar bleibt, dass ein im absolut ruhenden Raume gewähltes Koordinatensystem einer Translationsbewegung von konstanter Geschwindigkeit unterworfen wird. Genau ebenso verhält es sich nun in der Lobatschefskijschen Geometrie, auch da verliert das Trägheitsgesetz für die relative Bewegung seine Bedeutung. Man denke sich zum Beispiel in der Lobatschefskijschen Ebene zwei rechtwinklige Koordinatensysteme, ein festes der x, y und ein bewegliches der ξ, η, und das zweite bewege sich so, dass seine ξ-Axe immer mit der x-Axe zusammenfällt, während sein Anfangspunkt $\xi = \eta = 0$ die x-Axe mit konstanter Geschwindigkeit durchläuft. Dann ist augenscheinlich für jeden absolut festen Punkt x, y, dessen y nicht verschwindet, die relative Bahn in Bezug auf das System der ξ, η eine krumme Linie, nämlich die Kurve, deren Punkte ξ, η von der ξ-Axe den Abstand: $\eta = y$ besitzen. Das Trägheitsgesetz gilt demnach in diesem einfachen Falle sogar dann nicht mehr allgemein für die relative Bewegung, wenn man einen in absoluter Ruhe befindlichen Punkt betrachtet, und es bleibt nur für die Punkte einer bestimmten Geraden, nämlich für die der x-Axe in Kraft.

Allerdings darf nicht verschwiegen werden, dass sich gegen die Laplaceschen Betrachtungen zweierlei einwenden lässt. Erstens kann man bei den Bewegungen, die auf der Erdoberfläche relativ zur Erde stattfinden, keineswegs in voller Strenge sagen, dass das Koordinatensystem blos einer Translationsbewegung mit konstanter Geschwindigkeit unterworfen ist.

Zweitens aber benutzt Laplace die Zerlegung einer Kraft nach der Regel des Parallelogramms der Kräfte, die auf die Euklidische Geometrie zugeschnitten ist und für die nichteuklidische augenscheinlich einer Umgestaltung bedarf. Der erste Einwand hat aber hier keine besondere Bedeutung, da die Voraussetzung, die Laplace stillschweigend macht, innerhalb der kurzen Dauer der Versuche sicher mit grosser Annäherung erfüllt ist. Andrerseits ist auch der zweite Einwand nicht von Belang, da auch in der nichteuklidischen Geometrie jede Kraft nach drei paarweise auf einander senkrechten Axen, die durch ihren Angriffspunkt gehen, in drei Komponenten zerlegt werden kann, deren Quadratsumme gleich dem Quadrate der Kraft ist, so dass also die Laplaceschen Formeln für die nichteuklidische Geometrie gültig bleiben.

Ueber die Zerlegung der Kräfte in der nichteuklidischen Geometrie vergleiche man die vortreffliche Darstellung in dem Werke von Jules Andrade, Leçons de mécanique physique, Paris, Société d'éditions scientifiques, 1898, S. 360ff.

Andrade geht von folgenden Voraussetzungen aus: Zwei Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkte haben eine nach Grösse und Richtung eindeutig bestimmte Resultante. Kräfte, deren Richtungen in dieselbe Gerade fallen, addiren sich algebraisch. Für die Zusammensetzung zweier und mehrerer Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkte gelten die Gesetze der Addition. Endlich: die Resultante ändert sich stetig mit ihren Komponenten und ihre Lage zu diesen Komponenten ist unabhängig von der Lage des ganzen Systems im Raume.

Sind dann X und Y zwei zu einander senkrechte Kräfte, deren Resultante R mit X den Winkel α bildet, so ist $X = R.\varphi(\alpha)$, $Y = R.\varphi(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$, wo die Funktion $\varphi(\alpha)$ gerade und $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\frac{1}{2}\pi) = 0$ ist. Ferner haben zwei Kräfte von der Grösse R, die den Winkel 2α bilden, augenscheinlich eine Resultante $2R.\varphi(\alpha)$, die den Winkel 2α halbirt. Betrachtet man daher vier Kräfte von der Grösse 1, von denen zwei den Winkel 2α bilden, während die andern mit den ersten die Winkelhalbirende gemein haben und den Winkel $2\alpha + 4\beta$ bilden, und setzt man diese vier Kräfte auf zwei verschiedene Arten zu einer Resultante zusammen, so erhält man die schon von Poisson aufgestellte Funktionalgleichung:

$$\varphi(\alpha) + \varphi(\alpha + 2\beta) = 2\varphi(\beta) \cdot \varphi(\alpha + \beta),$$

die also von dem Euklidischen Parallelenaxiome unabhängig ist. Macht man jetzt noch die Voraussetzung, dass $\varphi(\alpha)$ positiv ist, so ergiebt sich: $\varphi(\alpha) = \cos\alpha$, demnach ist in dem vorhin betrachteten Falle: $X = R\cos\alpha$, $Y = R.\sin\alpha$.

Auch sonst enthält das Andradesche Buch interessante Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie.

II. Zu der Abhandlung:

Neue Anfangsgründe der Geometrie.

S. 67, Z. 1 (219, Z. 1). Ueber den Ausdruck „Anfangsgründe" vgl. S. 238, Z. 3—5.

S. 67, Z. 4—1 v. u. (219, Z. 6—3 v. u.). Vgl. S. 238, Z. 6—10.

S. 67, Z. 6, 5 v. u., 68, Z. 1—6 (219, Z. 9—7 v. u., 220, Z. 1—3). Es ist das die Arbeit, die nach S. 237 von uns mit J. G. R. bezeichnet wird und die sich von der im Crelleschen Journale erschienenen J. G. F. nur unwesentlich unterscheidet. Lobatschefskij nimmt darin drei Gleichungen an, die zwischen den Seiten und Winkeln eines rechtwinkligen geradlinigen Dreiecks bestehen sollen, leitet daraus die Gleichungen für die Seiten und Winkel eines beliebigen geradlinigen Dreiecks ab und zeigt dann, dass diese letzteren Gleichungen ein widerspruchsfreies System bilden und eine neue Geometrie, seine imaginäre Geometrie, definiren, aus der die Euklidische Geometrie hervorgeht, wenn man die Dreiecksseiten unendlich klein annimmt.

S. 68, Z. 12—6 v. u. (220, Z. 17—12 v. u.) Die folgenden Mittheilungen über die drei ersten Ausgaben der Eléments de Géométrie von Legendre beruhen theils auf Auszügen, die ich meinem Freunde A. Tresse in Paris verdanke, theils auf den eigenen Aeusserungen Legendres in den „Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle", in den Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France, Bd. XII, Paris 1833, S. 367—410. Durch das Folgende werden zugleich die in der P. Th. 212 f. gemachten Angaben über Legendre vervollständigt und erweitert.

In der ersten, 1794 erschienenen Ausgabe der Eléments gewinnt Legendre den Euklidischen Standpunkt so: Er beweist zunächst, in Proposition XIX, den Satz, dass zwei Gerade, die auf einer dritten senkrecht stehen, niemals zusammentreffen, und stellt dann in Proposition XX den Hülfssatz auf: Steht die Gerade BD auf AB senkrecht und bildet AC mit AB den spitzen Winkel BAC, so schneiden AC und BD einander, wenn man sie genügend verlängert. Um diesen Hülfssatz zu beweisen, denkt er sich von C aus auf AB das Loth CM gefällt und zeigt, dass AM immer grösser wird, je mehr AC wächst; daraus will er dann schliessen, dass es kein letztes Loth CM geben könne und dass also AM schliesslich einmal gleich AB werde, so dass AC und BD einander schneiden Aus dem Hülfssatze ergiebt sich endlich leicht der Satz, dass zwei Gerade ein-

ander stets dann schneiden, wenn sie mit einer dritten Geraden innere Winkel bilden, deren Summe kleiner als zwei Rechte ist.

In den „Notes“ zur ersten Ausgabe bringt er dann einen analytisch-geometrischen Beweis, der in allen folgenden Ausgaben und auch auf S. 372 ff. der Réflexions wiederkehrt und der auf Folgendes hinauskommt: In jedem geradlinigen Dreiecke mit der Seite p und den anliegenden Winkeln A, B ist der dritte Winkel C vollständig bestimmt, also ist: $C = \varphi(A, B, p)$, wo φ eine Funktion bezeichnet. Wählt man nun den rechten Winkel zur Winkeleinheit, so werden A, B, C durch Zahlen zwischen 0 und 2 ausgedrückt, und wenn dann p in der Funktion φ vorkäme, so würde sich p gleich einer Zahl ergeben, was wegen der Willkür der Längeneinheit absurd ist. Demnach ist C schon durch A und B allein bestimmt. Zerlegt man jetzt ein rechtwinkliges Dreieck durch das vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Loth, so erhält man zwei rechtwinklige Dreiecke, von denen jedes mit dem ursprünglichen einen spitzen Winkel gemein hat und also nach dem eben Bewiesenen auch den zweiten. Hierin liegt, dass in jedem rechtwinkligen und also überhaupt in jedem geradlinigen Dreiecke die Winkelsumme gleich zwei Rechten ist.

In der zweiten, 1799 veröffentlichten Ausgabe der Eléments versucht Legendre in Proposition XIX direkt zu beweisen, dass die Winkelsumme

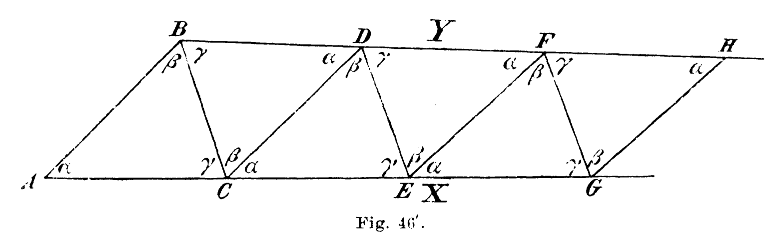


Fig. 46′.

in jedem Dreiecke ABC gleich zwei Rechten ist, und zwar verfährt er zu diesem Zwecke so: In Fig. 46′ mache man $\angle CBD = \angle ACB$ und $BD = CA$, ferner $\angle DCE = \angle BAC$, $CE = AC$ und $DF = CA$, ..., so dass also alle Dreiecke der Figur dem Dreiecke ABC kongruent werden und überdies in jedem der Punkte C, D, E, F, ... drei Winkel zusammenstossen, die den Winkeln α, β, γ des Dreiecks ABC gleich sind. Ist dann $\alpha + \beta + \gamma$ nicht gleich zwei Rechten, so ist $ACEG$ ... keine gerade Linie sondern ein Vieleck, dessen Höhlung sich entweder nach X oder nach Y hin öffnet. Oeffnet sich diese Höhlung zum Beispiel nach X hin, so muss das Vieleck $BDFH$ nothwendig eine ähnliche Krümmung besitzen und daher seine Höhlung auch auf der Seite von X haben; da aber andrerseits die Höhlung von $ACEG$ nach X hin geöffnet ist, so bewirkt derselbe Umstand, der das veranlasst, zugleich, dass die Höhlung von $BDFH$ sich auf der Seite von Y befindet. Demnach kommt man in jedem Falle auf einen Widerspruch und $\alpha + \beta + \gamma$ muss gleich zwei Rechten sein. Auf S. 383 bis 385 der Réflexions wiederholt Legendre diesen Beweis in etwas verbesserter Gestalt.

Noch ist zu bemerken, dass die „Notes“ zur zweiten Ausgabe schon die Beweise enthalten, die Legendre in der dritten Ausgabe dafür giebt, dass die Winkelsumme nicht von zwei Rechten verschieden sein kann.

Dabei fügt Legendre hinzu: „Man könnte beweisen, dass bei jedem Dreiecke das etwaige Deficit der Winkelsumme dem Dreiecksinhalte proportional ist, eine Eigenschaft, die der der sphärischen Dreiecke entspricht."

In der dritten Ausgabe von 1800 endlich beweist Legendre in Proposition XIX vollkommen streng den Hülfssatz: Die Winkelsumme im Dreiecke kann nicht grösser als zwei Rechte sein. Lobatschefskij theilt diesen Beweis in der zweiten Hälfte des § 90 seiner Neuen Anfangsgründe mit, hier S. 161, Z. 5 v. u. ff. In Proposition XX folgt dann der Lehrsatz, dass die Winkelsumme stets gleich zwei Rechten ist. Der Beweis ist folgender: Es sei (Fig. 47′) α der kleinste Winkel des Dreiecks ABC, und es sei, wenn es möglich ist:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R - Z,$$

wo Z ein positiver Winkel ist. Man mache das Dreieck BCD dem Dreieck CBA kongruent und ziehe durch D irgend eine Gerade EF, die die verlängerten Schenkel des Winkels α in zwei Punkten E und F trifft. Dass der Winkel α der kleinste Dreieckswinkel sein sollte, ist vorausgesetzt worden, um die Möglichkeit einer solchen Geraden durch D einleuchtender (plus sensible) zu machen. Die Winkelsumme des Dreiecks AEF ist nun augenscheinlich jedenfalls um $2Z$ kleiner als $2R$, wendet man daher dieselbe Konstruktion auf das Dreieck AEF an und fährt man so fort, so kommt man zu Dreiecken, deren Winkelsumme höchstens $2R - 4Z$, $2R - 8Z, \ldots$ ist und schliesslich zu einem Dreiecke mit negativer Winkelsumme, was widersinnig ist. Diesem Beweise gelten die Bemerkungen Lobatschefskijs S. 68, Z. 9—6 v. u. Legendre hat übrigens später selbst bemerkt, dass dieser Beweis auf dem „Postulatum" beruht, dass durch jeden Punkt in der Oeffnung eines Winkels Gerade gezogen werden können, die beide Schenkel des Winkels schneiden. In der Note II der zwölften Ausgabe der Eléments, Paris 1823, glaubte er auch dieses, schon 1791 von Lorenz (s. P. Th. S. 213) ausgesprochene „Postulatum" beweisen zu können, doch kann dieser neue Beweis ebensowenig befriedigen als der ursprüngliche.

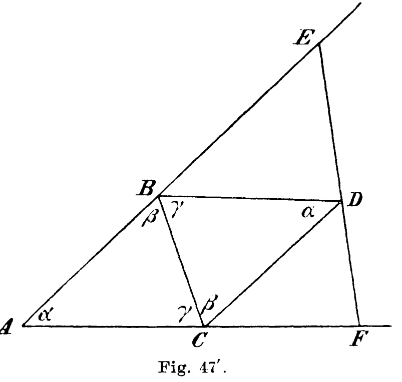


Fig. 47′.

S. 69, Z. 2—5 (220, Z. 9—6 v. u.). Dieser Beweis steht in den Réflexions auf S. 375—377.

S. 69, Z. 17 (221, Z. 8). Der Originaldruck (O.) in den K. G. S. hat: $B'C' = AB$, statt: $B'C' = AC$.

S. 70, Z. 3—17 (221, Z. 10 v. u.—222, Z. 3). Da c die grösste Seite des Dreiecks ABC ist, so ist von den drei Winkeln A, B und C höchstens der letzte $> \frac{1}{2}\pi$, aber A sicher spitz und wegen $A = A' + B'$ auch A' und B' spitz, das heisst, die Höhe $C'D = h$ (Fig. 48′) fällt nothwendig in das Innere des Dreiecks $AC'B'$. Nach S. 21, Gl. 17 I ist nun in den Dreiecken ABC und $AB'C'$:

$$\operatorname{tg} \Pi(b) \,.\, \sin B = \operatorname{tg} \Pi(c) \,.\, \sin C$$
$$\operatorname{tg} \Pi(b) \,.\, \sin A' = \operatorname{tg} \Pi(c) \,.\, \sin B',$$

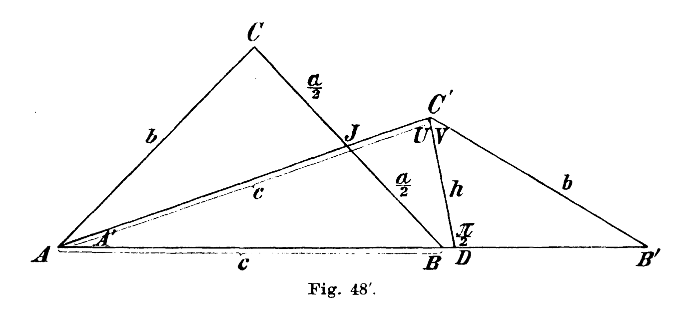


Fig. 48'.

wo wir $\Pi(b)$ statt $F(b)$ geschrieben haben, also:

$$\sin C \,.\, \sin A' = \sin B \,.\, \sin B'$$

und aus:

$$\sin(A - A') = \sin B', \quad \sin(A - B') = \sin A'$$

ergiebt sich:

$$\cot A' - \cot A = \frac{\sin B'}{\sin A \,.\, \sin A'} = \frac{\sin C}{\sin A \,.\, \sin B}$$

$$\cot B' - \cot A = \frac{\sin A'}{\sin A \,.\, \sin B'} = \frac{\sin B}{\sin A \,.\, \sin C},$$

wie im Texte. Ferner ist:

$$\cot A = \cot \tfrac{1}{2} A - \frac{1}{\sin A},$$

somit:

$$\cot A' - \cot \tfrac{1}{2} A = \frac{1}{\sin A}\left(\frac{\sin C}{\sin B} - 1\right),$$

da aber $C \geqq B$ und $< \pi - B$ ist, so ist $\sin C \geqq \sin B$, folglich $\cot A' \geqq \cot \frac{1}{2} A$, und da A und A' beide spitz sind, $A' \leqq \frac{1}{2} A$. Ebenso ist:

$$\cot B' - \cot \tfrac{1}{2} A = -\frac{1}{\sin A}\left(1 - \frac{\sin B}{\sin C}\right),$$

also: $\cot B' \leqq \cot \frac{1}{2} A$ und $> \cot A$, das heisst: $\frac{1}{2} A \leqq B' < A$.

Zur Berechnung von h erhält man nach S. 20, Gl. 14 VI aus den Dreiecken ADC' und $B'DC'$ die Gleichungen:

$$\sin \Pi(h) \,.\, \cos A' = \sin U, \quad \sin \Pi(h) \,.\, \cos B' = \sin V,$$

wozu noch: $U + V = C'$ kommt. Demnach wird:

$$\cos C' = \sqrt{(1 - \sin^2 \Pi(h) \cos^2 A')(1 - \sin^2 \Pi(h) \cos^2 B')} - \sin^2 \Pi(h) \cos A' \cos B'$$

und hieraus folgt:

$$\frac{1}{\sin^2 \Pi(h)} - 1 = \frac{\cos^2 A' + \cos^2 B' + \cos^2 C' - 1 + 2 \cos A' \cos B' \cos C'}{\sin^2 C'}$$
$$= \left(\frac{e^h - e^{-h}}{2}\right)^2$$

(vgl. S. 243, (I)), was mit der Formel des Textes übereinstimmt. Im O. fehlen bei dem Ausdrucke für $e^h - e^{-h}$ die Accente an A, B, C.

Die abgeleiteten Formeln gelten natürlich auch für jedes der folgenden Dreiecke, also bekommt man an der Gränze für $A' = B' = 0$ und $C' = S$:

$$e^h - e^{-h} = \frac{4 \cos^2 \frac{1}{2} S}{\sin S} = 2 \cot \tfrac{1}{2} S$$

und, da $e^h > 0$ ist:

$$e^h = \cot \tfrac{1}{4} S.$$

S. 70, Z. 20—13 v. u. (222, Z. 4—9). In den Réflexions sagt Legendre auf S. 390: „En analysant ainsi les trois parties de la démonstration, on trouvera que sa difficulté, si elle existe, peut au moins être fort atténuée", er meint also, die Schwierigkeit könne sehr abgeschwächt werden, was Lobatschefskij durch отклонить, ablenken, beseitigen wiedergiebt. Auf S. 390—397 der Réflexions untersucht Legendre dann, wie sich die Seiten und Winkel der auf einander folgenden Dreiecke durch die Seiten und Winkel des ursprünglichen Dreiecks ausdrücken, aber er setzt dabei die Euklidische Geometrie voraus, so dass also diese Betrachtungen wirklich vollkommen zwecklos sind.

S. 70, Z. 12—1 v. u. (222, Z. 10—18). Es ist das der in der zweiten Ausgabe der Eléments versuchte Beweis, vgl. S. 312.

S. 70, Z. 1 v. u.—71, Z. 4 (222, Z. 18—21). Zwei solche Linien sind zum Beispiele die beiden Aeste der Kurve, die aus allen Punkten einer Ebene besteht, deren Abstände von einer gegebenen Geraden gleich sind.

S. 71, Z. 5 f. (222, Z. 14, 13 v. u.). Louis Bertrand, geb. 1731, gest. 1812 hat seine Beweisversuche in dem Werke veröffentlicht: Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques, Bd. II, Genf 1774 (vgl. P. Th. 231). Legendre berichtet über diese Beweisversuche auf S. 397—400 der Réflexions. Der eine Versuch beruht auf der Einführung der Zweiecke (biangles), das heisst, der Flächenräume, die begränzt werden von zwei unendlichen Geraden AB, CD und einer endlichen Geraden AC, wobei $\angle BAC + \angle ACD = 2R$ ist. Da jeder ebene Winkel in unendlich viele solcher biangles zerlegt werden kann, so ist nach Bertrand der von den Schenkeln des Winkels begränzte Flächenraum unendlich gross von zweiter Ordnung, ein Zweieck dagegen blos unendlich gross von der ersten Ordnung. Denkt man sich nun von A aus eine Gerade AX so gezogen, dass $\angle XAC + \angle ACD < 2R$ wird, so kann der Winkelraum BAX, da er unendlich gross von zweiter Ordnung ist, nicht in dem Zweiecke $BACD$ enthalten sein, das ja blos unendlich gross von erster Ordnung ist, folglich muss AX aus dem Zweiecke $BACD$ heraustreten und CD schneiden. Den zweiten Beweisversuch Bertrands theilt Lobatschefskij selbst gleich nachher mit, S. 73, Z. 17 ff.

S. 72, Z. 4 (223, Z. 14). Das O. hat $\pi n a$ statt πn.

S. 72, Z. 7 f. (223, Z. 16 f.). Das O. hat: „Wenn wir jedoch, statt $AB = na$ anzunehmen, $AB = CD = n^2 a$ machen, so . . .".

S. 72, Z. 17 f. (223, Z. 9—7 v. u.). Es ist durchaus unklar, wie sich Lobatschefskij den Beweis hierfür im Falle $S > \pi$ gedacht hat. Auf der Kugelfläche, die ja den Fall $S > \pi$ verwirklicht, bekommt im Gegentheil der Quotient $Y : X$ für $n = \infty$ einen endlichen, von a abhängigen

Gränzwerth, und dasselbe gilt natürlich in der Ebene, wenn $S > \pi$ vorausgesetzt wird. Es scheint hieraus hervorzugehen, dass Lobatschefskij den Fall $S > \pi$ keiner eingehenden Untersuchung gewürdigt hat, jedenfalls ist es ihm und ebenso Johann Bolyai entgangen, dass auch dieser Fall zu einer in sich widerspruchsfreien Geometrie der Ebene führt, in der nur die Gerade eine endliche Länge hat. Diese Entdeckung war Riemann vorbehalten (vgl. jedoch P. Th. 252).

S. 72, Z. 12—1 v. u. (223, Z. 6—1 v. u. 224, Z. 1, 2 und 3—1 v. u.). Die Buchstaben r' und x' sind Abkürzungen für $\Pi(r)$ und $\Pi(x)$. Nach S. 38, Z. 16 ist für $na = r$:

$$Y = \frac{1}{\sin \Pi(r)} \cdot \arcsin \frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(r)} - \arcsin \frac{\cot \Pi(a)}{\cot \Pi(r)}$$

$$X = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\sin \Pi(r)} - 1 \right)$$

woraus sich der im Text angegebene Werth von $Y : X$ ergiebt, wenn man die Gleichungen (I) auf S. 243 berücksichtigt. Setzt man $x = a$, so wird der Winkel ψ in Fig. 49′ durch AFC dargestellt, und in dem rechtwinkligen Dreiecke CAF wird nach S. 20, Gl. 14 II, III, IV:

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \operatorname{tg} \Pi(r) \,.\, \cot \Pi(a), \\ \cos \Pi(a) &= \cos \Pi(r) \,.\, \sin \varphi \\ \cot \varphi &= \sin \Pi(r) \,.\, \cot \psi, \end{aligned}$$

also wird wie in der Anmerkung des Textes:

$$Y = \frac{1}{\sin \Pi(r)} \operatorname{arccot} (\sin \Pi(r) \,.\, \cot \psi) - \psi.$$

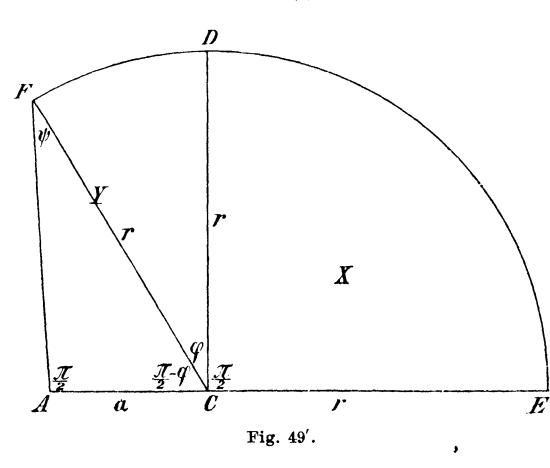


Fig. 49′.

Im O. sind bei der Formel für $Y : X$ die Ausdrücke: $e^{2na} - 1$ und $e^{2na} + 1$ vertauscht und es fehlt der Faktor 4 vor dem zweiten arcsin; ferner steht tang x statt tang x'.

Endlich wird im O. wegen der Ableitung der Formel S. 72, Z. 1 v. u. (224, Z. 1 v. u.) auf die „Imaginäre Geometrie, S. 30" verwiesen, das heisst, auf auf die I. G. R. in den K. G. S. 1835, I. S. 30, G. A. I, S. 85. In der I. G. F. findet man dasselbe, Crelle Bd. 37, S. 307, G. A. II, S. 596.

S. 73, Fig. 3. In der Figur des O. sind D' und D'' verwechselt.

S. 74, Z. 5—7 (225, Z. 4 f.). Die Figur 4 ist so gewählt, dass B'' zwischen B' und B''' fällt; dazu ist nothwendig und hinreichend, dass $CB' = r > AB'$ wird, dass also $\angle ACB' < \angle CAB'$ ist. Man erreicht das jedenfalls immer dann, wenn man den $\angle CAB \gtreqqless \frac{1}{2}\pi$ wählt. In der

Figur 4 des O. liegen die Punkte B' und B'' noch etwas weiter aus einander als in Fig. 4 auf S. 73.

S. 74, Fig. 5. Im O. steht B''' statt B', während doch $CB' = r$ ist, nicht aber CB'''; auch ist es schon deshalb angebracht B''' durch B' zu ersetzen, weil dann B'' und B''' auf die Verlängerung von AB' über B' hinaus zu liegen kommen.

S. 75, Z. 1, 3, 8 (225, Z. 5, 3 v. u., 226, Z. 2). Im O. steht überall $\frac{1}{2}$ statt $1 : 2\pi$.

S. 75, Z. 13—20 (226, Z. 6—13). Im O. hat das β überall falsches Vorzeichen; die letzte Gleichung lautet daher: $A + B + C = \pi - \alpha - \beta$, so dass allerdings in dem Bertrandschen Beweise $\alpha = \beta = 0$ vorausgesetzt zu sein scheint. In Wahrheit ist nur $\alpha = \beta$ vorausgesetzt, was freilich schliesslich auch $\alpha = \beta = 0$ nach sich zieht.

S. 75, Z. 16 v. u.—76, Z. 4 (226, Z. 20—7 v. u.). Auf S. 400—403 der Réflexions sucht Legendre den Bertrandschen Beweis zu vereinfachen, indem er nur Zweiecke (biangles) benutzt. Er zeigt zunächst, dass jedes schiefwinklige Zweieck $CABD$ (Fig. 50′) in ein rechtwinkliges $CGHD$ von demselben Flächeninhalte verwandelt werden kann. Man braucht zu diesem Zwecke nur AB in F zu halbiren und von F aus die Lothe FH und FG auf BD und AC zu fällen; aus der Beziehung: $\angle CAB + \angle ABD = 2R$ folgt dann sofort, dass die Dreiecke FGA und FHB kongruent sind und dass GFH eine gerade Linie ist. Ferner sieht man unmittelbar, dass das rechtwinklige Zweieck $CGHD$ durch die zu HG senkrechte Gerade FE in zwei gleiche Theile zerlegt wird.

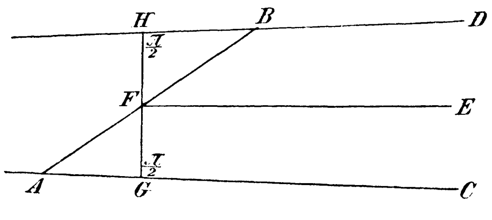


Fig. 50′.

Nunmehr denkt sich Legendre ein rechtwinkliges Zweieck $CABD$ gegeben (Fig. 51′), errichtet auf AC in M die Senkrechte MN, die BD in N trifft, und verbindet N mit der Mitte J von AB. Die Verlängerung von NJ trifft AC in P, und die Dreiecke JAP, JBN werden kongruent. Folglich ist $\angle CPN + \angle PND = 2R$, und das schiefwinklige Zweieck $CPND$ ist dem rechtwinkligen $CABD$ gleich. Macht man endlich $NQ = PN$ und $\angle NQG = \angle NPM$, so ist das schiefwinklige Zweieck $CPQY$ einerseits doppelt so gross als das rechtwinklige $CABD$ und andrerseits gleich dem rechtwinkligen Zweiecke $CMGY$, wo NG das von N aus auf QY gefällte Loth ist, das nach dem Früheren die Verlängerung von MN wird. Nun muss das rechtwinklige

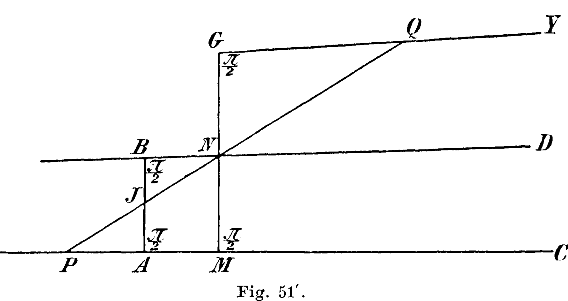


Fig. 51′.

Zweieck $CABD$ gleich der Hälfte des Zweiecks $CMGY$ sein, also gleich dem rechtwinkligen Zweiecke, das MN zur Grundlinie hat. Da aber zwei gleiche rechtwinklige Zweiecke angeblich gleiche Grundlinien haben müssen, so schliesst Legendre, dass $MN = AB$ ist, und daraus folgt dann sofort $\angle BNM = R$, sodass $ABNM$ ein Rechteck ist.

S. 76, Z. 5—7 (226, Z. 6, 5 v. u.). Den ersten Versuch dieser Art hat Wallis (1663) gemacht (vgl. P. Th. S. 19 ff.).

S. 76, Z. 17—15 v. u. (227, Z. 10—12). Vgl. S. 43.

S. 78, Z. 10—3 v. u. (229, Z. 8—14). Vgl. hierzu S. 23 f. und S. 248 ff., sowie die Bemerkungen von Saccheri, P. Th. S. 79 f.

S. 79, Z. 8—10 (229, Z. 14—13 v. u.). Auf S. 372 der Réflexions sagt Legendre: „C'est sans doute à l'imperfection du langage vulgaire et à la difficulté de donner une bonne définition de la ligne droite, qu'il faut attribuer le peu de succès qu'ont obtenu jusqu'ici les géomètres, lorsqu'ils ont voulu déduire ce théorème [über die Winkelsumme im Dreiecke] des seules notions sur l'égalité des triangles que contient le premier livre des Éléments".

S. 81, Z. 1 v. u. — 82, Z. 1 (232, Z. 1, 2). Lobatschefskij hatte schon im Jahre 1825 der physiko-mathematischen Abtheilung der Kasaner Universität ein Lehrbuch der Algebra vorgelegt, das jedoch erst 1833 in Kasan erschien und zwar unter dem Titel: Algebra ili wytschislenije konetschnych (Algebra oder die Rechnung mit endlichen Grössen).

S. 82, Z. 17—23 (232, Z. 14—18). Man findet die betreffende Stelle in der 2. Ausgabe von 1813, II. partie, chap. 6, Nr. 29, in den Oeuvres de Lagrange Bd. IX, S. 241.

S. 85, Z. 9, 8 v. u., 86, Z. 11 (236, Z. 2 v. u., 237, Z. 12). Ueber diese Benennungen vgl. S. 238, Z. 20—22.

S. 86, Fig. 10. Im O. steht hier rechts A', ... F' statt A, ... F.

S. 88, Fig. 14. Im O. fehlen die Buchstaben: a, b, e, f.

S. 88, Z. 11 v. u. (239, Z. 3). Das O. hat: cd, eh statt: ad, ch.

S. 90. In Fig. 18 des O. fehlen die Buchstaben a, b, c, d, β an den betreffenden Stellen, und an der Stelle von f und e stehen: d und c. In Fig. 19 des O. fehlen die Buchstaben α, β, γ, S, S', S'' und an Stelle von a steht α. Die Buchstaben l, m, n sollten wohl ursprünglich die Schnitte bezeichnen, die Lobatschefskij im Texte S, S', S'' genannt hat.

S. 92, Z. 16, 15 v. u. (241, Z. 2, 1 v. u.). Das O. hat: „so muss man die Linie im Vergleich mit der Grösse der Oberfläche".

S. 93 (242). Die in § 12 gegebene Erklärung des Abstandes ist ganz befriedigend, nur hätte Lobatschefskij noch ausdrücklich die Voraussetzung hinzufügen sollen, dass die beiden Punkte A und B ohne Aenderung ihres Abstandes mit einander vertauscht werden können, denn von dieser Voraussetzung macht er nachher in § 16 und besonders von § 20 an stillschweigend Gebrauch.

S. 93—154 (243—291). In diesem ganzen Abschnitte, der die Kapitel II bis V umfasst und in Heft II der K. G. S. von 1836 enthalten ist, haben die Herausgeber der G. A. das Druckfehlerverzeichniss, das Lobatschefskij selbst diesem Hefte beigegeben hat, unberücksichtigt gelassen. Zum Beispiele wird im Texte des O. bei Hinweisen auf die Figuren 46—55 stets eine um 1 kleinere Ziffer angegeben, zuweilen fehlt

auch der Hinweis auf die Figur ganz; alles das ist aber im Druckfehlerverzeichnisse des O. berichtigt. Die Herausgeber der G. A. haben nun die Figur 46 als 45a bezeichnet und dann 47—55 als 46—54. Eine im Texte des O. erwähnte Figur 55, die auf der zugehörigen Tafel fehlt, ist von den Herausgebern der G. A. neu hinzugefügt und mit 55 bezeichnet worden. In der gegenwärtigen Uebersetzung habe ich die von Lobatschefskij beabsichtigte Numerirung der Figuren wieder hergestellt und die eben erwähnte, im O. fehlende Figur mit 55a bezeichnet, s. S. 132.

S. 93—109 (243—255). Dieses ganze Kapitel lässt gar Manches zu wünschen übrig, nicht blos weil die Darstellung mehrfach an Unklarheit leidet, sondern namentlich deswegen, weil im Laufe der Entwickelung stillschweigend verschiedene Voraussetzungen gemacht werden, die bei der Erklärung der Grundbegriffe nicht zum Ausdrucke gebracht worden sind. Allerdings ist es eine der schwierigsten Aufgaben, diese Voraussetzungen in scharfer Fassung und wirklich vollständig anzugeben, und man darf deshalb den Versuch, den Lobatschefskij hier zur Begründung der Geometrie macht, nicht zu streng beurtheilen.

S. 94, Z. 10 v. u. (244, Z. 8). Das O. hat: „mit dem Halbmesser r“. In der Figur 21 des O. fehlt der Buchstabe d.

S. 95, Z. 5—7 (244, Z. 16 f.). Vermuthlich hat Lobatschefskij das so gemeint: Jede Kugelfläche mit dem Mittelpunkte d, die durch einen Punkt im Innern der zu B gehörigen Kugel ginge, hätte nothwendig mit der Kugelfläche B gewisse Punkte gemein und enthielte daher die ganze Kugelfläche B. Demnach lägen überhaupt alle Punkte der zu B gehörigen Kugel auf einer Kugelfläche mit dem Mittelpunkte d.

S. 95 f. (244 f.). Die in § 19 angegebenen Merkmale zur Unterscheidung zwischen den beiden Seiten der Ebene sind durchaus ungenügend. Es müsste heissen: der Punkt C liegt ausserhalb der Ebene, auf der Seite des Poles A, wenn er ausserhalb der Kugelfläche liegt, die um B als Mittelpunkt mit dem Halbmesser AC beschrieben wird; er liegt dann zugleich innerhalb der Kugelfläche, die um A als Mittelpunkt mit dem Halbmesser BC beschrieben wird. Entsprechend hätte man den Sachverhalt für den Punkt E auszudrücken.

S. 97. In Fig. 25 müssen die oberen G und F durch G' und F' ersetzt werden. Die Fig. 25 des O. ist unrichtig; an den Stellen von C, C' und E, E' stehen die Buchstaben: F, F' und C, C', und der jetzige Durchmesser FF' fehlt ganz. Diese Fehler sind schon in den G. A. berichtigt.

S. 98, Z. 16 (246, Z. 2 v. u.). Das O. hat DED' statt: EDE'.

S. 98, Z. 5 v. u. (247, Z. 14). Der § 23 fehlt im O., obwohl später auf ihn verwiesen wird (s. § 30 und 44). Er muss unter Anderm die Erklärung enthalten haben, dass jeder erzeugende Kreis der Ebene ein sogenannter grösster Kreis ist auf der durch ihn gehenden Kugelfläche, die den Ursprung der erzeugenden Kreise zum Mittelpunkt hat; daran konnte dann die Bemerkung geknüpft werden, dass eine Kugelfläche überhaupt von jeder Ebene durch ihren Mittelpunkt in einem solchen grössten Kreise geschnitten wird. Dadurch wird es auch verständlich, dass Lobatschefskij in § 25 den Ausdruck: grösster Kreis gebraucht, ohne ihn vorher erklärt zu haben.

S. 99, Z. 11 v. u. (247, Z. 2 v. u.). Das O. hat § 20 statt § 22.
S. 100, Z. 13 (248, Z. 15). Das O. hat ABD' statt $AB'D'$.
S. 101. In Fig. 28 des O. steht B' statt E'.
S. 106, Z. 16 (252, Z. 9 v. u.). Das O. hat $F'D'$ statt $F'D$.
S. 106, Z. 12 v. u. (253, Z. 1). Das O. hat § 29 statt § 27.
S. 108. In der Fig. 38 des O. fehlt der Buchstabe F, und der Abstand FB' ist viel grösser als FB.
S. 111, Z. 4 (257, Z. 3). Das O. hat: „die m-mal so gross ist wie b, und auf diese a so oft zu legen".
S. 111, Z. 25 (257, Z. 18). Wörtlicher wäre: „wenn man m durch n dividirt".
S. 111, Z. 10 und 5 v. u. (257, Z. 10 und 6 v. u.). Im O. finden sich hier noch die Verweisungen: (Algebra, S. 127) und: (Algebra, S. 132), die sich auf Lobatschefskijs Lehrbuch der Algebra beziehen.
S. 114, Z. 23 (259, Z. 10 v. u.). Im O. steht hier das Zeichen: $\llcorner$, das aber von § 48 an durch das Zeichen $\angle$ ersetzt wird.
S. 117, Z. 5 (261, Z. 14 v. u.). Das O. hat: $\angle AaB$ statt: $\angle Aab$.
S. 118, Z. 11 (262, Z. 13, 12 v. u.). Wörtlich übersetzt würde es statt „Aussenwinkel" heissen: „der äussere Winkel von der Verlängerung her".
S. 118, Z. 12—9 v. u. (262, Z. 4—1 v. u.). Man muss sich gleichzeitig auch den grössten Kreis, auf dem die dritte Seite liegt, fest denken.
S. 119, Z. 1, 20 (263, Z. 6, 18). Das O. hat § 40 und 46 statt: 41 und 45.
S. 120, Z. 11—17 (264, Z. 14—17). Zu diesem Beweise vgl. P. Th. S. 9, Euklid I, 5.
S. 122, Z. 5—2 v. u. (266, Z. 17 v. u.). Die Worte: „wenn sie von der Mitte . . . den Winkel halbirt" sind in den G. A. weggelassen.
S. 123, Z. 9 v. u. (267, Z. 4). Das O. hat: § 40 statt: 41.
S. 125, Z. 9 v. u. (268, Z. 16 v. u.). Das O. hat: AB' statt: $A'B$.
S. 127, Z. 10, 15 (269, Z. 7, 4 v. u.). Im O. beide Male § 42 statt 43.
S. 128, Z. 8 (270, Z. 17). Im O. BG statt FG.
S. 129, Z. 20 (271, Z. 17). Im O. § 43 statt 44.
S. 129, Z. 2, 1 v. u. (271, Z. 8 v. u.). Das O. hat: „Punkt B auf C' und C auf B'," was erst in dem folgenden Falle, wo $\angle B = \angle C$ angenommen wird, am Platze ist.
S. 131, Z. 1 v. u. (273, Z. 13). Deutlicher wäre: Die um einen Punkt als Mittelpunkt mit einem Bogen als Halbmesser auf der Kugelfläche entworfene Linie.
S. 132, Z. 18 v. u. (273, Z. 4, 3 v. u.). Es soll wohl eigentlich „Im geradlinigen Vielecke" heissen.
S. 132, Fig. 55a. Diese Figur, auf die im O. unter Nr. 55 verwiesen wird, fehlt auf der Figurentafel des O. und ist den G. A. entnommen, wo sie die Nr. 55 trägt, vgl. S. 319, Z. 3 ff.
S. 133, Z. 19 (275, Z. 11). Das O. hat AC statt: BC.
S. 134, Z. 2 (275, Z. 1 v. u.). Das O. hat ECF und EHC statt: ECG und EGC.
S. 134, Z. 7 und 10 (276, Z. 4 und 6). Das O. hat: „das von B aus auf DE gefällte Loth BH" und: $AFEB$ statt: $AFGB$.

S. 134, Z. 6—1 v. u. (276, Z. 17—20). Der Ort der Spitzen aller flächengleichen sphärischen Dreiecke mit gemeinsamer Grundlinie ist zuerst von Lexell auf analytischem Wege bestimmt und als ein Kreis erkannt worden, s. dessen „Solutio problematis geometrici ex doctrina sphaericorum", Acta Petropolitana Bd. V, Theil I, ad annum 1781, S. 112—127, Petersburg 1784. Euler hat dann die Lexellsche Lösung der Aufgabe vereinfacht in seiner Abhandlung „Variae speculationes super area triangulorum sphaericorum", in conventui exhibita 29. Jan. 1778, erschienen in den Nova Acta Petropolitana, Bd. X, ad annum 1792, S. 47—62, Petersburg 1797, und Legendre hat die Lexellsche Lösung in seine Éléments de Géométrie aufgenommen, in der Note X, 8. Ausgabe, Paris 1809, S. 320 f. Die hier im Texte gegebene rein geometrische Herleitung und Definition des betreffenden Ortes findet sich weder bei Lexell noch bei Legendre, dafür aber genau genommen in der Arbeit Eulers. Euler denkt sich nämlich auf der Kugelfläche zu beiden Seiten eines grössten Kreises, des Aequators, zwei Parallelkreise in gleichen Abständen vom Aequator, und er zeigt, dass alle sphärischen Dreiecke ABC, bei denen A und B feste Punkte des einen Parallelkreises sind und C ein beliebiger Punkt des andern Parallelkreises, gleichen Flächeninhalt haben. Er bemerkt ausserdem auch noch ausdrücklich, dass der Aequator dann immer die beiden Seiten AC und BC des Dreiecks halbirt.

Lobatschefskij muss seine Herleitung des erwähnten Ortes schon vor 1830 gekannt haben, denn im K. B., hier S. 34 f., untersucht er den Flächeninhalt der geradlinigen Dreiecke der nichteuklidischen Geometrie ganz auf dieselbe Weise. Erwähnung verdient es, dass sich auch Gauss mit jenem Orte beschäftigt hat, vgl. seine aus dem Jahre 1842 stammenden Briefe in dem Briefwechsel mit Schumacher, Bd. IV, S. 46 ff.

S. 135, Z. 15—17 (276, Z. 10 v. u.). Die Worte: „und zwar ... AK und FG" entstammen einem Zusatze, den Lobatschefskij selbst im Druckfehlerverzeichnisse des O. (K. G. S., 1836, II) hinzugefügt hat, der aber den Herausgebern der G. A. entgangen ist. Aber auch nach Hinzufügung dieses Zusatzes ist die Darstellung des Textes noch nicht ganz befriedigend, denn es fehlt vor allen Dingen der Nachweis, dass die Verlängerung des Bogens AC den durch B gezogenen Parallelkreis wirklich in einem Punkte F schneidet und dass überdies der Bogen ACF gleich π ist, was doch erforderlich ist, wenn zwischen A und F mehr als ein grösster Kreis möglich sein soll. Auch die Flächengleichheit des Kugelausschnittes $ACFHA$ und des Dreiecks ABC hätte noch etwas näher begründet werden sollen.

Lobatschefskij scheint die beschriebenen Mängel der Darstellung des Textes selbst empfunden zu haben, denn in den G. U. giebt er eine Darstellung desselben Beweises, die von diesen Mängeln frei ist; s. G. U. Nr. 27, S. 28—31, G. A. II, S. 563 f. Wir wollen jetzt die Lücken des Textes ergänzen und folgen dabei im Wesentlichen den G. U.

Die Bogen AC und DE denken wir uns verlängert, bis sie in M zusammentreffen; da $AC < \pi$ ist und also nach § 46 zugleich der Winkel ABC und der Bogen DE beide $< \pi$ sind, so fällt M sicher weder zwischen A und C, noch zwischen D und E. Wir fällen ferner von C aus auf DM das Loth CL, das nach dem Früheren gleich dem Lothe AK ist, ver-

längern sodann LM und CM über M hinaus und machen $MF = CM$, $MG = LM$. Endlich verbinden wir die Mitte H des Bogens KG mit A und F durch die Bogen HA und HF.

Nach der Konstruktion sind die Dreiecke CML und FMG kongruent, es ist also $FG = CL = AK$ und GF senkrecht zu GD, mithin F der Punkt, in dem der Bogen AC den durch B gezogenen Parallelkreis schneidet. Ferner sind die rechtwinkligen Dreiecke AKH und FGH kongruent, da die Katheten des einen den Katheten des andern gleich sind. Folglich ist $AH = HF$ und $\angle KHA = FHG$, worin liegt, dass die beiden Bogen AH und HF einem grössten Kreise angehören.

Da ACF und AHF zwei verschiedene Bogen zwischen den Punkten A und F sind, so sind sie beide gleich π, und $ACFH$ ist also wirklich ein Kugelausschnitt. Diesen Ausschnitt kann man aber als ein Dreieck mit den Ecken A, C, F auffassen; bedenkt man daher, dass $AH = HF$, $CM = MF$ ist und dass die Lothe AK und FG gleich sind, so erkennt man nach dem Früheren sofort, dass der Ausschnitt $ACFH$ dem Dreiecke ABC flächengleich und dass die Summe seiner Winkel bei A und F gleich $S - \pi$ ist.

S. 136, Z. 1—4 (277, Z. 7—10). Auf diesen Mangel, der sich in den Lehrbüchern der sphärischen Trigonometrie von Kästner und Cagnoli findet, hat bereits Mollweide hingewiesen, ohne jedoch ihm abhelfen zu können, s. v. Zachs Monatliche Correspondenz Bd. XXVI, 1812, S. 601. Kurz darauf hat dann Gerling in Zachs Correspondenz Bd. XXVII, 1813, S. 297 und in seinem „Grundriss der ebenen und sphärischen Trigonometrie“ Göttingen 1815, S. 61 f. einen rein geometrischen Beweis dafür geliefert, dass zwei symmetrische oder, wie er sie nennt, entgegengesetzte sphärische Dreiecke stets flächengleich sind. Er benutzt dabei den Umstand, dass die den symmetrischen Dreiecken umgeschriebenen Kreise gleich gross sind und dass jedes der Dreiecke mit seinem umgeschriebenen Kreise drei Oberflächensegmente bestimmt, die den beim andern Dreiecke entstehenden Segmenten gleich sind. Die von Lobatschefskij angegebene Zerlegung des sphärischen Dreiecks in drei gleichschenklige Dreiecke, aus denen sich das symmetrische Dreieck zusammensetzen lässt, hat Gerling nicht.

S. 136, Z. 9—27 (277, Z. 14—26). Eine andre Zerlegung des sphärischen Dreiecks in Stücke, aus denen sich das symmetrische zusammensetzen lässt, theilt Lobatschefskij im § 121 der N. A. mit, hier S. 194.

S. 136, Fig. 61. Der Bogen CDA' hat den Wendepunkt bei D schon in der Figur des O.

S. 138, Z. 15 ff. (279, Z. 5 ff.). Es ist merkwürdig, dass sich Lobatschefskij mit der Betrachtung der Vielecke mit zweifacher Begränzung begnügt und nicht auch zu solchen mit mehrfacher Begränzung übergeht. Man sieht daraus, dass ihm der Begriff der mehrfach zusammenhängenden Fläche noch ziemlich fern lag.

S. 139, Z. 4 f. (279, Z. 5, 4 v. u.). Das O. hat: „die Endpunkte der beiden Seiten a und c“, während doch c im Allgemeinen keine Seite des Vielecks ist.

S. 139, Z. 15 v. u. (280, Z. 14). Das O. hat: $3n - m = 2m$.

S. 141, Z. 18, 17 v. u. (281, Z. 6 v. u.). Die Worte: „und die auf ihnen errichteten Senkrechten, von denen“ sind eingeschaltet, weil sonst

der Text des O. unverständlich ist: Теперь, какія бы то ни были двѣ смѣжныя грани, съ общимъ ли бокомъ или только съ общей точкой, онѣ всегда принадлежатъ къ одному тѣлесному углу, находясь въ одной плоскости съ осью, на которой и могутъ только пересѣкаться.

S. 142, Z. 10 (282, Z. 13). Die Gleichungsnummer (4) fehlt im O., was aber in dem früher erwähnten Druckfehlerverzeichnisse berichtigt ist.

S. 142, Z. 13 f. (283, Z. 15 f.) Der Fall $n = \infty$ führt auch zu regelmässigen Körpern, die aber sonderbarer Weise von Lobatschefskij nirgends erwähnt werden. Ist $n = \infty$, so sind die Axen der körperlichen Winkel des regelmässigen Körpers und die auf den Mitten der Seitenflächen errichteten Senkrechten entweder alle zu einander parallel, oder sie stehen alle auf einer gewissen Ebene, der Mittelebene des Körpers, senkrecht.

Im ersten Falle liegen alle Ecken des Körpers auf einer Gränzkugel oder Gränzfläche (vgl. § 118 der N. A.); die Gleichung (4) bleibt anwendbar, da der Mittelpunkt des Körpers im Unendlichen liegt und der Centriwinkel gleich Null wird. Es ergiebt sich also: $4 - (m - 2)(r - 2) = 0$, das heisst, entweder: $m = 3$, $r = 6$, oder: $m = r = 4$ oder $m = 6$, $r = 3$. Demnach giebt es nur drei Arten von regelmässigen Körpern, deren Ecken auf einer Gränzkugel liegen, und zwar sind die Seitenflächen dieser Körper entweder regelmässige Dreiecke oder Vierecke oder Sechsecke. Man erhält sie, wenn man sich die Euklidische Ebene in lauter regelmässige Dreiecke, Vierecke oder Sechsecke zerlegt denkt und diese Zerlegung dann nach § 120 f. der N. A. auf eine Gränzkugel überträgt. Von jeder der drei Arten giebt es natürlich unendlich viele verschiedene, weil zu jeder Figur auf einer Gränzkugel unendlich viele ähnliche gefunden werden können.

Im zweiten Falle liegen die Ecken des Körpers alle auf einer Abstandsfläche, die dadurch definirt ist, dass alle ihre Punkte von der Mittelebene des Körpers gleich weit abstehen. Denkt man sich die Ecken des Körpers senkrecht auf die Mittelebene projicirt, so wird die Mittelebene in lauter kongruente regelmässige geradlinige m-Ecke zerlegt, von denen in jeder Ecke r zusammenstossen. Jeder solchen Zerlegung der Mittelebene entspricht auf jeder der unendlich vielen Abstandsflächen, die zu der Mittelebene konstruirt werden können, ein regelmässiger Körper. Da überdies die Winkelsumme im regelmässigen geradlinigen m-Ecke $< (m - 2)\pi$ ist, aber dem Werthe $(m - 2)\pi$ beliebig nahe kommen kann, wenn nur die Seiten des m-Ecks klein genug gewählt werden, so müssen die positiven ganzen Zahlen m und r nothwendig der Bedingung genügen $r(m-2) > 2m$, sonst sind sie aber ganz beliebig. Hat man m und r so gewählt, dass diese Bedingung erfüllt ist, so ist die Zerlegung der Mittelebene vollkommen bestimmt, denn es giebt dann, wie man sich leicht überzeugt, stets ein aber auch nur ein regelmässiges m-Eck, dessen Winkel $= 2\pi : r$ sind.

S. 142, Z. 20 v. o., 4 v. u., 143, Z. 13 v. u. (282, Z. 9 v. u., 283, Z. 3 v. o., 6 v. u.). Das O. hat кубъ, Kubus, was hier mit Hexaeder wiedergegeben ist, weil „Würfel“ zu sehr Euklidische Vorstellungen erweckt. Ebenso hätte schon auf S. 9 Würfel durch Hexaeder ersetzt werden sollen.

S. 143, Z. 9 v. u. — 144, Z. 6 (283, Z. 2 v. u. — 284, Z. 8). Euler hat seinen Polyedersatz in zwei Abhandlungen der Novi commen-

tarii der Petersburger Akademie veröffentlicht und zwar in Bd. IV, ad annum 1752 et 1753, erschienen Petersburg 1758. In der ersten Abhandlung: Elementa doctrinae solidorum, S. 109—140 ist der Satz aufgestellt, aber, wie Euler selbst sagt, nur durch Induktion erschlossen, noch nicht bewiesen. Die zweite Abhandlung dagegen: Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita, S. 140—160, enthält einen Beweis, den Euler bei nochmaliger Untersuchung des Gegenstandes gefunden hatte. Der Legendresche Beweis steht im VII. Buche der Éléments, in der 8. Ausgabe, Paris 1809 auf S. 228 f., Proposition XXV. Cauchys Beweis findet man in der Abhandlung: Recherches sur les polyèdres, Journal de l'École polytechnique Tome IX, Cahier 16, Paris 1813 und zwar im zweiten Theile der Abhandlung, S. 76—86. Ueber die Fälle, in denen der Eulersche Satz nicht mehr gültig ist, hat Lhuilier zu derselben Zeit eine Arbeit veröffentlicht, s. dessen Mémoire sur la polyédrométrie, contenant une démonstration directe du Théorème d'Euler sur les polyèdres, et un examen des diverses exceptions auxquelles ce théorème est assujetti. Extrait par Gergonne in Gergonnes Annales III, 1812—13, S. 169—189. Lhuilier unterscheidet drei Arten von Ausnahmen; unter die eine Art fällt die von Lobatschefskij angegebene.

S. 144, Z. 18 (284, Z. 15). Das O. hat § 70 statt 69.

S. 146, Z. 5, 6 (285, Z. 9, 8 v. u.). Das O. hat beide Male 2 statt: — 2.

S. 146, Z. 14—12 v. u. (286, Z. 10 f.). Beim Beweise dieses Satzes setzt Lobatschefskij stillschweigend voraus, dass alle Seiten des betrachteten Dreiecks $< \pi$ sind, obwohl er das in dem Satze selbst nicht ausdrücklich hervorhebt. Wäre nämlich zum Beispiel die Seite $B'C > \pi$, so wäre nach § 46 auch $\angle B'AC$ und Bogen $BC > \pi$, die beiden Bogen $B'C$ und BC hätten also einen zwischen B und C und zwischen B' und C liegenden Punkt gemein, und die Schlüsse des Textes wären nicht mehr anwendbar. Will man die Beschränkung, dass alle Seiten $< \pi$ sein sollen, vermeiden, so muss man den Satz folgendermassen fassen:

Die Summe zweier Winkel eines sphärischen Dreiecks ist stets zugleich mit der Summe der beiden gegenüberliegenden Seiten $> \pi$, $= \pi$, $< \pi$, vorausgesetzt dass die dritte Seite $< \pi$ ist. Ist die dritte Seite $> \pi$, so ist die genannte Winkelsumme $> \pi$, $= \pi$, $< \pi$, jenachdem die Summe der beiden gegenüberliegenden Seiten $< \pi$, $= \pi$, $> \pi$ ist.

In der That, ist in dem Dreiecke BAC die dritte Seite $BC < \pi$ und die beiden andern Seiten auch $< \pi$, so treten die Ueberlegungen des Textes in Kraft; ist aber $BC < \pi$ und eine der andern Seiten BA, $CA > \pi$, so ist nach § 46 einer der beiden Winkel BCA, $CBA > \pi$, also der Satz ebenfalls richtig. Ist endlich die dritte Seite $BC > \pi$, so ersetzt man BC durch eine Ergänzung zu 2π und erhält ein Dreieck, in dem die dritte Seite $< \pi$ ist. Wendet man den ersten Theil des Satzes auf dieses Dreieck an, so erkennt man, dass für das ursprüngliche Dreieck der zweite Theil des Satzes gilt.

S. 146, Z. 4 v. u. (286, Z. 15). Die Verweisung auf § 33 ist unverständlich; vielleicht wollte Lobatschefskij auf den im Drucke aus-

gefallenen § 23 verweisen, in dem er, s. S. 319, den Begriff des grössten Kreises auf einer Kugelfläche erklärt hatte. Vermuthlich hatte er in § 23 auch bemerkt, dass alle grössten Kreise einer Kugelfläche kongruent sind und dass zwei verschiedene grösste Kreise einander stets halbiren.

S. 147, Z. 1 (286, Z. 17). Das O. hat ABC statt ACB.

S. 147, Z. 8 (286, Z. 13 v. u.). In § 68 ist ja bewiesen, dass die Winkelsumme im sphärischen Dreiecke $> \pi$ ist, obwohl das dort nicht ausdrücklich ausgesprochen wird.

S. 147, Z. 12 (286, Z. 10 v. u.). Im O. steht: $ACB + ABC'$.

S. 147, Z. 15—19 (286, Z. 7—5 v. u.). Das O. hat irrthümlich: $> \pi$, $= \pi$, $< \pi$. Selbstverständlich ist der Satz nur richtig, wenn die Seite, durch deren Verlängerung der Aussenwinkel entsteht, $< \pi$ ist. Ist diese Seite $> \pi$, so muss man allerdings $< \pi$, $= \pi$, $> \pi$ durch: $> \pi$, $= \pi$, $< \pi$ ersetzen.

S. 147, Z. 22—28 (286, Z. 4—1 v. u.). Das O. hat: $ABD > ACB$, wenn $AB + AC > \pi$; $ABD < ACB$, wenn $AB + AC < \pi$; $ABD > BAC$, wenn $AC + BC > \pi$; $ABD < BAC$, wenn $AC + BC < \pi$. Zu bemerken ist, dass bei den drei ersten Ungleichheiten vorausgesetzt wird: $BC < \pi$, bei den drei letzten: $BA < \pi$.

S. 147, Z. 11—7 v. u. (287, Z. 1—3). Später in § 79, S. 151, Z. 3—1 v. u. (289, Z. 7—5 v. u.) wird noch der im Texte nicht bewiesene Satz benutzt:

Ist in einem sphärischen Dreiecke eine Seite $< \pi$ und die beiden andern $< \frac{1}{2}\pi$, so sind die Winkel, die den beiden letzten Seiten gegenüberliegen, spitz.

Um diesen Satz zu beweisen, nehmen wir an, in dem Dreiecke ABC (Fig. 52') sei $a < \frac{1}{2}\pi$, $b < \frac{1}{2}\pi$, $b \leqq a$, aber $c > \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$; wäre nämlich auch $c < \frac{1}{2}\pi$, so ergäbe sich die Richtigkeit unsers Satzes schon aus dem im Texte Gesagten. Wir machen $CD = CB$, dann ist nach § 46 $BD < \pi$, ferner ist $BC + DC < \pi$, also (s. § 74) $\angle DBC + \angle BDC < \pi$, oder da $\angle DBC = \angle BDC$ ist (§ 64), $\angle DBC$ und erst recht $\angle ABC$ spitz.

Wir machen ferner $BE = BC$, dann ist nach § 46 wieder $EC < \pi$, ferner ist $EB + CB < \pi$, also nach § 74:

$$\angle CEB + \angle ECB = 2 \angle CEB < \pi,$$

das heisst $\angle CEB$ spitz und CEA stumpf. Endlich ist $BE < \pi$, $\angle EBC + \angle BEC < \pi$, also $BC + EC < \pi$, mithin: $EC < \pi - a$. Daraus aber folgt:

Fig. 52'.

$$EC + AC < \pi - a + b < \pi,$$

wegen $EA < \pi$ ergiebt sich daher nach § 74: $\angle CEA + \angle CAE < \pi$, und da $\angle CEA$ stumpf ist, so ist $\angle CAB$ nothwendig spitz.

S. 148, Z. 14—16 (287, Z. 15 f.). Die Entfernung zwischen dem Fusspunkte des Lothes und dem Scheitel des Winkels ist ja stets $< \pi$.

S. 148, Z. 18—20 (287, Z. 17 f.) Im Beweise dieses Satzes hätte

noch bemerkt werden sollen, dass einer Seite, die $> \pi$ ist, nach § 46 sowieso der grösste Winkel des Dreiecks gegenüberliegt, dass man also ohne Beschränkung der Allgemeinheit a und $c < \pi$ annehmen kann.

S. 149, Z. 11—13 (288, Z. 3 f.). Das O. hat: $BA'C > BC'A$; $AC < \pi$; $BC > AB$.

S. 149 f. § 78. Die Kreise, von denen hier gesprochen wird, sind sämtlich grösste Kreise.

S. 149, Z. 4 v. u. (288, Z. 17). Das O. hat: $BA < \pi$, $BD < \frac{1}{2}\pi$.

S. 150, Z. 6 f. (288, Z. 13, 12 v. u.). Das bezieht sich auf den Schluss von § 66, S. 132, Z. 11—18.

S. 150, Z. 12—20 (288, Z. 10—6 v. u.). Es wird natürlich wieder vorausgesetzt, dass der Bogen DA auf dem Halbkreise ABC senkrecht steht; DA ist also der kürzeste Abstand des Punktes D von diesem Halbkreise.

S. 150 ff. § 79. Das ist der bekannte Satz über das Polardreieck, der hier allerdings in einer unvollkommenen Form erscheint. Er lässt sich nämlich in der Fassung des Textes auf solche sphärische Dreiecke, in denen eine Seite $> \pi$ ist, nicht übertragen. Eine allgemein gültige Fassung des Satzes kann man erst aufstellen, wenn man nach dem Vorgange von Möbius statt der Winkel des sphärischen Dreiecks deren Nebenwinkel einführt und mit Buchstaben bezeichnet. Vgl. darüber E. Study, Sphärische Trigonometrie u. s. w., Abh. der Leipz. Ges. d. Wiss., math. phys. Klasse Bd. XX, Nr. II, Leipzig 1893, S. 92. Sonderbar ist es, dass Lobatschefskij den Begriff des Polardreiecks gar nicht erwähnt, obwohl er in § 25 den Begriff „gegenüberliegende Pole eines grössten Kreises" ausdrücklich einführt. Vielleicht hat er das deshalb gethan, weil er auf das in § 79 angewendete Beweisverfahren besonderes Gewicht legte. Dieses Verfahren ist zwar etwas umständlich, aber doch entschieden originell.

S. 151, Z. 13—38 (289, Z. 16—28). Diese Betrachtungen zeigen, dass zu jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke, dessen Katheten beide $< \frac{1}{2}\pi$ sind, ein andres rechtwinkliges Dreieck von derselben Beschaffenheit gehört. Sind:

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ A & B & \frac{1}{2}\pi \end{array}$$

die Seiten und Winkel des ersten Dreiecks, so haben die Seiten und Winkel des andern die Werthe:

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{2}\pi - A & b & B \\ \frac{1}{2}\pi - a & c & \frac{1}{2}\pi. \end{array}$$

Um diese Dreiecke in der Fig. 71 besser hervortreten zu lassen, sind sie stärker ausgezeichnet, was im O. nicht der Fall ist.

Selbstverständlich gehört auf ganz dieselbe Weise zu dem ursprünglichen Dreiecke noch ein zweites mit den Seiten und Winkeln:

$$\begin{array}{ccc} a & \frac{1}{2}\pi - B & A \\ c & \frac{1}{2}\pi - b & \frac{1}{2}\pi. \end{array}$$

Dieser Satz über das rechtwinklige sphärische Dreieck ist allem Anscheine nach Lobatschefskij eigenthümlich und bisher vollständig un-

bekannt geblieben. Er ist deshalb merkwürdig, weil er den innern Grund der Neperschen Regel aufdeckt. Diese Regel sagt nämlich aus, dass im rechtwinkligen sphärischen Dreiecke der Cosinus jedes Stücks gleich ist dem Produkte aus den Cotangenten der beiden anliegenden Stücke und gleich dem Produkte aus den Sinus der beiden nicht anliegenden Stücke; der rechte Winkel wird dabei nicht mitgezählt, und die Katheten sind durch ihre Ergänzungen zu $\frac{1}{2}\pi$ zu ersetzen. Denkt man sich daher aus den Stücken des Dreiecks den Cyklus gebildet:

$$\ldots,\ \tfrac{1}{2}\pi - b,\ \tfrac{1}{2}\pi - a,\ B,\ c,\ A,\ \tfrac{1}{2}\pi - b,\ \tfrac{1}{2}\pi - a,\ B,\ c,\ A,\ \ldots$$

so ist der Cosinus jedes Gliedes des Cyklus gleich dem Produkte aus den Cotangenten der beiden benachbarten und gleich dem Produkte aus den Sinus der beiden nicht benachbarten Stücke. Ersetzt man nun die Stücke des ursprünglichen Dreiecks durch die Stücke eines der beiden neuen Dreiecke, die nach Lobatschefskij dazu gehören, so bleibt der Cyklus als Ganzes ungeändert, abgesehen vom Durchlaufungssinne, der in den entgegengesetzten übergeht; ausserdem wird aber zugleich c durch eines der benachbarten Stücke ersetzt. Vertauscht man andrerseits a mit b und A mit B, so bleibt der Cyklus wieder, abgesehen von dem Durchlaufungssinne, ungeändert, während c diesmal an seiner Stelle bleibt. Wendet man daher die beiden beschriebenen Operationen nach einander an, so ist das Ergebniss einfach eine cyklische Vertauschung der Glieder unsers Cyklus. Hierin liegt, dass die Gleichungen:

$$\cos c = \cot A \,.\, \cot B, \quad \cos c = \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - a\right) . \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - b\right)$$

richtig bleiben, wenn man für $\frac{1}{2}\pi - a$, B, c, A, $\frac{1}{2}\pi - b$ fünf aufeinanderfolgende Glieder des Cyklus setzt. Das aber ist eben die Nepersche Regel.

Durch die Betrachtungen des Textes ist allerdings bewiesen, dass zu jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke, dessen Katheten $< \frac{1}{2}\pi$ sind, ein ebensolches Dreieck gehört. Es ist aber kaum anzunehmen, dass Lobatschefskij das Entsprechen zwischen beiden Dreiecken auf dem im Texte angegebenen Wege gefunden hat. Vielmehr wird er den Beweis des Textes erst nachträglich entdeckt haben, nachdem er dieses Entsprechen vorher auf einem andern Wege erkannt hatte. Es liegt nahe zu vermuthen, dass dieser „andre Weg“ durch die Beziehung gegeben ist, die Lobatschefskij schon 1829 zwischen den rechtwinkligen geradlinigen Dreiecken der nichteuklidischen Geometrie und den rechtwinkligen sphärischen Dreiecken hergestellt hat, s. hier S. 18 f. In den N. A. entwickelt Lobatschefskij diese Beziehung erst später, in § 136, weil sie den Begriff des Parallelwinkels voraussetzt. Wir ziehen aber doch vor, gleich jetzt zu zeigen, wie aus der letztern Beziehung der vorhin besprochene Uebergang von einem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke zu einem andern abgeleitet werden kann.

Nach S. 18 f. und nach § 136 der N. A. entspricht jedem rechtwinkligen geradlinigen Dreiecke $\varDelta$ mit den Seiten und Winkeln:

$$\varDelta \left\{ \begin{array}{ccc} l & m & n \\ \Pi(l') & \Pi(m') & \frac{1}{2}\pi \end{array} \right.$$

ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck $\varDelta'$ mit den Seiten und Winkeln:

$$\varDelta' \begin{cases} \Pi(n) & \Pi(l') & \Pi(m) \\ \Pi(l) & \frac{1}{2}\pi - \Pi(m') & \frac{1}{2}\pi, \end{cases}$$

wo $\Pi(a)$ der zu dem Lothe a gehörige Parallelwinkel ist (vgl. S. 239 und N. A. § 93) und wo also die Winkel $\Pi(l)$, $\Pi(m)$, $\Pi(n)$, $\Pi(l')$, $\Pi(m')$ sämtlich $< \frac{1}{2}\pi$ sind. Nach S. 241 f. ist überdies auch umgekehrt das Dreieck $\varDelta$ durch das Dreieck $\varDelta'$ vollständig bestimmt, und man kann durch geeignete Wahl des Dreiecks $\varDelta$ erreichen, dass $\varDelta'$ jedes beliebige rechtwinklige sphärische Dreieck wird, dessen beide Katheten $< \frac{1}{2}\pi$ sind. In den Ausdrücken für die Stücke des Dreiecks $\varDelta'$ treten nun offenbar die Katheten und die spitzen Winkel des Dreiecks $\varDelta$ nicht symmetrisch auf. Zu $\varDelta$ gehört daher noch ein zweites rechtwinkliges sphärisches Dreieck:

$$\varDelta'' \begin{cases} \Pi(n) & \Pi(m') & \Pi(l) \\ \Pi(m) & \frac{1}{2}\pi - \Pi(l') & \frac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

Demnach bekommt man zu jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke $\varDelta'$, dessen Katheten beide $< \frac{1}{2}\pi$ sind, ein ebensolches Dreieck $\varDelta''$ zugeordnet. Setzt man endlich:

$$\Pi(n) = a, \quad \Pi(l') = b, \quad \Pi(m) = c, \quad \Pi(l) = A, \quad \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(m') = B$$

oder:

$$\Pi(n) = b, \quad \Pi(l') = a, \quad \Pi(m) = c, \quad \Pi(l) = B, \quad \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(m') = A,$$

so findet man wieder die beiden rechtwinkligen sphärischen Dreiecke, die nach dem Früheren zu dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke mit den Seiten und Winkeln: a, b, c, A, B gehören, sobald $a < \frac{1}{2}\pi$, $b < \frac{1}{2}\pi$.

S. 151, Z. 3—1 v. u. (289, Z. 7—5 v. u.). Vgl. die Anmerkung zum Schlusse des § 74, S. 325, Z. 20 ff.

S. 152, Z. 17, 15 und 14 v. u. (290, Z. 11, 13 und 13). Das O. hat: $b < \frac{1}{2}\pi$ statt: $b < \pi$; $\frac{1}{2}\pi - B$ und $\frac{1}{2}\pi - b$ statt: $\pi - B$ und: $\pi - b$.

S. 152, Z. 3, 2 v. u. (290, Z. 17 f.). Nach § 78 ist wegen $b < \frac{1}{2}\pi$ und $c - \frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2}\pi$ auch $B < \frac{1}{2}\pi$, und nach § 75 ist wegen $B < \frac{1}{2}\pi$ auch $A < \frac{1}{2}\pi$. Das „folglich“ verweist auf den S. 151 bewiesenen Satz über das rechtwinklige sphärische Dreieck.

S. 153, Z. 11 (290, Z. 9 v. u.). Das O. hat b statt: a.

S. 153, Z. 14—17 (290, Z. 7—5 v. u.). Im Vorhergehenden sind nämlich die folgenden Fälle erledigt:

zwei Seiten $< \frac{1}{2}\pi$, eine $< \pi$

zwei Seiten $= \frac{1}{2}\pi$, eine $< \pi$

eine Seite $= \frac{1}{2}\pi$, eine $< \frac{1}{2}\pi$, eine $> \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$

zwei Seiten $> \frac{1}{2}\pi$, eine $< \pi$,

und damit sind in der That alle möglichen Fälle erschöpft, sobald die drei Seiten sämtlich $< \pi$ sind. — Dass die Summe der drei Seiten $< 2\pi$ ist, folgt ohne Weiteres daraus, dass $\pi - a + \pi - b + \pi - c > \pi$ werden muss.

S. 153, Z. 9, 8 v. u. (291, Z. 3 f.). Ist $c < \frac{1}{2}\pi$, so sind x und $c - x$

von selbst $< \frac{1}{2}\pi$ und also nach § 78 auch b und $a < \frac{1}{2}\pi$. Ist $c \geqq \frac{1}{2}\pi$, so sind wegen der im Satze gemachten Voraussetzung a und b beide $< \frac{1}{2}\pi$, also, wieder nach § 78, auch $c - x$ und x beide $< \frac{1}{2}\pi$.

S. 154, Z. 3—5 (291, Z. 5—3 v. u.). Hierbei wird selbstverständlich vorausgesetzt, dass die dritte Seite $< \pi$ ist.

S. 154, Z. 12—18 (292, Z. 3—8). Es dürfte angebracht sein, auf einen wesentlichen Unterschied aufmerksam zu machen, der sich bei der Betrachtung der Kongruenzsätze zwischen der Euklidischen und der nichteuklidischen Geometrie herausstellt. Allerdings haben beide Geometrieen das gemeinsam, dass jeder Kongruenzsatz zugleich einen Satz in sich schliesst, der aussagt: ein geradliniges Dreieck ist, abgesehen von seiner Lage in der Ebene, vollständig bestimmt, sobald drei seiner Stücke gegeben sind, vorausgesetzt nur, dass die gegebenen Stücke überhaupt einem Dreiecke angehören können. Während aber in der Euklidischen Geometrie die Konstruktion, durch die das Dreieck aus den gegebenen Stücken gefunden wird, immer unmittelbar auf der Hand liegt, ist das in der nichteuklidischen Geometrie nur bei gewissen der Kongruenzsätze der Fall, nämlich bei denen der §§ 81, 82, 84, 85. Bei den Sätzen in § 87 und 92 dagegen ist erst noch ein rein geometrischer Beweis dafür erforderlich, dass das Dreieck aus den betreffenden drei Stücken wirklich mit Zirkel und Lineal konstruirt werden kann; denn man wird sich doch nicht damit begnügen wollen, dass das Vorhandensein des Dreiecks aus der Stetigkeit folgt. Es ist ein entschiedener Mangel, dass Lobatschefskij auf diese und ähnliche Fragen gar nicht eingeht und überhaupt die Konstruktionen der nichteuklischen Geometrie ganz vernachlässigt. Derselbe Vorwurf ist übrigens der üblichen Behandlung der sphärischen Geometrie zu machen, nur dass da die Konstruktionen wesentlich leichter sind als in der hier betrachteten.

S. 154, Z. 7—5 v. u. (292, Z. 8, 7 v. u.). Das muss man im Folgenden immer im Auge behalten.

S. 155, Z. 14, 13 v. u. (293, Z. 16 v. u.). Das O. hat: „Im Kreise liegen gleichen Sehnen gleiche Winkel gegenüber", was keinen Sinn hat, so lange der Satz des § 82 noch nicht bewiesen ist.

S. 155, Z. 4 v. u. (293, Z. 12 v. u.). Das O. hat AC statt: AB.

S. 157, Z. 3 (294, Z, 9). Das O. hat: $AB = A'B'$ statt: $BC = B'C'$.

S. 157. § 85. Der Satz ist noch nicht scharf genug gefasst, es müsste eigentlich heissen: „und überdies entweder beide Dreiecke spitzwinklig sind oder beide stumpfwinklig, jedoch so, dass der stumpfe Winkel in beiden Dreiecken entweder zwischen den gleichen Seiten liegt oder gegenüber der grösseren". Beim Beweise wird in der That stillschweigend diese Voraussetzung gemacht. Dass sie nothwendig ist, liegt auf der Hand.

S. 158, Z. 12 v. u. (295, Z. 16). Das O. hat: $= \pi$ statt: $= \frac{1}{2}\pi$.

S. 158, Z. 10—4 v. u. (295, Z. 18—16 v. u.). Hier ist der Fall $BA = BC = \frac{1}{2}\pi$ übersehen; dann ist nämlich der beschriebene Kreis eben der Bogen AC. In den Satz hätte daher noch die Bedingung aufgenommen werden sollen, dass die gleichen Seiten nicht beide gleich $\frac{1}{2}\pi$ sein dürfen. Will man auch den Fall berücksichtigen, dass eine der Seiten $> \pi$ ist, so muss noch die Möglichkeit: $BA = \frac{1}{2}\pi$, $BC = \frac{3}{2}\pi$ ausgeschlossen werden.

S. 159, Z. 1 (295, Z. 14 v. u.). Das O. hat: A', C statt: A, C.

S. 159, Z. 12—15 (295, Z. 6—4 v. u.). Hierbei wird vorausgesetzt,

dass die dritte Seite in beiden Dreiecken $< \pi$ ist, vgl. die Anmerkung zu § 74, S. 324, Z. 24 ff.

S. 159, Z. 18 v. u. (296, Z. 1). Das O. hat Fig. 83 statt 81.

S. 160, Z. 4 (296, Z. 13). Das O. hat Fig. 84 statt 82.

S. 160, Z. 17—22 (296, Z. 15—11 v. u.). Ist nämlich $\angle C = \frac{1}{2}\pi$ und $\angle A$ spitz, so kann BC nicht gleich $\frac{1}{2}\pi$ sein.

S. 160, Z. 16 v. u. (296, Z. 9 v. u.). Das O. hat Fig. 85 statt 83.

S. 161, Z. 11 (297, Z. 9). Das O. hat Fig. 46 statt 47.

S. 161, Z. 17 v. u. (297, Z. 17). Das O. hat $\angle FCA$ statt FAC.

S. 161, Z. 5 v. u.—162, Z. 10 v. u. (297, Z. 6 v. u.—298, Z. 17). Das ist eben der Beweis, den Legendre 1800 in der dritten Ausgabe seiner Éléments de Géométrie veröffentlicht hat, Proposition XIX, vgl. S. 313.

S. 162, Z. 11 v. u. (298, Z. 16). Zunächst findet man:

$$c + na + c > nb.$$

S. 162 ff., § 91. Diesen Satz hat Saccheri bereits 1733 bewiesen, s. P. Th. S. 67, Lehrsatz XV, ebenso Lambert 1766, s. P. Th. S. 185, § 51.

S. 163, Z. 18, 13 und 2 v. u. (299, Z. 5, 7 und 14). Das O. hat $ABCD$ statt: $ABFE$; ABC statt BAC und: ABC statt ADE.

S. 164, Z. 7 (299, Z. 17 v. u.). Man findet den Legendreschen Beweis in den Réflexions von 1833 an der auf S. 313, Z. 10—9 v. u. angeführten Stelle. Vgl. P. Th. S. 320.

S. 164, Z. 14—12 v. u. (299, Z. 3—1 v. u.). Weil nämlich nach § 68 und 80 die Winkelsumme des sphärischen Dreiecks gleich π wird, sobald der Inhalt des Dreiecks verschwindet.

S. 164 f. § 92. Auch dieser Satz findet sich im Grunde schon bei Saccheri, denn Saccheri beweist, dass Dreiecke mit gleichen Winkeln aber ungleichen Seiten nicht möglich sind, sobald die Winkelsumme im Dreiecke von π verschieden ist, s. P. Th. S. 84 f. Dieselbe Bemerkung hat auch Lambert gemacht, s. P. Th. S. 200 f.

S. 166, Z. 19, 20 (302, Z. 1, 1). Das O. hat EG statt CG und EG' statt CG'.

S. 166, Z. 8, 7 v. u. (302, Z. 9, 10). Das O. hat beide Male AD statt DA. Ueberhaupt legt Lobatschefskij keinen Werth darauf, bei parallelen Geraden die Buchstaben in der Anordnung zu nennen, dass die Seite des Parallelismus (vgl. § 109) hervortritt. Ebenso nennt er bei kongruenten Dreiecken die Ecken sehr häufig in einer Reihenfolge, die nicht erkennen lässt, welche Ecken einander entsprechen.

S. 167, Z. 11 f. (302, Z. 12 v. u.). Ueber die Benennung „Parallelwinkel" vgl. S. 239.

S. 168, Z. 7, 6 v. u. (303, Z. 9, 8 v. u.). Der Winkel DAC ist vollkommen willkürlich innerhalb der Oeffnung des Winkels DAB, der nach § 53 grösser ist als $DE'K'$.

S. 169, Z. 12 v. u. (304, Z. 15). Hier hätte bemerkt werden sollen, dass FE sicher weder AB noch CD schneiden kann.

S. 170 f., § 98. Dieser Satz findet sich schon 1825 bei Taurinus, s. P. Th. S. 263.

S. 171, Z. 5 (305, Z. 11 f.). Das O. hat § 91 statt 90 und $CD' = AD$ statt: $CD' = AD'$.

S. 171, Z. 16—21 (305, Z. 19—21). Dass der $\angle DGE \leqq \frac{1}{2}\pi$ ist, ergiebt sich eigentlich erst, sobald bewiesen ist, dass GD und EF parallel sind. Hier ist es übrigens gleichgültig, denn es kommt nur darauf an, dass CD das Loth AE schneidet, das aber würde auch dann der Fall sein, wenn $\angle BAE > \angle BAC$ wäre. Dann bestimmten nämlich die Lothe AC und AE zusammen mit dem vom C aus auf FE gefällten Lothe CE' ein Viereck $ACE'E$, aus dem DC nicht wieder heraustreten könnte, ohne AE zu schneiden, denn DC und FE können keinen Punkt gemein haben, weil es sonst von diesem Punkte aus zwei verschiedene Parallelen zu AB gäbe.

S. 171, Z. 5, 4 v. u. (305, Z. 4 v. u.). Hier ist der $\angle BAC$ wieder spitz, und wenn man von C aus auf FE das Loth CE' fällt, so wird auch $\angle DCE'$ spitz. Der Fusspunkt E des Lothes AE muss daher zwischen E' und F fallen, folglich schneidet CD das Loth AE sicher in einem Punkte G zwischen C und D.

S. 172, Z. 3 (306, Z. 1). Das O. hat FE und DA' statt EF und $A'D$.

S. 172, Z. 5—11 (306, Z. 3—6). Das O. hat dreimal DC statt CD. Der Beweis ist etwas zu kurz gerathen, denn von vorn herein ist es nicht sicher, dass $BACD$ eine Ebene ist. Man muss vielmehr so schliessen: Die Ebenen ACD und $BAEF$ haben den im Endlichen liegenden Punkt A gemein und müssen somit nach § 97 einander in einer durch A gehenden Geraden schneiden, die zu EF parallel ist. Da diese Gerade in der Ebene $BAEF$ liegt, so muss sie mit der Geraden AB zusammenfallen.

S. 172, Z. 14—10 v. u. (306, Z. 14—17). Man beachte, dass: $\alpha = fde$, $\beta = abc$, $\gamma = d'f'e'$, $\delta = dfe = f'd'e'$, $def = \pi - bac$, $d'e'f' = \pi - bca$.

S. 172, Z. 4 v. u. (306, Z. 11 v. u.). Das O. hat:

$$r = p + q - \delta + \tfrac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta - \gamma).$$

S. 172, Z. 3—1 v. u. (306, Z. 10, 9 v. u.). Dass die Bogen de und $e'f'$ unbegränzt abnehmen, sobald B' sich von B entfernt, ist nach § 93 unmittelbar klar. Da andererseits mit abnehmender Seite de der Winkel $dfe = \delta$ immer kleiner wird und umgekehrt, und da ebenso mit abnehmender Seite $f'e'$ der Winkel $f'd'e'$ immer kleiner wird und umgekehrt, so muss auch δ beliebig klein werden, wenn B' weit genug von B abrückt. Dagegen ist es ohne die Zuziehung der sphärischen Dreiecke dfe und $e'd'f'$ keineswegs von vornherein klar, dass der Winkel δ beliebig klein gemacht werden kann.

Es erscheint wünschenswerth einen direkteren Beweis dafür zu geben, dass δ beliebig klein gemacht werden kann, und das ist auch ganz leicht, wenn man nur die Punkte A, B, C von vornherein in geeigneter Weise wählt.

Man wähle B so, dass die in den Ebenen $B'BAA'$ und $B'BCC'$ auf BB' errichteten Lothe die Geraden AA' und CC' in zwei Punkten A und C schneiden (Fig. 53'). Das ist immer möglich, denn man braucht nur auf jeder der beiden Geraden AA' und CC' einen beliebigen Punkt anzunehmen und von diesen Punkten aus Lothe auf BB' zu fällen; eines der Lothe hat dann seinen Fusspunkt näher an B' als das andre und der Fusspunkt jenes Lothes ist ein Punkt B von der verlangten Beschaffenheit.

Die Ebene ABC steht jetzt nach § 56 auf BB' senkrecht. Fällt man nun von B aus auf AC das Loth BD und legt durch BB' und BD die Ebene $B'BD$, so wird diese nach § 61 auch das auf ABC in D errichtete Loth enthalten und mithin nicht blos auf der Ebene ABC (s. § 59) sondern auch auf AC senkrecht stehen. Ferner wird $B'BD$ die Ebenen $AB'C$ und $A'ACC'$ in zwei Geraden DB' und DD' schneiden, die mit einander den Winkel δ bilden und von denen die zweite, als Schnitt zweier durch die Parallelen AA' und BB' gehenden Ebenen, nach § 97 zu BB' parallel ist. Nunmehr ist es unmittelbar klar, dass der Winkel δ beliebig klein gemacht werden kann, wenn sich nur B' weit genug von A entfernt, denn zieht man von D aus in der Winkelöffnung $D'DB$ eine Gerade DE, die mit DD' einen beliebig kleinen Winkel bildet, so muss die nach § 93 BB' stets schneiden.

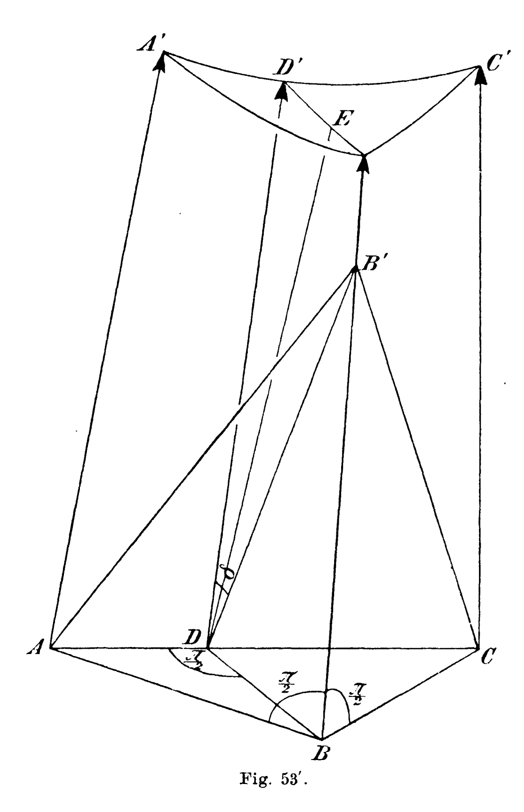


Fig. 53'.

S. 173, Z. 3 (306, Z. 7 v. u.). Die Ungleichheiten: $p < \delta$, $q < \delta$ folgen ebenfalls aus § 80.

S. 173, Z. 4—1 v. u. (307, Z. 15—17). In § 91 ist nämlich gezeigt, dass von zwei Dreiecken, deren eines innerhalb des andern liegt, das grössere stets die kleinere Winkelsumme hat, sobald die Winkelsumme im Dreiecke $< \pi$ ist; s. S. 164, Z. 15—22. Leider hat Lobatschefskij unterlassen, dieses Ergebniss ausdrücklich als Satz auszusprechen. — Durch die Annahme $\alpha = 0$ wird der Widersinn deshalb beseitigt, weil dann AD parallel zu CE wird und also gar kein Dreieck ADC entsteht.

S. 174 f., § 102. Lobatschefskijs Beweis für den Satz, dass jeder spitze Winkel der Parallelwinkel eines Lothes von ganz bestimmter Länge ist, leidet an dem Gebrechen, dass er von der Stetigkeit Gebrauch macht; denn darauf kommt es hinaus, wenn auf S. 175, Z. 4—8 als selbstverständlich angenommen wird, es müsse eine Senkrechte geben, die die Gränze ist zwischen den Schneidenden und den Nichtschneidenden. Bei der Erklärung des Parallelismus in § 93 war die Benutzung der Stetigkeit nicht zu umgehen; hier aber hätte sie, wenn irgend möglich, vermieden werden sollen. Unter alleiniger Benutzung des Begriffes parallele Linien und der früher bewiesenen Sätze hätte gezeigt werden sollen, dass zu jedem spitzen Winkel eine Gerade konstruirt werden kann, die auf dem einen Schenkel

des Winkels senkrecht steht und zu dem andern Schenkel parallel ist. Statt dessen beweist Lobatschefskij auch mit Hülfe der Stetigkeit nur, dass eine solche Gerade existirt, ohne im Geringsten die Möglichkeit ihrer Konstruktion zu berücksichtigen.

Es ist in der That möglich, diesem Mangel abzuhelfen. J. Bolyai hat nämlich in § 35 seines Appendix eine Konstruktion entwickelt, die zu jedem gegebenen spitzen Winkel das Loth liefert, dessen Parallelwinkel er ist, und die ausser Lineal und Zirkel weiter nichts benutzt als die Voraussetzung, dass man von einem gegebenen Punkte aus zu einer gegebenen Geraden die Parallelen ziehen kann. Allerdings beruht J. Bolyais Beweis für die Richtigkeit dieser Konstruktion auch auf Sätzen, die er nur mit Hülfe der Stetigkeit bewiesen hat, wie er denn überhaupt von der Stetigkeit sehr ausgiebigen Gebrauch macht, bei Weitem mehr als Lobatschefskij, der sonst in dieser Beziehung recht streng ist. Aber es lässt sich zeigen, dass der Beweis für die Richtigkeit dieser Bolyaischen Konstruktion ohne Benutzung der Stetigkeit erbracht werden kann; doch muss die nicht ganz kurze Durchführung dieses Gedankens einer andern Gelegenheit vorbehalten bleiben.

S. 174, Z. 19—175, Z. 3 (307, Z. 4 v. u. — 308, Z. 8). Dieses ganze Verfahren findet sich schon bei Taurinus, s. P. Th. S. 264.

S. 175, Z. 12 (308, Z. 14). Das O. hat: „Die erste“ statt: „Die zweite“.

S. 178 f. § 106. Diese beiden Sätze hat schon Saccheri 1733 bewiesen, s. P. Th. S. 72—74, Lehrsatz XX und XIX.

S. 178, Z. 8, 7 v. u. (311, Z. 14 f.). Nach § 91, S. 164 ist in dem Dreiecke ABC die Winkelsumme kleiner als in dem Dreiecke ADF, also $\angle HFG = \angle AFD > \angle ACB = \angle FHG$.

S. 179, Z. 1—7 (311, Z. 12—9 v. u.). Lobatschefskij benutzt hier ohne Weiteres die beiden Sätze, mit denen Saccheri 1733 seinen „Euclides ab omni naevo vindicatus“ beginnt, s. P. Th. S. 50 f., Lehrsatz I und II. Man kann dort die Beweise nachlesen, wenn man nicht vorzieht, sie sich selbst zurecht zu legen, was keine Schwierigkeit hat.

S. 179, Z. 10—12 (311, Z. 8, 7 v. u.). Aus § 91, S. 164 folgt ja, dass die Winkelsumme des Vierecks $FLOD$ kleiner ist als die des Vierecks $DFGH$, also ist $\angle DOL$ kleiner als der spitze Winkel DHG.

S. 179, Z. 22 (311, Z. 1 v. u.). Im ersten Theile des Beweises ist gezeigt, dass (s. Fig. 103) bei wachsendem AD der Schenkel AF stärker wächst als der Schenkel AD, im zweiten Theile ist gezeigt, dass gleichzeitig das Loth DF stärker wächst als der Schenkel AF. Der Satz ist also bewiesen.

S. 180, Z. 18 f. (312, Z. 5 v. u.). Das O. hat: $BD > EF$ statt: $HD > GF$. Die Ungleichheit auf Z. 24 (Z. 1 v. u.) folgt daraus, dass $\angle CAE$ und die Winkel bei C, F, D, G Rechte sind, also die Winkel AEF und AHD spitz. Es wird also: $HD + c = HD + EG > GF + EG$, was $= EF$ ist. Die Ungleichheit: $BD > EF$ nützt hier nichts.

S. 181, Z. 16 v. u. (313, Z. 10 v. u.). Das O. hat GAC statt BAC.

S. 183, Fig. 110. In der Originalfigur fehlt der Buchstabe M.

S. 183, Z. 1 v. u. (315, Z. 17). Das O. hat GQ statt PQ.

S. 184, Z. 1, 6 (315, Z. 18, 22). Das O. hat GNK und CNB statt: PNK und CNB'.

S. 184, Z. 9 v. u. (316, Z. 2). Das O. hat PG statt PS.

S. 184, Z. 8—5 v. u. (316, Z. 2—4). Bei dem Dreiecke $B'BC$ ist $NP = b$ dasselbe, was bei dem Dreiecke ABC die Linie $LH = HR = c < b$ war. Wie man also aus dem Dreiecke ABC mit der Seite $AB = a$ das neue $B'BC$ abgeleitet hat, in dem die Seite $BB' < a - 2b < a - 2c$ ist, so kann man aus dem Dreiecke $B'BC$ ein neues $B''BC$ ableiten mit der Seite: $BB'' < a - 2c - 2b$. Ferner wird die Linie, die in dem Dreiecke $B''BC$ dieselbe Rolle spielt, wie $NP = b$ in dem Dreiecke $B'BC$ und $LH = c$ in dem Dreiecke ABC, grösser sein als b, gerade so wie $b > c$ war. Man kann daher genau in derselben Weise zu einem vierten Dreiecke übergehen und so fort.

S. 182—184. § 111. In den G. U. hat Lobatschefskij den Beweis dieses Satzes wesentlich vereinfacht, s. G. U. Nr. 30, S. 34—37, in den G. A., II, S. 566 f. Der erste Fall, wo von den drei Mittelsenkrechten (s. Fig. 54′) die beiden äusseren DE und FG als parallel angenommen werden, wird genau so erledigt, wie auf S. 183, Z. 7—24, dann aber wird noch bemerkt: „Setzt man die Seite: $BC = 2a$, $AC = 2b$, $AB = 2c$ und bezeichnet die diesen Seiten gegenüberstehenden Winkel durch A, B, C, so ist in dem so eben betrachteten Falle

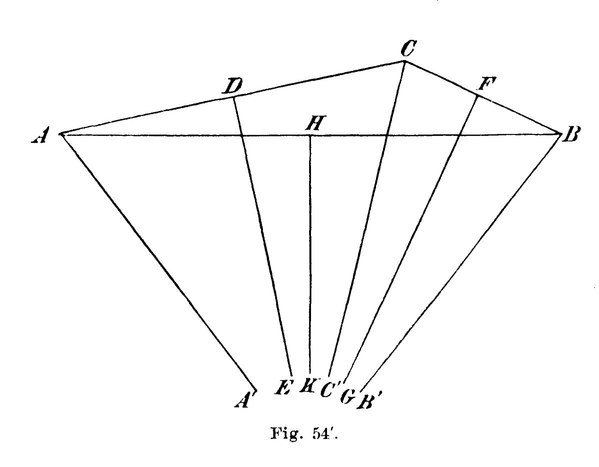


Fig. 54′.

$$A = \Pi(b) - \Pi(c), \quad B = \Pi(a) - \Pi(c), \quad C = \Pi(a) + \Pi(b),$$

wie man sich leicht überzeugt mit Hülfe der Linien AA', BB', CC', welche aus den Punkten A, B, C parallel mit dem Perpendikel HK und folglich mit den beiden andern Perpendikeln DE und FG gezogen sind (23. und 25. Satz [hier § 102 und 99])“.

Nunmehr kommt der zweite Fall:

„Es seien jetzt die beiden Perpendikel HK und FG parallel, so kann der dritte DE sie nicht schneiden (29. Satz [hier § 110]), mithin ist er entweder parallel mit ihnen, oder er schneidet AA'. Die letzte Annahme heisst nichts anderes, als dass der Winkel $C > \Pi(a) + \Pi(b)$. Vermindert man diesen Winkel, so dass er gleich $\Pi(a) + \Pi(b)$ wird, indem man dergestalt der Linie AC die neue Lage CQ giebt, (Fig. 23 [hier 55′]) und bezeichnet man die Grösse der dritten Seite BQ durch $2c'$, so

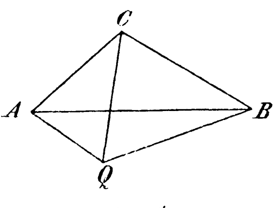


Fig. 55′.

muss der Winkel CBQ am Punkte B, welcher vergrössert wurde, nachdem was oben bewiesen ist, gleich $\Pi(a) - \Pi(c') > \Pi(a) - \Pi(c)$ sein, woraus folgt $c' > c$ (23. Satz [hier § 102]). Im Dreiecke ACQ sind jedoch die Winkel bei A und Q gleich, mithin muss im Dreiecke ABQ der Winkel bei Q grösser sein als der am Punkte A, folglich ist $AB > BQ$ (9. Satz [hier § 54]); das heisst es ist $c > c'$."

Die Worte: „nachdem was oben bewiesen ist" beziehen sich darauf, dass in dem Dreiecke QCB die zu den Seiten QC und CB gehörigen Mittelsenkrechten parallel sind, dass also bei diesem Dreiecke der erste, bereits erledigte Fall verwirklicht ist.

S. 185, Z. 16 v. u. (317, Z. 14). Hier ist augenscheinlich im Originaltexte etwas ausgefallen, man kann aber zweifelhaft sein, ob man ergänzen soll: „und zu CD" oder: „und zu EF", das letztere ist sogar vielleicht das Richtigere. Ueberhaupt ist aber die ganze Darstellung etwas zu knapp gehalten, und vor allen Dingen fehlt eigentlich der Nachweis, dass die Gränzlinie mit jeder zu AB parallelen Geraden einen Punkt gemein hat. Lobatschefskij hat diesen Nachweis wahrscheinlich für überflüssig gehalten, weil sich aus seiner Definition ergiebt, dass die Gränzlinie eine kontinuirliche Kurve ist. Wenn nämlich EF eine beliebige Parallele zu AB ist, so liefert das von A aus auf EF gefällte Loth AE einen jenseits von EF liegenden Punkt C der Gränzlinie, sobald man die Verlängerung $EC = AE$ macht; die Kontinuität der Gränzlinie bringt es dann mit sich, dass zwischen A und C ein Punkt der Gränzlinie liegt, der der Geraden EF angehört.

In den G. U. Nr. 31, S. 37 f., s. G. A. II, S. 567, erklärt Lobatschefskij die Gränzlinie folgendermassen:

„Grenzlinie (Oricycle) nennen wir diejenige in einer Ebene liegende krumme Linie, für welche alle Perpendikel auf den Mittelpunkten der Sehnen errichtet unter sich parallel sind."

„In Uebereinstimmung mit dieser Definition kann man sich die Erzeugung der Grenzlinie vorstellen, wenn man zu einer gegebenen Linie AB (Fig. 24 [hier 56']) aus einem in ihr gegebenen Punkte A unter verschiedenen Winkeln $CAB = \Pi(a)$ Sehnen $AC = 2a$ zieht; das Ende C einer solchen Sehne wird auf der Grenzlinie liegen, deren Punkte man so allmählich bestimmen kann. Der Perpendikel DE auf der Sehne AC in deren Mitte D errichtet, wird parallel mit der Linie AB sein, welche wir Axe der Grenzlinie nennen werden. Auf gleiche Weise wird auch jeder Perpendikel FG im Mittelpunkte irgend einer Sehne AH

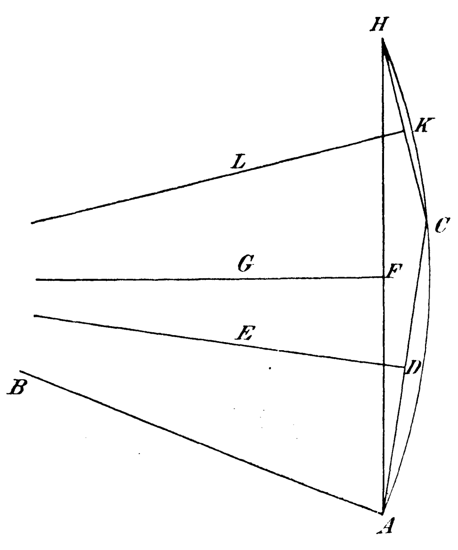


Fig. 56'.

errichtet, parallel mit AB sein, folglich muss diese Eigenschaft auch jedem Perpendikel KL überhaupt angehören, welcher im Mittelpunkte K irgend einer Sehne CH errichtet ist, zwischen welchen Punkten C und H, auf der Grenzlinie diese auch gezogen sein mag (30. Satz [hier § 111]). Dergleichen Perpendikel müssen daher ebenfalls ohne Unterscheidung von AB Axen der Grenzlinie genannt werden."

Auch hier wird also die Kontinuität der Gränzlinie benutzt, während es vom rein geometrischen Standpunkte aus erforderlich wäre, zu zeigen, dass auf jeder Parallelen CD zu AB (Fig. 113) ein Punkt C konstruirt werden kann, dass $\angle BAC = \angle DCA$ wird; das Wort „konstruiren" in dem Sinne genommen, dass ausser der Benutzung von Zirkel und Lineal nur noch die Voraussetzung gestattet ist, man könne durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden die Parallelen ziehen. Es würde jedoch zu weit führen, wollte ich hier die Möglichkeit dieser Konstruktion darthun.

S. 185. Fig. 113. In der Originalfigur reichen die Geraden FE, HG bis zur Gränzlinie, als ob E und G Punkte der Gränzlinie wären.

S. 187, Z. 12—14 (318, Z. 2, 1 v. u.). Weil nämlich HF die Gerade AD immer schneidet, wie klein auch der Winkel $EHF = \gamma$ angenommen werden möge.

S. 188, Z. 1—3 (319, Z. 14—12 v. u.). In § 114 ist eigentlich nur bewiesen, dass jede einzelne der Linien $BD = \delta$ und $CE = \gamma$ kleiner gemacht werden kann als jede gegebene Linie, nicht aber, dass dies bei beiden gleichzeitig möglich ist. Um das noch zu zeigen, bedenke man, dass die Winkel CBD und BCE gleich sind, weil B und C auf einer Gränzlinie mit den parallelen Axen BD und CE liegen; denkt man sich andrerseits durch D und E die Durchmesser des Kreises ADE gezogen und beachtet, dass diese die durch A gehende Axe der Gränzlinie ABC schneiden müssen, so erkennt man, dass $\pi - \angle BDE < \pi - \angle CED$ ist, also $\angle BDE > \angle CED$, woraus sofort folgt: $CE > BD$. Wird daher CE beliebig klein gemacht, so wird BD erst recht klein.

S. 188, Z. 19 (319, Z. 4 v. u.). Das O. hat Fig. 117 statt 116.

S. 189, Z. 13—15 (320, Z. 14, 13 v. u.). Beim Kreise ist ja der Bogen, der zu einer m-mal kleineren Sehne gehört, kleiner als der m-te Theil des ursprünglichen Bogens, dasselbe gilt daher auch von den entsprechenden Centriwinkeln. Die Worte „von Eins" fehlen im O., sind aber zum Verständnisse unentbehrlich, es hätte nur auch das BC des Originals durch AB ersetzt werden müssen.

S. 189, Z. 9, 8 v. u. (320, Z. 3, 2 v. u.). Dass die Abstände EE' und FF' gleich sind, folgt daraus, dass nach § 112: $\angle DFE = \angle BEF$ und: $\angle DF'E' = \angle BE'F'$.

S. 190, Z. 19 (321, Z. 13). Das O. hat: $s = s' \,.\, e^{-x}$.

S. 190, Z. 16 und 13 v. u. (321, Z. 17 und 15 v. u.). Das O. hat $c'd'$ statt cd und: $a'c' > b'd'$ statt: $aa' > bb'$.

S. 191, Z. 11—14 (322, Z. 5—7). In den G. U. Nr. 34, S. 41, s. G. A. II, S. 569, lautet die Erklärung so: „Grenzfläche (Orisphäre) wird diejenige Oberfläche genannt, welche entsteht durch die Umdrehung der Grenzlinie um eine ihrer Axen".

S. 191, Z. 14 v. u. (322, Z. 18 v. u.). Das O. hat Fig. 120 statt 119.

S. 191, Z. 12—10 v. u. (322, Z. 17 v. u.). Einfacher wäre es zu sagen: B und C mögen nicht mit AA' in einer Ebene liegen.

S. 192, Z. 4—16 (322, Z. 9—1 v. u.). Die Einführung der sphärischen Dreiecke ist überflüssig, und Lobatschefskij hat sie auch später in den G. U. a. a. O. vermieden. Dort denkt er sich — nur die Buchstaben sind anders gewählt — die Gerade QQ' genau so konstruirt wie hier, so dass also QQ' auf der Ebene ABC senkrecht steht und zu AA', BB', CC' parallel wird. Ferner denkt er sich AB in H halbirt und in der Ebene $A'ABB'$ die Gerade HH' senkrecht zu AB gezogen, was nach sich zieht, dass HH' parallel zu AA', BB' wird und also auch zu CC', QQ'. Endlich denkt er sich in der Ebene $Q'QHH'$ die Gerade HK senkrecht zu QH gezogen und bemerkt, dass HK nach früheren Sätzen (hier § 59 und 56) auf der Ebene ABC und also auch auf der Geraden AH senkrecht steht, und dass somit die zu HH' und HK senkrechte Gerade AH auf QH senkrecht stehen muss. Die Dreiecke AHQ und BHQ sind daher rechtwinklig und, weil sie in den Katheten übereinstimmen, kongruent, woraus $BQ = AQ$ folgt, während nach der Konstruktion von vornherein $AQ = CQ$ ist.

Noch etwas kürzer kommt man übrigens zum Ziele, wenn man beachtet, dass genau so wie der Punkt Q gefunden worden ist, ein solcher Punkt R gefunden werden kann, dass $RB = RA$ wird und dass die auf der Ebene ABC in R errichtete Senkrechte RR' zu AA', BB', CC' parallel wird. Nach § 99 ist dann RR' auch zu QQ' parallel, während andrerseits RR' und QQ' nach § 61, 59 und 56 beide auf RQ senkrecht stehen. Da aber hier die Winkelsumme im Dreiecke $< \pi$ vorausgesetzt wird, so ist das nur möglich, wenn R mit Q zusammenfällt, wenn also $QB = QA = QC$ ist.

S. 192, Z. 11 f. (322, Z. 3, 2 v. u.). Das O. hat: $b'a < \frac{1}{2}\pi$ statt: $qa' < \frac{1}{2}\pi$ und: $a'q = b'q$ statt: $a'q = b'q'$.

S. 192, Z. 20—22 (323, Z. 2 f.). Hier fehlt noch die Bemerkung, dass EE' nach § 97 zu BB' und CC' parallel ist.

S. 193 f. § 121. Lobatschefskij war sich augenscheinlich vollkommen darüber klar, dass sich die Gränzfläche von der Euklidischen Ebene dadurch unterscheidet, dass diese Ebene auf die andre Seite umlegbar ist, die Gränzfläche dagegen nicht. Dieser wichtige Unterschied hat zur Folge, dass zunächst nur die Sätze der Euklidischen Geometrie, die ohne Benutzung der Umlegung bewiesen sind, auf Gränzbogendreiecke angewendet werden dürfen. Insbesondere darf man daher die Sätze über das gleichschenklige Dreieck (s. § 50 und 52) nicht ohne Weiteres auf Gränzbogendreiecke übertragen, sondern muss sie für Gränzbogendreiecke besonders beweisen, was allerdings, wenn man den Raum zu Hülfe nimmt, keine Schwierigkeit hat. Merkwürdigerweise scheint Lobatschefskij das übersehen zu haben, wenigstens findet sich bei ihm keine Bemerkung, die auf die Nothwendigkeit eines solchen Beweises hindeutete. Es ist das um so merkwürdiger, als er auf S. 194 bei der Konstruktion des Dreiecks, das zu einem gegebenen symmetrisch ist, im Grunde die Sätze über das gleichschenklige Dreieck benutzt, obwohl er sie seinerzeit durch Umlegung der Ebene bewiesen hat.

Sobald man übrigens die genannten Sätze über das gleichschenklige

Gränzbogendreieck bewiesen hat, zeigen die Betrachtungen Lobatschefskijs auf S. 194 in der That, dass jeder Satz der Euklidischen Geometrie zugleich auch für Gränzbogendreiecke auf einer Gränzkugel gültig ist.

S. 194, Z. 15—13 v. u. (324, Z. 11—9 v. u.). Wäre nämlich etwa $DE + DG = \pi$, so wäre nach § 88:

$$DE = DG = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \angle DAE = \angle DAG = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \angle A = \pi.$$

Im O. steht wörtlich übersetzt: „denn bei diesen sind von den Winkeln um D herum keine zwei zusammen gleich π (§ 88)."

Uebrigens müsste eigentlich noch bewiesen werden, dass auch beim sphärischen Dreiecke der Punkt D ins Innere des Dreiecks fällt. Sind die drei Seiten AB, BC, CA alle $< \pi$, so ist unmittelbar klar, dass D ins Innere des Dreiecks fällt, denn dann ist nach § 46 auch jede der drei Winkelhalbirenden $< \pi$ und kann daher nicht aus dem Dreiecke heraustreten, ohne die gegenüberliegende Seite zu schneiden. Ist andrerseits etwa die Seite AB und also auch $\angle C > \pi$, so sind nach § 46 AC und BC beide $< \pi$, folglich kann der Bogen, der den Winkel C halbirt, nicht aus dem Dreiecke ABC heraustreten, ohne die Seite AB zu schneiden, er zerlegt daher das Dreieck ABC in zwei Dreiecke, deren Seiten sämtlich $< \pi$ sind, und daraus folgt wiederum, dass der Schnittpunkt D der drei Winkelhalbirenden im Innern des Dreiecks ABC liegt.

S. 196, Z. 5 (326, Z. 5). Das O. hat: „die beiden Linien a und a'", was eigentlich nicht hätte geändert zu werden brauchen.

S. 196, Z. 10 (326, Z. 8). Das O. hat § 103 statt 104.

S. 196, Z. 16 f. (326, Z. 14 f.). Das O. hat: „folglich ist in Q" und: „der Winkel in Q".

S. 198, Z. 15 (329, Z. 18). Das O. hat: $\sin A = -\sin A$.

S. 199, Z. 21 (330, Z. 2 v. u.). Das O. hat $\sin(-\alpha)$ statt: $\sin(\pi - \alpha)$.

S. 203, Z. 11 (335, Z. 9). Im O.: B, $\pi - A$ statt: $\pi - A$, B.

S. 203, Z. 13 v. u. (335, Z. 4 v. u.). Im O. Gl. (19) statt: (18).

S. 204, Z. 3 v. u., 205, Z. 5 (337, Z. 9, 15). Im O. (29) statt (30).

S. 205, Z. 9 (337, Z. 8 v. u.). Im O. (35) statt: (34).

S. 205, Z. 9, 8 v. u. (338, Z. 8, 9). Im O. lauten diese Gleichungen so:

$$\sin x = x - x_c^3 + x_c^5 - x_c^7 + \cdots$$
$$\cos x = 1 - x_c^2 + x_c^4 - x_c^6 + \cdots.$$

Diese Schreibweise hat Lobatschefskij jedenfalls von seinem Lehrer Bartels übernommen, vgl. J. M. C. Bartels, Vorlesungen über mathematische Analysis, I. (einziger) Band, Dorpat 1833 in der Vorrede, S. XIV: „Noch glaube ich auf die von mir seit langem gebrauchten Zeichen n_c^r und $n_c^{:r}$, wo ersteres die r-te durch $1 . 2 . 3 \ldots r$ dividirte Potenz von n, und letzteres den r-ten Binomialcoefficienten der n-ten Potenz bedeutet, aufmerksam machen zu dürfen".

S. 205, Z. 5 v. u. (338, Z. 12). Die Gleichungsnummer (42) fehlt im O.

S. 205, Z. 2 v. u. (338, Z. 15). Das O. hat: $\pi = 3{,}1415925643 \ldots$

S. 206, Z. 2 v. u. (339, Z. 2 v. u.). Selbstverständlich wird hier vorausgesetzt: $a < \frac{1}{2}\pi$.

S. 207, Z. 8—10 (340, Z. 5 f.). Man beachte, dass im K. B., hier S. 15, Z. 20—17 v. u., die Linien, die jetzt α und β heissen, mit a' und b' bezeichnet sind. Andrerseits wird im K. B., hier S. 17, Z. 12 f., das zu dem Parallelwinkel $\frac{1}{2}\pi - \Pi(a)$ gehörige Loth mit dem a entsprechenden griechischen Buchstaben, also mit α bezeichnet, während es jetzt, s. S. 210, Z. 4, 3 v. u., durch Hinzufügung eines Striches zu a bezeichnet wird, also mit a'.

S. 208. Bei den Figuren 125 und 126 des O. ist BC nicht über C hinaus verlängert.

S. 208, Z. 4, 8 (341, Z. 1, 3). Das O. hat: $c < b$ statt: $c < \beta$ und: § 121 statt: § 102.

S. 208. In der Fig. 127 des O. fehlt der Buchstabe c.

S. 209, Z. 2—4 (341, Z. 15 f.). Da $\Pi(b)$ augenscheinlich grösser ist als $\Pi(\alpha)$, so ist nach § 102 $\alpha > b$.

S. 209. In der Fig. 128 des O. fehlt der Buchstabe b.

S. 209, Z. 12 und 9 v. u. (341, Z. 2 und 1 v. u.). Das O. hat: $\gamma < a$ statt: $\gamma > a$ und: c statt a.

S. 209, Z. 2 v. u., 210, Z. 1, (342, Z. 7, 8). Das O. hat beide Male $\Pi(\alpha - \gamma)$ statt: $\Pi(a - \gamma)$.

S. 210, Z. 2—5 (342, Z. 9—11). Das O. hat (51) statt (52). Man erhält die Gleichungen (47), (48) und (52), wenn man die der Gleichung (54) entsprechenden:

$$\Pi(\alpha) = \Pi(b - \gamma) - \Pi(c + \beta)$$
$$\Pi(\alpha) = \Pi(c - \beta) - \Pi(b + \gamma)$$
$$\Pi(\gamma) = \Pi(b - \alpha) - \Pi(a + \beta)$$

bildet, sodann $\gamma = 0$ setzt und überdies im letzten Falle berücksichtigt, dass $\Pi(b - \alpha) = \pi - \Pi(\alpha - b)$ ist.

S. 210, Z. 9—11 (342, Z. 13 f.). Man beachte, dass jetzt die Senkrechte auf der Ebene ABC im Punkte A errichtet wird, während sie im K. B., hier S. 18, Z. 15, 14 v. u., im Punkte B errichtet wird. Die beiden Dreiecke Fig. 130 und 131, zu denen die folgenden Betrachtungen führen, unterscheiden sich daher von den entsprechenden Dreiecken des K. B., Fig. 8, S. 19 und Fig. 6, S. 17 dadurch, dass die Katheten und die spitzen Winkel des ursprünglichen Dreiecks mit einander vertauscht sind.

S. 210. In der Fig. 130 des O. fehlt $\Pi(\beta)$.

S. 210, Z. 2 v. u. — 211, Z. 4 (342, Z. 4 v. u. — 343, Z. 1). Vgl. hierzu das auf S. 241 f. Gesagte.

S. 211 (343). Von den zehn Gleichungen (55) stehen im O. die ersten fünf rechts neben den letzten fünf. Das bringt später, wenn auf die Gl. (55) verwiesen wird, einige Unzuträglichkeiten mit sich, weil man nicht weiss, welches die erste u. s. w. der Gl. (55) sein soll.

In der letzten der Gl. (55) hat das O. $\Pi(b' - \alpha')$ statt: $\Pi(b' - a')$.

Vertauscht man abwechselnd einmal a mit b, α mit β, ohne c zu ändern, und dann, ohne a und a' zu ändern, b mit α', b' mit α, c mit β,

c' mit β', so erhält man aus 55 VI der Reihe nach 55 VII, VIII, IX, X, I und dann noch:

$$2\Pi(b') = \Pi(a' - \alpha) - \Pi(a' + \alpha)$$
$$2\Pi(a') = \Pi(b' - \beta) - \Pi(b' + \beta)$$
$$2\Pi(a') = \Pi(\alpha - c) - \Pi(\alpha + c)$$
$$2\Pi(b') = \Pi(\beta - c) - \Pi(\beta + c)$$
$$2\Pi(\alpha) = \Pi(c - \beta) - \Pi(c + \beta),$$

womit sich der Cyklus schliesst. Ebenso erhält man aus 55 V der Reihe nach: 55 IV, III, II und überdies:

$$2\Pi(\alpha') = \Pi(b' - a') + \Pi(b' + a')$$
$$2\Pi(\beta') = \Pi(a' - b') + \Pi(a' + b')$$
$$2\Pi(c') = \Pi(a' - \alpha) + \Pi(a' + \alpha)$$
$$2\Pi(c') = \Pi(b' - \beta) + \Pi(b' + \beta)$$
$$2\Pi(\beta') = \Pi(\alpha - c) + \Pi(\alpha + c)$$
$$2\Pi(\alpha') = \Pi(\beta - c) + \Pi(\beta + c)$$
$$2\Pi(b) = \Pi(c - \beta) + \Pi(c + \beta),$$

womit sich der Cyklus schliesst. Die zehn neuen Gleichungen, die auf diese Weise zu den Gleichungen (55) des Textes hinzukommen, folgen aber sofort aus den Gleichungen des Textes, wenn man die Relationen:

$$\Pi(x) + \Pi(-x) = \pi, \quad \Pi(x) + \Pi(x') = \tfrac{1}{2}\pi$$

berücksichtigt; deshalb hat sie Lobatschefskij nicht mit angegeben.

S. 211 (343). Aus der ersten der Gleichungen (56) folgen durch die beiden vorhin angegebenen Operationen alle übrigen in der Reihenfolge des Textes, und aus der letzten folgt wieder die erste, so dass man einen geschlossenen Cyklus hat.

S. 212, Z. 1—214, Z. 14 (343, Z. 5 v. u.—346, Z. 5). Das hier entwickelte Verfahren zur Bestimmung der Funktion $\Pi(x)$ ist einfacher als das früher im K. B., hier S. 18—20, angedeutete, von dem Lobatschefskij im zweiten Theile des § 137 eine ausführlichere Darstellung giebt. In Nr. 35 und 36 der G. U., s. G. A., II, S. 571—574, und in der P. G. R. und F., s. G. A., I, S. 495—505, II, S. 623—633, wird dasselbe Verfahren, ohne wesentliche Aenderung, wiederholt. Es beruht auf der Vergleichung des geradlinigen Dreiecks ABC mit dem rechtwinkligen Gränzbogendreiecke, das eine durch A gehende Gränzfläche mit der Axe AA' auf den Ebenen durch AA', BB', CC' ausschneidet. Bemerkenswerth ist die Einführung der Hülfsfunktion $f(x)$, die durch $\Pi(x)$ ausgedrückt wird. Auf diesem Wege gelingt es nämlich, die Gleichungen für das rechtwinklige geradlinige Dreieck in der endgültigen Form aufzustellen, ohne vorher die Funktion $\Pi(x)$ selbst zu bestimmen, s. die Gl. (58), (59), (60); ausserdem ergiebt sich auch noch die Funktionalgleichung (61) zur Bestimmung von $\Pi(x)$ ohne Gränzübergang.

S. 213, Z. 18, 20, 24 (345, Z. 2, 4, 7). Das O. hat hier irrthümlich:

$$e^{-f(b)} \sin \Pi(b) = e^{-f(a)} \sin \Pi(c)$$
$$e^{-f(a)} \sin \Pi(a) = e^{-f(b)} \sin \Pi(b)$$
$$e^{f(a)} = \sin \Pi(a),$$

Fehler, die in den G. A. wieder abgedruckt sind, obwohl sie in den G. U. und in der P. G. nicht wiederkehren.

S. 214 (346). Die Gl. (65) lautet im O. unrichtig so:

$$\operatorname{tang} \Pi(x+y) = \frac{\cos \Pi(x) + \cos \Pi(y)}{1 + \cos \Pi(x) \,.\, \cos \Pi(y)}.$$

Ueber die Ableitung der Gleichungen (63), (64), (65) aus (62) vgl. S. 243 f.

S. 214, Z. 15 v. u.—218, Z. 10 (346, Z. 16 v. u.—349, Z. 1 v. u.). Hier wird der im K. B., hier S. 18—20, nur angedeutete Beweis vollständig ausgeführt, und zwar stammt dieser Beweis, wie die Anmerkung auf S. 214 zeigt, aus der 1826 von Lobatschefskij vorgelegten Arbeit; vgl. S. 238, Z. 6—10. Nur die Bezeichnungen sind gegenüber dem Kasaner Boten etwas abgeändert, vgl. S. 239, Z. 1—7. Wenn man in Fig. 133 auf AD die Strecke: $AJ = c$ annimmt und von J aus auf AE das Loth JK fällt, so ist das Dreieck AKJ kongruent dem Dreiecke BCA in Fig. 129; da ferner $\angle JAB = \Pi(c)$ ist, so wird die in der Ebene ABC auf AJ errichtete Senkrechte JJ' zu AB parallel, das Dreieck AKJ steht daher zu dem sphärischen Dreiecke EDB genau in derselben Beziehung wie das Dreieck BCA in Fig. 129 zu dem sphärischen Dreiecke Fig. 130. Fällt man andrerseits in Fig. 133 von D aus auf AB die Senkrechte DL, so wird das Dreieck DLA dem Dreiecke BCA kongruent, und errichtet man auf der Ebene DBA in D die Senkrechte DD' nach der Seite von E hin, so wird DD' parallel zu AE; folglich steht das Dreieck DLA zu dem sphärischen Dreiecke EDB in einer Beziehung von genau derselben Art, wie sie zwischen dem Dreiecke ACB in Fig. 129 und dem sphärischen Fig. 130 besteht. Vgl. hierzu S. 241.

S. 215, Z. 18—16 v. u. (347, Z. 10—12). Eigentlich müsste es heissen: GB und HC parallel zu EA, und eigentlich müssten die Axen: FA, GB und HC genannt werden.

S. 215, Z. 10—8 v. u. (347, Z. 17 f.). Man erinnere sich, dass $\Pi(b) = \angle DEB$ und: $\Pi(b') = \frac{1}{2}\pi - \Pi(b) = \angle ABC$.

S. 216. Fig. 134. In der Originalfigur fehlt der Buchstabe K, ferner sind die Buchstaben m und l zwar vorhanden, aber das Loth ml ist nicht mit eingezeichnet.

S. 216, Z. 15 v. u. (348, Z. 2). Das O. hat: $CB'' = \alpha$ statt: $= \alpha'$.

S. 217, Z. 19—21 (348, Z. 9—7 v. u.). HC bleibt stets unter einer gewissen endlichen Gränze, die durch die grössten Werthe von ξ, η, ζ bestimmt ist; andrerseits ist der $\angle DCm < \angle DAE$, dieser aber, der $= \Pi(\beta)$ ist, kann beliebig klein gemacht werden, folglich gilt dasselbe auch von lm. Dass $EL > x$ ist, erkennt man nach § 106 sofort, wenn man das Dreieck ALE so umlegt, das AL auf AE und AE auf AD zu liegen kommt.

S. 217, Z. 15, 14, 13 v. u. (348, Z. 5, 4, 4 v. u.). Das O. hat:

$$\frac{Em}{B'E}, \ \frac{nm}{B'E}; \quad \frac{\xi}{\eta}, \ \frac{\zeta}{\eta}; \quad \Pi(c), \ \Pi(a), \ \Pi(\beta).$$

S. 217, Z. 3 v. u. (349, Z. 9). Das O. hat: „die zweite der Gleichungen (54)".

S. 220, Z. 8 (352, Z. 6 v. u.). Das O. hat: a, b, c statt: c, a, b.

S. 220, Z. 6 v. u. (353, Z. 14). Das O. hat: $\cos A$ statt: $\cos C$.

S. 221, Z. 1—6 (353, Z. 7—3 v. u.). Es ist auffallend, dass Lobatschefskij zuerst die Gleichung (71) hinschreibt, die aus (60) entsteht, wenn man a mit b, α mit β vertauscht, und dass er dann erst wieder in (71) a mit b, A mit B vertauscht. Ein Grund hierfür ist nicht zu erkennen.

S. 221, Z. 14 (354, Z. 5). Das O. hat: $\operatorname{tang} \Pi(a)$ statt: $\operatorname{tang} \Pi(c)$.

S. 221, Z. 20, 25 (354, Z. 10, 14). Das Vorzeichen ist beidemale wieder dadurch bestimmt, dass die Winkel A, B, $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$ sämtlich spitz sind.

S. 222, Z. 3—6 (354, Z. 1 v. u.—355, Z. 3). Es folgt nämlich (73) aus 55 IV, IX; (74) aus 55 I, II; (75) aus 55 VI, VII; (78) aus 55 V, VIII; (79) aus 55 III, X.

S. 222, Z. 16 v. u. (355, Z. 10, 9 v. u.), Das O. hat: „aus der fünften Gleichung (55)", vgl. das auf S. 339 Z. 7—4 v. u. Gesagte.

S. 222, Z. 6 v. u. (355, Z. 1 v. u.). Hierbei ist die Beziehung: $\Pi(\beta - a) = \pi - \Pi(a - \beta)$ benutzt.

S. 223, Z. 1 f. (356, Z. 5 f.). Bei der Wegschaffung von B ergiebt sich nämlich:

$$\operatorname{tg}^2 B = \frac{\sin^2 A \,.\, \operatorname{tg}^2 \Pi(a)}{\operatorname{tg}^2 \Pi(b) - \sin^2 A \,.\, \operatorname{tg}^2 \Pi(a)} = \frac{\sin^2 \Pi(a) \,.\, \sin^2 \Pi(b)}{\operatorname{tg}^2 A},$$

also, wenn man $\sin^2 A$ durch $\operatorname{tg}^2 A$ ausdrückt:

$$\operatorname{tg}^4 A + \operatorname{tg}^2 A \{\sin^2 \Pi(b) - \cos^2 \Pi(a) \operatorname{tg}^2 \Pi(b)\} = \\ = \cos^2 \Pi(a) \,.\, \operatorname{tg}^2 \Pi(b) \,.\, \sin^2 \Pi(b)$$

oder:

$$\{\operatorname{tg}^2 A + \sin^2 \Pi(b)\} . \{\operatorname{tg}^2 A - \operatorname{tg}^2 \Pi(b) \,.\, \cos^2 \Pi(a)\} = 0.$$

Ebenso ergiebt sich bei Wegschaffung von b:

$$\operatorname{tg}^2 \Pi(b) = \frac{\operatorname{tg}^2 A \,.\, \operatorname{tg}^2 B}{\sin^2 \Pi(a) - \operatorname{tg}^2 A \,.\, \operatorname{tg}^2 B} = \frac{\sin^2 A \,.\, \operatorname{tg}^2 \Pi(a)}{\sin^2 B},$$

also, wenn man $\operatorname{tg}^2 B$ durch $\sin^2 B$ ausdrückt:

$$\sin^4 B + \sin^2 B \{\operatorname{tg}^2 \Pi(a) - \cos^2 A \,.\, \sin^2 \Pi(a)\} = \\ = \operatorname{tg}^2 \Pi(a) \,.\, \sin^2 \Pi(a) \,.\, \cos^2 A,$$

oder:

$$\{\sin^2 B + \operatorname{tg}^2 \Pi(a)\} . \{\sin^2 B - \sin^2 \Pi(a) \,.\, \cos^2 A\} = 0.$$

S. 223, Z. 3—9 (356, Z. 7—13). Man vgl. hierzu das auf S. 246 f. Gesagte.

S. 223, Z. 7—2 v. u. (357, Z. 2—5). Das O. hat: „das eine mit der Hypotenuse a, den Katheten p, x und dem Winkel B gegenüber p, das andre mit der Hypotenuse b, den Katheten p, $c - x$ und dem Winkel A gegenüber p, wenn x eine positive Zahl ist (Fig. 121), oder mit dem Winkel $\pi - A$ gegenüber p, wenn x negativ ist (Fig. 122)." Da das zu der Fig. 122 (s. S. 202) nicht stimmt und auch an und für sich schon nicht ganz korrekt ausgedrückt ist, so habe ich in der Uebersetzung den

Text geändert und in Fig. 122 die Buchstaben a mit b und A mit B vertauscht (s. Fig. 122a).

S. 223, Z. 1 v. u. (357, Z. 6). Das O. hat Gl. (74) statt: (73).

S. 224, Z. 14 und 17 (357, Z. 8 und 6 v. u.). Das O. hat:

$$\Pi(c+\alpha)-\Pi(c-\alpha) \quad \text{statt:} \quad \Pi(c+\alpha)+\Pi(c-\alpha)$$

und: $e^{2c}+1$ statt: $e^{2c}-1$.

S. 224, Z. 1 v. u. (358, Z. 12). Das Pluszeichen ist gewählt, weil die Winkel $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$ alle spitz sind.

S. 225, Z. 3—6 (358, Z. 8—5 v. u.). Bezeichnet man den Nenner des Ausdrucks für $\cos \Pi(c)$ mit N, so wird:

$$1-\cos A \,.\, \cos \Pi(b) \,.\, \cos \Pi(c) = \frac{1}{N} \sin \Pi(b) \,.\, \sin A,$$

also nach (86):

$$\{1-\cos C \,.\, \cos \Pi(a) \,.\, \cos \Pi(b)\} \sin A = N \,.\, \sin \Pi(b)$$

oder:

$$\sin A \,.\, \cos \Pi(b) = \sin A \,.\, \cos C \,.\, \cos \Pi(a) + \sin \Pi(b) \,.\, \cos \Pi(a) \,.\, \cos A \,.\, \sin C.$$

S. 225, Z. 14 v. u. (359, Z. 6). Das O. hat (82) statt (84).

S. 225, Z. 14—10 v. u. Auch die Gl. (88) kann aus den Gleichungen (84) abgeleitet werden, denn es wird ähnlich wie im Texte:

$$\begin{aligned} e^{-2c} &= \frac{e^{-a-\gamma}+\operatorname{tg} \frac{1}{2} B}{1-\operatorname{tg} \frac{1}{2} B \,.\, e^{-a-\gamma}} \cdot \frac{e^{-a+\gamma}-\operatorname{tg} \frac{1}{2} B}{1+\operatorname{tg} \frac{1}{2} B \,.\, e^{-a+\gamma}} \\ &= \frac{e^{-2a}+e^{-a} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} B\,(e^{\gamma}-e^{-\gamma})-\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} B}{1+e^{-a} \,.\, \operatorname{tg} \frac{1}{2} B\,(e^{\gamma}-e^{-\gamma})-\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} B \,.\, e^{-2a}}, \end{aligned}$$

mithin wird nach S. 243, Gl. (I):

$$(88') \left\{ \begin{aligned} \cos \Pi(c) &= \frac{(1-e^{-2a})(1+\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} B)}{(1+e^{-2a})(1-\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} B)+2 e^{-a} \,.\, \operatorname{tg} \frac{1}{2} B (e^{\gamma}-e^{-\gamma})} \\ &= \frac{\cos \Pi(a)}{\cos B+\sin \Pi(a) \,.\, \sin B \,.\, \cot C}, \end{aligned} \right.$$

was eben die Gleichung (88) ist.

Damit sind die Gleichungen (83), (88), (89) unmittelbar aus (84) abgeleitet. Für die Gleichung (87) ist das offenbar nicht möglich, da sie drei Seiten aber blos einen Winkel enthält; sie folgt jedoch leicht aus (83) und (88). Drückt man nämlich in (88') $\sin B$ vermöge (83) durch $\operatorname{tg} \Pi(c)$, $\sin C$ und $\operatorname{tg} \Pi(b)$ aus, so kommt:

$$\cos \Pi(c) = \frac{\cos \Pi(a) \,.\, \cos \Pi(c) \,.\, \sin \Pi(b)}{\sin \Pi(b) \,.\, \cos B \,.\, \cos \Pi(c)+\sin \Pi(c) \,.\, \sin \Pi(a) \,.\, \cos \Pi(b) \,.\, \cos C}.$$

Vertauscht man hier b mit c, B mit C und löst dann nach $\cos B$ und $\cos C$ auf, so gelangt man zu Gleichung (87).

S. 225, Z. 9—7 v. u. (359, Z. 10—12). Es wird nämlich:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} B\,(1+e^{-2a})+e^{-a}(e^{-\gamma}+\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} B \,.\, e^{\gamma})}{e^{-a}(e^{\gamma}+\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} B \,.\, e^{-\gamma})-\operatorname{tg} \frac{1}{2} B\,(1+e^{-2a})} = \cot^2 \tfrac{1}{2} A.$$

S. 225, Z. 5 v. u. (359, Z. 13). Eigentlich müsste es heissen: „mit den Nennern", denn es wird auch mit $\sin^2 \frac{1}{2} A$ multiplicirt.

S. 228—234. Die Figuren 135—140 sind den G. A. entnommen, für die sie jedenfalls neu gezeichnet worden sind, wie schon ihr von den früheren Figuren abweichender Charakter vermuthen lässt; wenigstens sind diese Figuren weder in den zwei Exemplaren der K. G. S. enthalten, die die Kasaner Universitätsbibliothek besitzt, noch in den Exemplaren der Berliner Königlichen Bibliothek, der Kieler Universitätsbibliothek und der Münchner Königlichen Staatsbibliothek.

S. 230, Z. 12—14 (364, Z. 4 f.) In der That ergeben sich aus (100) durch Hinzunahme von (97) und (98) die beiden andern Gleichungen, die entstehen, wenn man in (100) die Seiten und Winkel des Dreiecks unter einander vertauscht.

S. 230, Z. 18—22 (364, Z. 9—13). Das O. hat unrichtig:

$$„2 \cos \tfrac{1}{2}(A + B) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(A - B) \,.\, \sin a \,.\, \sin b \,.\, \sin c + \\ + \sin (a + b) (\cos c - \cos (a - b)) = 0.$$

Ferner Gl. (46):

$$\cos \tfrac{1}{2}(A + B) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(A - B) + \\ + \sin (a + b) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(b + c - a) \,.\, \sin \frac{1}{2}(a + c - b)}{\sin a \,.\, \sin b \,.\, \sin c} = 0."$$

Durch die in den Formeln angebrachten Aenderungen und durch den Zusatz: $[a > b \geq c]$ ist dieser Fehler berichtigt.

S. 231, Z. 14, 16 (365, Z. 8, 10). Im O. steht: $\cos C \,.\, \cos A$ und $\cos C \,.\, \cos B$ statt: $\cos C \,.\, \sin A$ und $\cos C \,.\, \sin B$.

S. 232, Z. 11 (366, Z. 6). Das O. hat ξ statt z.

S. 232, Z. 13, 14 (366, Z. 9, 10). Das O. hat:

$$\frac{y}{r} = \operatorname{tang} b, \quad \frac{z}{r} = \operatorname{tang} c, \quad \frac{r}{\eta} = \cos b, \quad \frac{r}{\xi} = \cos c.$$

S. 235, Z. 6, 5 v. u. (369, Z. 4). Auf die Gleichungen (63), (64), (65) wird jedenfalls verwiesen, weil diese in die Additionstheoreme für cos, tg und sin übergehen.

S. 235, Z. 2 v. u. (369, Z. 2 v. u.). Das O. hat unrichtig:

$$\cos \Pi(a) = \frac{1}{\sqrt{-1}} \operatorname{tang} a.$$

III. Einige wichtige Formeln der Lobatschefskijschen Geometrie.

Für den Parallelwinkel $\Pi(x)$, der zu dem Lothe x gehört, gelten die Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \Pi(0) = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \Pi(\infty) = 0, \quad \Pi(-x) = \pi - \Pi(x) \\ \Pi(a) < \Pi(b) \quad \text{für} \quad a > b. \end{cases}$$

$$(2)\qquad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x}$$

$$(3)\qquad d\,\Pi(x) = -\sin \Pi(x)\,.\,dx$$

$$(4)\qquad \begin{cases} \sin \Pi(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1}{\cosh x}, \quad \cos \Pi(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{tgh} x \\ \operatorname{tg} \Pi(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{1}{\sinh x}, \quad \cot \Pi(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x. \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} \sin \Pi(x+y) = \dfrac{\sin \Pi(x)\,.\,\sin \Pi(y)}{1 + \cos \Pi(x)\,.\,\cos \Pi(y)} \\ \cos \Pi(x+y) = \dfrac{\cos \Pi(x) + \cos \Pi(y)}{1 + \cos \Pi(x)\,.\,\cos \Pi(y)} \\ \operatorname{tg} \Pi(x+y) = \dfrac{\sin \Pi(x)\,.\,\sin \Pi(y)}{\cos \Pi(x) + \cos \Pi(y)} \end{cases}$$

$$(6)\qquad \sin \Pi(-x) = \sin \Pi(x), \quad \cos \Pi(-x) = -\cos \Pi(x).$$

Für ein rechtwinkliges geradliniges Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Winkeln: A, B, $\frac{1}{2}\pi$ ist nach S. 20 und 220 ff.:

$$(7)\qquad \begin{cases} \sin \Pi(c) = \sin \Pi(a)\,.\,\sin \Pi(b), \quad \sin \Pi(c) = \operatorname{tg} A\,.\,\operatorname{tg} B \\ \operatorname{tg} \Pi(c) = \operatorname{tg} \Pi(a)\,.\,\sin A, \quad \operatorname{tg} \Pi(c) = \operatorname{tg} \Pi(b)\,.\,\sin B \\ \cos \Pi(a) = \cos \Pi(c)\,.\,\cos B, \quad \cos \Pi(b) = \cos \Pi(c)\,.\,\cos A \\ \sin A = \sin \Pi(b)\,.\,\cos B, \quad \sin B = \sin \Pi(a)\,.\,\cos A \\ \operatorname{tg} A = \cos \Pi(a)\,.\,\operatorname{tg} \Pi(b), \quad \operatorname{tg} B = \cos \Pi(b)\,.\,\operatorname{tg} \Pi(a). \end{cases}$$

Setzt man hier: $A + B = \frac{1}{2}\pi - \varDelta$, so wird nach S. 36:

$$(8)\qquad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varDelta = \cos \Pi(\tfrac{1}{2}a)\,.\,\cos \Pi(\tfrac{1}{2}b),$$

und $\varDelta$ drückt den Inhalt des Dreiecks aus.

Man kann sich die Formeln (7) sehr leicht merken mit Hülfe einer Regel, die der Neperschen Regel für die sphärischen rechtwinkligen Dreiecke, vgl. S. 327, entspricht. Um diese Regel abzuleiten, denken wir uns an die Seiten des rechtwinkligen geradlinigen Dreiecks nicht die Längen a, b, c selbst geschrieben, sondern die dazu gehörigen Parallelwinkel, also wie in Fig. 57′. Wir erinnern ferner daran, dass nach S. 18f. und 210f. zu jedem rechtwinkligen geradlinigen Dreiecke ein andres gehört, das mit dem

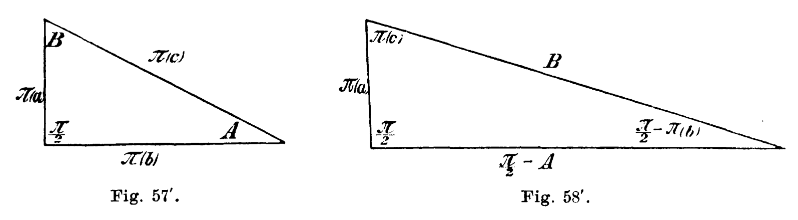


Fig. 57′. Fig. 58′.

ursprünglichen eine Kathete gemein hat. Schreibt man auch in dem neuen Dreiecke an jede Seite den zugehörigen Parallelwinkel, so bekommt man die Figur 58′. Das neue Dreieck wird also, wie schon auf S. 247 erwähnt ist, aus dem alten, Fig. 57′, dadurch erhalten, dass man eine Kathete, hier $\Pi(a)$, festhält, die beiden an dieser liegenden Stücke B und $\Pi(c)$ mit einander vertauscht und jedes der beiden von $\Pi(a)$ durch den rechten Winkel getrennten Stücke: $\Pi(b)$ und A durch das Komplement $\frac{1}{2}\pi - A$ und $\frac{1}{2}\pi - \Pi(b)$ des andern ersetzt.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass die Gleichungen für das rechtwinklige geradlinige Dreieck mit den Seiten und Winkeln: a, b, c, A, B, $\frac{1}{2}\pi$ nicht nur dann richtig bleiben, wenn man die Katheten und gleichzeitig die spitzen Winkel mit einander vertauscht, sondern auch dann, wenn man

$$\Pi(a) \quad B \quad \Pi(c) \quad A \quad \Pi(b)$$

der Reihe nach durch:

$$\Pi(a) \quad \Pi(c) \quad B \quad \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b) \quad \tfrac{1}{2}\pi - A$$

ersetzt. Man schreibe sich jetzt die Stücke des Dreiecks in einem Cyklus auf, wie folgt:

$$(9) \ldots \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b) \quad B \quad \Pi(c) \quad A \quad \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(a) \quad \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b) \quad B \ldots,$$

also derart, dass links und rechts von dem Parallelwinkel der Hypotenuse die beiden spitzen Winkel stehen und neben jedem spitzen Winkel das Komplement des Parallelwinkels der gegenüberliegenden Kathete. Dann bemerkt man sofort, dass jede der beiden Operationen, bei denen die Gleichungen für das rechtwinklige Dreieck richtig bleiben, den Cyklus (9) wieder liefert, aber unter Aenderung des Durchlaufungssinnes; wendet man aber beide Operationen nach einander an, so erhält man eine Verschiebung des Cyklus um eine Stelle nach rechts oder nach links. Da nun nach (7)

$$\sin \Pi(c) = \operatorname{tg} A \,.\, \operatorname{tg} B = \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(a)\right) . \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b)\right)$$

ist, so ergiebt sich sofort, dass in dem Cyklus (9) der Sinus jedes Stückes gleich ist dem Produkte aus den Tangenten der beiden anliegenden Stücke, dagegen gleich dem Produkte aus den Cosinus der beiden nicht anliegenden Stücke.

Diese Regel liefert sofort alle Gleichungen (7) wieder; ihre Analogie mit der Neperschen Regel liegt auf der Hand, und es ist besonders bemerkenswerth, dass bei ihr die in der Neperschen Regel auftretenden Funktionen durch die komplementären ersetzt sind.

Es sei Fig. 59′ ein Viereck mit drei rechten Winkeln und dem spitzen Winkel $L = \Pi(l)$, es werde ferner $\Pi(t) = T$, $\Pi(u) = U$, $\Pi(v) = V$, $\Pi(w) = W$ gesetzt. Nach S. 26 giebt es dann zugleich ein rechtwinkliges

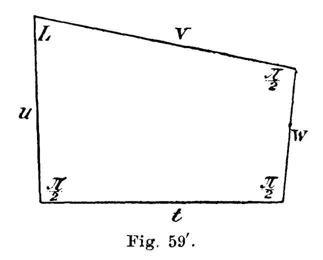


Fig. 59′.

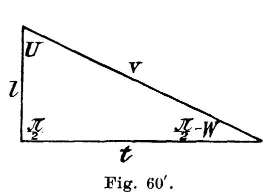


Fig. 60′.

Dreieck, Fig. 60′, mit den Seiten: t, l, v und den gegenüberliegenden Winkeln U, $\frac{1}{2}\pi - W$, $\frac{1}{2}\pi$. Nun ist aber auch umgekehrt das Viereck, Fig. 59′, durch das Dreieck, Fig. 60′, vollständig bestimmt, denn der spitze Winkel $\frac{1}{2}\pi - W$ liefert die Seite w, die zusammen mit der Hypotenuse v des Dreiecks zur Konstruktion des Vierecks hinreicht. Man erhält daher die Gleichungen zwischen den Stücken des Vierecks, Fig. 59′, wenn man die Gleichungen für das Dreieck, Fig. 60′, hinschreibt. Dazu aber hat man nach dem Früheren nur den Cyklus aufzuschreiben:

$$(10) \quad \ldots V \quad U \quad \tfrac{1}{2}\pi - T \quad \tfrac{1}{2}\pi - L \quad \tfrac{1}{2}\pi - W \quad V \quad U \quad \tfrac{1}{2}\pi - T \ldots,$$

und hier ist der Sinus jedes Stückes gleich dem Produkte aus den Tangenten (Cosinus) der beiden anliegenden (nichtanliegenden) Stücke. Demnach gelten für das Viereck, Fig. 59′, die Gleichungen:

$$(11) \quad \begin{cases} \cos L = \cot T \,.\, \cot W = \cos U \,.\, \cos V \\ \cos W = \cot L \,.\, \operatorname{tg} V = \sin T \,.\, \cos U \\ \sin V = \cot W \,.\, \operatorname{tg} U = \sin L \,.\, \sin T \\ \sin U = \operatorname{tg} V \,.\, \cot T = \sin L \,.\, \sin W \\ \cos T = \operatorname{tg} U \,.\, \cot L = \cos V \,.\, \sin W. \end{cases}$$

Für ein geradliniges Dreieck mit den Seiten a, b, c und den gegenüberliegenden Winkeln A, B, C gelten nach S. 21 und 223 ff. die Gleichungen:

$$(12) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \Pi(a) \,.\, \sin A = \operatorname{tg} \Pi(b) \,.\, \sin B \\ \cos A = \dfrac{\sin \Pi(a) - \sin \Pi(b) \,.\, \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a) \,.\, \cos \Pi(b) \,.\, \cos \Pi(c)} \\ \cos \Pi(a) = \dfrac{\sin A \,.\, \cos \Pi(c)}{\sin A \,.\, \cos B + \cos A \,.\, \sin B \,.\, \sin \Pi(c)} \\ \sin \Pi(a) = \dfrac{\sin B \,.\, \sin C}{\cos A + \cos B \,.\, \cos C}. \end{cases}$$

Der Inhalt $\varDelta$ des Dreiecks ist nach S. 36 gleich: $\pi - A - B - C$; um ihn durch die Seiten a, b, c auszudrücken, hat man nach S. 270 die Formel:

$$(13) \qquad \sin \tfrac{1}{2}\varDelta = \frac{\sqrt{(e^s-1)(e^{s-2a}-1)(e^{s-2b}-1)(e^{s-2c}-1)}}{(e^a+1)(e^b+1)(e^c+1)},$$

wo $s = a + b + c$ ist. Bezeichnet man die auf die Seite a gefällte Höhe mit h_a, so ist nach S. 70 und 313f.:

$$(14) \quad \cot \Pi(h_a) = \frac{2}{\sin C} \sqrt{\cos \tfrac{1}{2}S . \cos(\tfrac{1}{2}S - A) . \cos(\tfrac{1}{2}S - B) . \cos(\tfrac{1}{2}S - C)},$$

wo $S = A + B + C$.

Ist AB ein Gränzbogen mit den beiden parallelen Axen AA' und BB' (Fig. 61′), so ist nach S. 25 ff. Gl. (19), (27), (29), (30) und nach S. 33, Gl. (36) oder S. 189, Gl. (6):

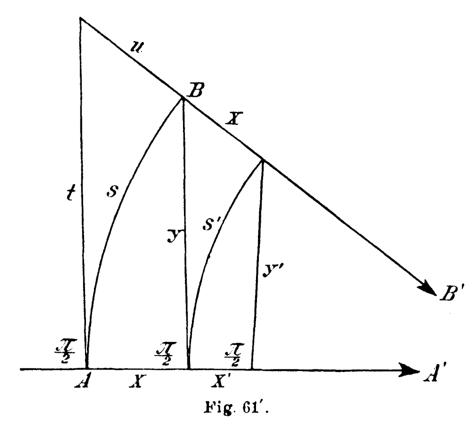


Fig. 61′.

$$(15) \quad \begin{cases} \cos \Pi(y) = e^{-x} . \cos \Pi(t) \\ \sin \Pi(y) = e^{-x} \end{cases}$$

$$(16) \quad s = \cot \Pi(y) = \cos \Pi(t)$$

$$(17) \qquad s' = s . e^{-x}$$

$$(18) \qquad \sin \Pi(t) = e^{-u}.$$

Die Richtigkeit der letzten Gleichung erkennt man sofort, wenn man beachtet, dass t, u und s zu einander in genau derselben Beziehung stehen, wie y, x und s'.

Beim Kreise vom Halbmesser r ist nach S. 29, Gl. (28) der Umfang:

$$(19) \qquad 2\pi . \cot \Pi(r) = \pi(e^r - e^{-r}),$$

und nach S. 37, Gl. (38) der Flächeninhalt:

$$(20) \qquad 4\pi . \cot^2 \Pi(\tfrac{1}{2}r) = \pi\left(e^{\frac{r}{2}} - e^{-\frac{r}{2}}\right)^2.$$

Bei der Kugel vom Halbmesser r ist nach S. 43, Gl. (45) die Oberfläche:

$$(21) \qquad 4\pi \cot^2 \Pi(r) = \pi(e^r - e^{-r})^2,$$

und nach S. 50 f., Gl. (56), (58) der Rauminhalt:

$$(22) \qquad 2\pi\left(\frac{\cos \Pi(r)}{\sin^2 \Pi(r)} - r\right) = \frac{\pi}{2}(e^{2r} - e^{-2r} - 4r).$$

Die übrigen im Texte abgeleiteten Formeln wird man mit Hülfe des Sachregisters leicht auffinden können.

Lobatschefskijs Leben und Schriften.

Der folgenden Darstellung liegt in erster Linie die recht ausführliche Biographie Lobatschefskijs zu Grunde, die E. Janischefskij 1868 in Kasan veröffentlicht und die A. Potocki durch eine französische Uebersetzung allgemein zugänglich gemacht hat. Eine Reihe von Ergänzungen zu dieser Biographie enthielt schon die Rede, die A. Wassiljef zur hundertjährigen Jubelfeier des Geburtstages Lobatschefskijs 1893 in Kasan gehalten hat. Ausserdem hat aber Wassiljef eine beträchtliche Menge Stoff für eine neue Biographie gesammelt und hat mir, als er im Sommer 1897 Leipzig besuchte, Alles, was er gesammelt hatte, zur Verfügung gestellt, so dass ich mir Auszüge daraus machen konnte. Hierfür, sowie für zahlreiche andre Mittheilungen, die er mir auf brieflichem Wege gemacht hat, nicht minder für seine stete Bereitwilligkeit meine zahlreichen Anfragen über allerhand Einzelheiten zu beantworten — für alles das bin ich ihm zu ganz besonderem Danke verpflichtet. Einige Notizen habe ich endlich auch den kurzen Biographien entnommen, die den beiden Bänden der „Vollständigen Sammlung der geometrischen Arbeiten Lobatschefskijs", Kasan 1883 und 1886, beigegeben sind. Ueber die Einzelheiten und über alle sonst von mir benutzten Quellen geben die später folgenden Nachweisungen Aufschluss.

Im Ganzen fliessen die Nachrichten über den Lebensgang Lobatschefskijs ziemlich reichlich, denn Lobatschefskij hat mehrere Jahrzehnte lang einen ganz ungewöhnlichen Einfluss auf die Entwickelung der Universität Kasan ausgeübt, sodass die Geschichte dieser Hochschule während der ersten fünfzig Jahre ihres Bestehens zu einem wesentlichen Theile unter dem Zeichen Lobatschefskijs steht. Wir besitzen infolgedessen über Lobatschefskij eine Fülle von Nachrichten, die auf amtlichen Urkunden beruhen: leider beziehen sich diese jedoch fast alle nur auf äussere Ereignisse und auf seine höchst vielseitige und erfolgreiche amtliche Wirksamkeit; in die innere Entwickelung des Menschen und des Gelehrten gewähren sie so gut

wie gar keinen Einblick. Ueberhaupt ist es mit unsrer Kenntniss dieser Entwickelung ziemlich mangelhaft bestellt.

Die gedruckten Werke Lobatschefskijs liefern zwar hin und wieder, aber doch recht selten und immer nur eine sehr dürftige biographische Ausbeute, über den Menschen geben sie dagegen keinen Aufschluss und ebensowenig über die Entwickelung seiner Ideen, namentlich verrathen sie nichts über den Ursprung und die allmähliche Ausgestaltung seiner geometrischen Ansichten. Erscheinen doch gerade seine geometrischen Untersuchungen gleich in der ersten von ihm veröffentlichten Fassung so fertig und in ihrer Art vollkommen, dass sich nirgends Spuren der vorhergegangenen Entwickelung bemerklich machen. Um so mehr muss man beklagen, dass der handschriftliche Nachlass Lobatschefskijs verschollen und allem Anscheine nach für immer verloren ist. Ein Glück ist es noch, dass wir durch gewisse, im Verlaufe unsrer Darstellung zu erwähnende Funde wenigstens einigermassen in den Stand gesetzt sind, uns eine Vorstellung davon zu machen, wie Lobatschefskij im Laufe der Jahre zu seiner nichteuklidischen Geometrie gekommen ist, so dass wir also doch nicht ganz auf blose Vermuthungen angewiesen sind. Aber auch hier geht es wie so oft: einzelne Fragen werden durch solche Funde beantwortet, so und so viele andre nicht, und neue Fragen treten auf, deren Beantwortung schwerlich jemals zu erwarten ist.

Briefe Lobatschefskijs besitzen wir nur äusserst wenige, und diese wenigen sind durchweg geschäftlichen Inhalts; auch aus Briefen seiner Freunde lässt sich nichts über sein Wesen und seinen Charakter entnehmen, denn solche Briefe sind mir wenigstens nicht bekannt geworden. Ziemlich dürftig ist endlich, was uns mündliche Ueberlieferung an Nachrichten über seine Persönlichkeit erhalten hat.

Unter diesen Umständen wird man es begreifen, wenn das Lebensbild, das ich zu zeichnen versuche, in mancher Beziehung recht unvollkommen ausfällt und gar manche Frage offen lässt.

Kapitel I.

Lobatschefskijs erste Jugend und Universitätsjahre. Sein Lehrer Bartels.

Nikoláj Iwánowitsch Lobatschéfskij ist am 22. Oktober (2. November) 1793 im Gouvernement Nishnij-Nówgorod geboren, nach der einen Angabe in der Stadt Nishnij-Nowgorod selbst, nach der andern im Distrikte Makárjef. Sein Vater hiess Iwán Maxímowitsch Lobatschéfskij, die Mutter Praskówja Alexándrowna. Der Vater hatte, soviel man weiss, eine ziemlich bescheidene Anstellung als Architekt oder Feldmesser; er war aus Polen eingewandert, muss aber zur orthodoxen Kirche übergetreten sein, denn man hat feststellen können, dass beide Aeltern während der Jahre 1792—95 in Nishnij-Nowgorod gebeichtet haben. Ausser unserm Nikolaj hat ihm seine Gattin noch zwei Söhne geboren, einen älteren Alexander und einen jüngeren Alexéj.

Schon 1797 starb der Vater, und die Mutter scheint bald darauf nach Kasan gezogen zu sein, wo sie mit ihren drei Söhnen in sehr beschränkten Verhältnissen lebte. Es muss daher für sie eine grosse Erleichterung gewesen sein, dass sie ihre Söhne auf dem Kasaner Gymnasium unterbringen konnte, wo diese auf Staatskosten erzogen wurden. Nikolaj insbesondre wurde im November 1802 in das Gymnasium aufgenommen und hat sich während seiner ganzen Schulzeit durch seine Leistungen und sein Betragen ausgezeichnet. Dass er gegen Ende der Schulzeit die Mathematik und das Lateinische mit besondrer Vorliebe betrieben habe, wird ausdrücklich bezeugt.

Am 14. (26.) Februar 1805 wurde die neugegründete Universität Kasan eröffnet, an der unserm Nikolaj später eine so lange und so erfolgreiche Wirksamkeit vergönnt sein sollte. Die Anfänge der Universität waren äusserst bescheiden. Mit der Abhaltung der Vorlesungen wurden zunächst einige Lehrer des Gymnasiums beauftragt, und zum Vorsitzenden des Kollegiums der Docenten wurde Jakófkin, der Rektor des Gymnasiums, ernannt. Die Vorlesungen beschränkten sich unter diesen Umständen zum Theil auf eine Wiederholung des schon auf dem Gymnasium behandelten Stoffs, während die Fächer, die über die Stufe des Gymnasiums hinausgingen, nur sehr flüchtig und mangelhaft behandelt wurden. Erst nach Verlauf zweier Jahre wurde das anders, als der Kurator der Universität, Rumófskij, nach und nach eine Anzahl Professoren von auswärts berief, namentlich

Deutsche. Freilich war auch dann noch der Universitätsunterricht ziemlich erschwert, denn von diesen deutschen Professoren verstand nur einer, Namens Fuchs, das Russische, und die Vorlesungen wurden daher im Allgemeinen lateinisch gehalten; doch machte das gerade bei den mathematischen Fächern, die hier allein für uns in Betracht kommen, verhältnissmässig am wenigsten aus.

Sehr bald nach der Eröffnung der Universität fragte man bei den Aeltern der Schüler des Gymnasiums an, ob sie bereit wären, ihre Söhne nach Beendigung des Gymnasialkurses in die Universität eintreten zu lassen; diese sollten da auf Staatskosten unterhalten werden, wenn sie sich verpflichteten, nachher sechs Jahre lang der Universität zu dienen. Unter denen, die auf dieses Anerbieten eingingen, war auch Lobatschefskijs Mutter und zwar hatte sie ihr Antwortschreiben eigenhändig geschrieben, was als Beweis einer bei Frauen ihres Standes ungewöhnlichen Bildung gelten muss.

Nikolajs älterer Bruder Alexander wurde sofort in die Universität aufgenommen, doch hat er sie nicht lange besucht, denn schon 1807 nahm er sich das Leben. Nikolaj selbst wurde im Juli 1806 geprüft, aber vorläufig auf dem Gymnasium gelassen, um sich noch weiter im Lateinischen zu vervollkommnen. Im December 1806 unterzog er sich nochmals einer Prüfung und wurde nunmehr am 9. (21.) Januar 1807 als Student an der Universität eingeschrieben.

Zum Glücke für Lobatschefskij war der mangelhafte Zustand, in dem sich der Unterricht an der Universität Kasan bisher befunden hatte, nicht mehr von langer Dauer. Schon in den Jahren 1807 und 1808 wurde der Lehrkörper der Universität durch die Berufung einer Reihe deutscher Professoren ergänzt, und namentlich erhielt die reine Mathematik in Bartels, der im Februar 1808 ankam, einen Vertreter, wie man ihn nur wünschen konnte.

Da Bartels unzweifelhaft der Mann ist, dem Lobatschefskij für seine mathematische Bildung am Meisten zu verdanken hat, so müssen wir auf ihn etwas ausführlicher eingehen.

J. M. C. Bartels, geboren am 12. August 1769 in Braunschweig, hatte sich aus sehr beschränkten Verhältnissen emporgearbeitet und theils auf eigne Hand aus Büchern, theils unter der Anleitung von Pfaff in Helmstedt und von Kästner in Göttingen gründliche mathematische Kenntnisse erworben. Nachdem er dann von 1794 bis 1804 in der Schweiz als Lehrer gewirkt hatte, war er 1805 einer Aufforderung seines Landesherrn, des Herzogs Karl Wilhelm Ferdinand, gefolgt und nach Braunschweig zurückgekehrt, wo er, bis über seinen künftigen Wirkungskreis entschieden sein würde, ein ansehnliches Wartegeld

erhielt und sich ganz seinen Studien widmen konnte. In derselben Lage befand sich damals Gauss, der sich seit dem Jahre 1798 mit Unterstützung des Herzogs in Braunschweig aufhielt. Bartels und Gauss kannten einander schon von früher her, denn Bartels war von 1783 an fünf Jahre lang an einer der beiden Braunschweigischen Schreib- und Rechenschulen der Gehülfe des Lehrers gewesen, gerade in dieser Schule hatte damals Gauss seine erste Bildung erhalten, und der um acht Jahre ältere Bartels hatte mit ihm Freundschaft geschlossen. In den folgenden Jahren hatten beide wenigstens von Zeit zu Zeit Briefe gewechselt und jetzt verkehrten sie wieder auf das Freundschaftlichste mit einander, wobei freilich Gauss, der damals schon durch seine arithmetischen und astronomischen Arbeiten berühmt war, mehr der gebende als der empfangende Theil gewesen sein wird. Der Herzog beabsichtigte für Gauss eine Sternwarte zu errichten und im Anschluss daran eine höhere mathematische Lehranstalt zu schaffen, an der Bartels als Lehrer thätig sein sollte. Durch den Krieg von 1806 wurden jedoch alle diese Pläne vereitelt: der Herzog starb auf dem Rückzuge von der Schlacht bei Jena, und Gauss und Bartels verloren die ihnen gewährte Unterstützung. Infolgedessen ging Gauss 1807 nach Göttingen, und Bartels siedelte in demselben Jahre nach Kasan über. Er hatte nämlich schon früher durch Vermittelung des ständigen Sekretärs der Petersburger Akademie, Nikolaus Fuss, eine Berufung nach Kasan erhalten, diese aber wegen seiner Verpflichtungen gegen den Herzog abgelehnt; unter den jetzigen veränderten Verhältnissen knüpfte er wieder mit dem Kurator Rumofskij an und erhielt im Juni 1807 seine Ernennung, im Oktober reiste er ab.

Auch nach ihrer Trennung blieben Gauss und Bartels in brieflichem Verkehre, allerdings mit grossen Unterbrechungen. Leider sind uns nur die Briefe von Bartels an Gauss erhalten, diese aber zeigen, dass ihr Briefwechsel blos rein persönliche Angelegenheiten betraf und mathematische Fragen gar nicht berührte. Für uns sind namentlich zwei Stellen aus Briefen von Bartels von Interesse. Unterm 6. (18.) Juli 1808 schreibt dieser aus Kasan: „Mein Wirkungskreis ist hier angenehmer als ich erwarten durfte. Die meisten meiner Zuhörer sind in der Mathematik sehr gut vorbereitet. Zwei derselben studiren Ihre Disquisitiones.“ Andrerseits heisst es unterm 14. (26.) April 1821 aus Dorpat, wo Bartels von 1821 ab bis zu seinem Tode, am 7. (19.) December 1836, die Lehrstelle für Mathematik bekleidete: „Mehr als ein Jahrzehnt ist verflossen, dass wir von einander auch nicht eine Zeile gesehen haben. Einen Brief erhielt ich bald nach meiner Ankunft in Kasan. . . . Ich reiste den 6. December von Kasan

ab und kam den 7. Januar hier an.... In Rücksicht letzterer [der Zuhörer] dürfte ich wohl etwas mehr Sinn für mathematische Wissenschaften wünschen. In Kasan war ich ungeachtet der übrigen nicht ganz angenehmen Verhältnisse in dieser Hinsicht immer sehr glücklich."

Ergänzt werden diese Briefstellen durch einige Aeusserungen in der Vorrede zu dem ersten und einzigen Bande der „Vorlesungen über mathematische Analysis", die Bartels später in Dorpat ausgearbeitet hat. Ueber Kasan sagt er da: „Zu meiner grossen Freude fand ich ungeachtet der damals noch kleinen Zahl der Studierenden ungemein viel Sinn für das Studium der mathematischen Wissenschaften, so dass ich in meinen Vorlesungen über höhere Analysis auf wenigstens zwanzig Zuhörer rechnen durfte und sich allmählich eine kleine mathematische Schule bildete, aus welcher eine Menge geschickter mathematischer Lehrer für die Gymnasien und Universitäten Russlands, besonders des Kasanischen Lehrbezirks, hervorgegangen sind, die nun schon seit zwanzig Jahren das Studium der mathematischen Wissenschaften noch mehr verbreitet haben." Dagegen heisst es über Dorpat: „Obwohl ich hier ungeachtet der bereits grössern Menge der Studierenden als in Kasan, weit weniger Liebhaber für das mathematische Studium vorfand, und ich meine Vorträge grösstentheils auf Elementar-Mathematik beschränken musste, so hat doch allmählich der Sinn für diese Wissenschaft auch hier zugenommen, und ich darf schon seit mehrern Jahren für meine Vorlesungen über höhere Mathematik auf wenigstens 10—12 Zuhörer rechnen."

Aus dem Gesagten wird man schon schliessen, dass Bartels ein vorzüglicher Lehrer gewesen sein muss, gerade der richtige Mann, um an einer im Entstehen begriffenen Universität einen Stamm gründlich durchgebildeter Mathematiker heranzuziehen. Als einen solchen zeigen ihn auch seine bereits erwähnten „Vorlesungen über mathematische Analysis"; diese sind äusserst klar geschrieben, verrathen überall einen scharfen Kopf und ragen durch das Streben nach möglichster Strenge der Beweise hervor. Ein wirklich origineller mathematischer Denker scheint er dagegen nicht gewesen zu sein, wenigstens hat er sich niemals durch irgend eine mathematische Entdeckung bekannt gemacht; was er ausser den „Vorlesungen" veröffentlicht hat, ist äusserst wenig, und auch diese sind mehr durch Gediegenheit als durch Originalität ausgezeichnet. Seinen Schülern in systematischer Darstellung mitzutheilen, was er selbst wusste, und dieses Wissen dürfen wir nicht gering anschlagen, sie zum Studium der mathematischen Litteratur zu befähigen und mit den klassischen Werken bekannt zu machen, also mit Eulers Differential- und Integralrechnung, mit Lagranges ana-

lytischer Mechanik, mit der Mécanique céleste des Laplace, mit Monges geometrischen Untersuchungen und mit den Gaussischen Disquisitiones arithmeticae — das war sein Beruf und seine Gabe. So hat er jederzeit seinen Platz im Leben ausgefüllt, und die Erfolge seiner Lehrthätigkeit zeigen, dass er nicht vergebens gewirkt hat.

Etwas später als Bartels, nämlich im September 1808, kam der bisherige Göttinger Privatdocent Renner nach Kasan und übernahm die Professur für angewandte Mathematik, also namentlich die Mechanik, wobei er als Adjunkten den Magister Nikólskij erhielt. Renner, geboren 1780, wird als ein guter Mathematiker und Lateiner gerühmt, hat auch einiges Mathematische veröffentlicht; es scheint jedoch, dass sein Einfluss auf die Entwickelung der mathematischen Fähigkeiten Lobatschefkijs weit geringer war als der von Bartels. Zwei Jahre nach Bartels und Renner, im März und im Oktober 1810, kamen noch Joseph Johann Littrow (1781—1840) und Franz Xaver Bronner (1758—1850) nach Kasan, jener als Professor der Astronomie, dieser als Professor der Physik. Auch sie sind noch Lehrer Lobatschefskijs gewesen, wie wir nachher hören werden. Jedenfalls war vom Jahre 1810 ab die physiko-mathematische Fakultät der Universität Kasan mit Lehrkräften so gut versorgt, wie damals kaum eine deutsche Universität.

Doch kehren wir zu unserm Studenten zurück.

In dem Jahre 1808 steht Lobatschefskij noch nicht auf der Liste derer, die sich mit Mathematik beschäftigen wollen; nach der Angabe des Rektors bereitete er sich vielmehr auf das Studium der Medicin vor. Es ist deshalb auch zweifelhaft, ob er unter den beiden war, von denen Bartels im Juli 1808 erzählt, dass sie die Gaussischen Disquisitiones studirten. Aber schon im Jahre 1809 waren seine Fortschritte in der Mathematik so gross, dass er am 31. Mai (12. Juni) von seinen Mitstudenten zum Kammerstudenten gewählt wurde und dass die Wahl die Bestätigung der Vorgesetzten erhielt. Diese Kammerstudenten hatten eine Art Aufsicht über die jüngern Studenten zu führen und genossen dafür gewisse besondre Vergünstigungen. Lobatschefskij muss aber damals ein gehöriges Mass jugendlichen Uebermuthes besessen und einen starken Trieb gefühlt haben, diesem Uebermuthe nach aussen Luft zu machen. Während seine Führung bisher ohne Tadel gewesen war, sodass der Unterinspektor der Studenten, ein gewisser Kóndyref, stets sehr günstig über ihn berichtet hatte, beging er jetzt allerhand thörichte Streiche. Unter andern liess er einmal Nachts um elf Uhr eine Rakete steigen, was ihm einige Tage Karzer einbrachte, namentlich aber betheiligte er sich an den Neckereien,

die sich die Studenten gegen den selbst noch sehr jugendlichen Kondyref erlaubten. Von 1810 ab hören daher in Kondyrefs Berichten die Klagen über Lobatschefskijs Betragen gar nicht mehr auf, und als sich dieser in den Weihnachtsferien 1810 den Streichen der jüngern Studenten gegenüber zu nachsichtig gezeigt hatte, verlor er die Stelle als Kammerstudent. Trotzdem wagte er es im Januar 1811 verbotner Weise einen Maskenball zu besuchen und, was schlimmer war, er that Aeusserungen, die ihn, wahrscheinlich unverschuldet, in den Geruch des Atheismus brachten. Doch wird wenigstens ausdrücklich bezeugt, dass keine dieser Jugendthorheiten geeignet war, die Lauterkeit seines Charakters zweifelhaft zu machen, und dass man ihm niemals etwas Unehrenhaftes oder Unsittliches nachsagen konnte.

Die ungünstigen Berichte Kondyrefs waren durch den Rektor Jakofkin an den Kurator weitergegeben worden, und dieser hatte unter dem Ausdrucke des lebhaftesten Bedauerns, dass Lobatschefskij „seine glänzenden Eigenschaften so verdunkle“ gedroht, er werde, falls die Klagen sich wiederholten, genöthigt sein, dem Unterrichtsminister Anzeige zu machen. Unter diesen Umständen und namentlich bei der ausgesprochenen Missgunst des damals ziemlich einflussreichen Rektors Jakofkin hätte Lobatschefskij vielleicht seinen jugendlichen Uebermuth theuer bezahlen müssen, wenn er nicht an Bartels, Littrow und Bronner einen sichern Rückhalt gehabt hätte. Diese hatten gleich von Anfang an seine aussergewöhnliche Begabung erkannt und waren von seinen Fortschritten und Leistungen so befriedigt, dass sie in ihren Berichten an den Senat der Universität und an den Kurator immer des Lobes voll waren. Sie würden wohl schon gegen die Klagen Kondyrefs Einspruch erhoben haben, wenn sie dessen russisch geschriebene Berichte hätten lesen können. Bald hatten sie jedoch eine Gelegenheit, nachdrücklich und mit gutem Erfolge für Lobatschefskij einzutreten.

Am 7. (19.) Juli 1811 beschloss der Senat dem Kurator Vorschläge zu machen, welche Studenten zu „Kandidaten“ ernannt werden sollten. Auf der Liste stand ausser drei andern der jüngere Bruder des unsrigen, Alexej Lobatschefskij, der Kandidat der Chemie und Technologie werden sollte. Unser Nikolaj war nicht darunter, sondern es heisst in dem Sitzungsprotokolle: „Einige Mitglieder des Senats haben darauf hingewiesen, dass man allerdings Nikolaj Lobatschefskij des Grades eines Kandidaten würdig erachten könnte, wenn man blos auf seine bemerkenswerthen Fortschritte und auf seine grosse Begabung für die Mathematik Rücksicht zu nehmen hätte. Aber seine schlechte Führung steht dem entgegen, und nach der Ansicht

des inspicirenden Professors und mehrerer andrer Mitglieder würde es ungerecht sein und dem Reglement widersprechen, wollte man ihm diese Beförderung zu Theil werden lassen; man zieht daher vor, abzuwarten, bis sich seine Führung gebessert haben wird." Bevor jedoch diese Vorschläge dem Kurator übersandt waren, fand schon am 11. (23.) Juli eine neue Senatssitzung statt, in der man sich dafür entschied, jene vier Studenten gleich zu Magistern vorzuschlagen, und Bartels, Littrow und Bronner, die noch von dem Professor Hermann unterstützt wurden, konnten diesmal durchsetzen, dass auch Nikolaj gleich mit zum Magister vorgeschlagen wurde. Allerdings musste dieser an dem genannten Tage vor dem Senate erklären, dass er seine Vergehen bereue und sich vollständig bessern wolle. Dafür beschloss aber der Senat, ihn unter die Zahl der Magister aufzunehmen, „damit er nicht durch übermässige Strenge zur Verzweiflung gebracht und getödtet werde, er, dessen Talente und Erfolge die schmeichelhaftesten Hoffnungen für die Universität erwecken". Unterm 3. (15.) August bestätigte der Kurator Rumofskij die gemachten Vorschläge.

Man muss übrigens hierbei berücksichtigen, dass damals und noch bis zum Jahre 1819 an der Universität Kasan keine bestimmten Vorschriften über die Verleihung der drei akademischen Grade: Kandidat, Magister und Doktor bestanden, und dass infolgedessen Senat und Kurator vollkommen freie Hand hatten, welche Anforderungen sie bei der Verleihung stellen wollten.

Der Senat arbeitete nunmehr ein Regulativ aus, in dem die Pflichten der Kandidaten und Magister genau festgesetzt wurden. Darnach waren insbesondre die Magister beauftragt, die von den Professoren gehaltenen Vorlesungen mit den Zuhörern zu wiederholen und nicht Verstandenes zu erklären, auch mussten sie unter Umständen abwesende Professoren vertreten; ferner hatten sie bei der Redaktion der Kasaner Nachrichten (Kasánskija Iswjéstija) mitzuwirken, die 1812 zum Organe der Universität erhoben wurden und die ausser amtlichen Bekanntmachungen auch Mittheilungen über neue Entdeckungen, über litterarische Fragen und dergleichen enthielten und dadurch zur Hebung der allgemeinen Bildung in dem Gouvernement beitragen sollten. Vor allen Dingen aber waren die Magister verpflichtet, sich unter der besondern Anleitung einzelner Professoren in ihrem eignen Fache weiter zu vervollkommnen, und über den Erfolg dieser Studien mussten die betreffenden Professoren jedes Semester dem Senate der Universität Bericht erstatten. Endlich wurde in Verbindung mit der Universität ein pädagogisches Institut errichtet, dem der Professor Bronner vorstand und dem alle Kandidaten und Ma-

gister angehören mussten, um sich da auf ihren künftigen Lehrerberuf vorzubereiten.

Es entsprach nur diesen Bestimmungen, dass Lobatschefskij von jetzt ab wöchentlich mehrere Stunden auf der Wohnung von Bartels zubrachte, um unter dessen Anleitung seine Ausbildung in der höhern Mathematik zu vollenden. Insbesondre beschäftigte er sich dort während der ersten Hälfte des Jahres 1812 mit der Laplaceschen Mécanique céleste und hatte dabei noch einen Genossen in dem Magister Símonof, dem spätern Professor der Astronomie an der Universität Kasan. Nähere Auskunft über diese Studien giebt der folgende von Bartels an den Senat erstattete Bericht, dessen Wortlaut ich Wassiljef verdanke:

„Concilio Honoratissimo Universitatis Casanensis
Professor Bartels.

„Nemo Vestrum, Viri clarissimi et honoratissimi, nescit me initio hujus cursus praeteriti academici officium D^{orum} Magistrorum Lobatschevsky et Simonov in scientiis mathematicis amplius excolendorum et hac de re nonnunquam ad vos referendi suscepisse. Quam relationem jam eo libentius facio, quo felicior meae operae successus fuit. Praelectionibus meis privatis, in quibus maximam partem 1^{mi} et aliquam 2^{di} tomi egregii illius operis, cujus auctor Celeberrimus la Place est, explicavi, D^{ni} Magistri non solum cum singulari diligentia interfuerunt sed quacunque etiam occasione proficiendi optime usi sunt. Elaborationes huic meae relationi adjunctae ad Mechanicam coelestam spectantes dicto meo probando inservient.

„E specimine D^{ni} Simonovi quod priori quidem mea eo de argumento instructione in usum adhibita proprio tamen marte composuit, etsi demum hodie mihi traditum non nisi fugitivo oculo percurrere potui, manifestum fore spero, eum in Analysi et Mechanica sublimiori probari posse id quod eo magis laudandum est, quod astronomiae practicae duce D^{no} honor. Coll. Littrow eximiam operam dat.

„Quamvis autem D. Simonov rerum mathematicarum bene expertus sit, tamen a D^{no} Lobatschevski praesertim in partibus subtilioribus superatur. Ex hujus enim commentatione quam absque ullo subsidio, opus ill. la Place si excipias, elaboravit, intelligitur, eum res in illa tractatas non solum penetrasse, sed etiam ideis ipsi propriis exornare scivisse. Pluribus in locis hujus brevis commentationis praestantissimi ingenii mathematici, quod illustre nomen aliquando non poterit non assequi, indicia inveniuntur, quae exponere hujus loci non esse videtur.

„Rogo honoratissimum Consilium ut et hanc meam relationem et ambas commentationes ad Virum Excellentissimum, Dominum Curatorem transmittendas curet. Scripsi Casani die 10. Juli 1812.

Martinus Bartels Prof. o. p. Mathes."

Die Abhandlung Lobatschefskijs, von der Bartels hier spricht, ist wahrscheinlich eine ungedruckt gebliebene, die den Titel trug: Teoríja elliptítscheskawa dwishénija njebésnych tjel (Theorie der elliptischen Bewegung der Himmelskörper).

Ebenso wie die Mécanique céleste studirte Lobatschefskij unter der Anleitung von Bartels auch die Disquisitiones arithmeticae von Gauss, und das Ergebniss dieser Studien war eine Abhandlung: O rasrjeschénii algebraítscheskawa urawnjénija: $x^n - 1 = 0$ (Ueber die Auflösung der algebraischen Gleichung: $x^n - 1 = 0$), die er im Jahre 1813 der physiko-mathematischen Abtheilung der Universität vorlegte. Er behandelt darin den Fall, dass n die Form $4m + 1$ besitzt, und giebt allgemeine Ausdrücke für die Koefficienten der Gleichung m-ten Grades, auf die sich die Gleichung: $x^n - 1 = 0$ durch Ausziehen von Quadratwurzeln zurückführen lässt. Auch diese Arbeit blieb zunächst ungedruckt, Lobatschefskij hat sie aber später in sein Lehrbuch der Algebra aufgenommen, wo sie in Kapitel 16, § 215 enthalten ist.

Nach alledem müssen wir den Einfluss, den Bartels auf die Entwickelung der mathematischen Fähigkeiten Lobatschefskijs ausgeübt hat, recht hoch anschlagen. Bartels ist es jedenfalls gewesen, der in seinem Schüler den Sinn für mathematische Strenge geweckt und genährt hat; unter seiner Leitung wird sich dieser die ungewöhnliche Beherrschung des mathematischen Rechenapparates angeeignet haben, die er in seinen Schriften überall verräth. Auch hat Lobatschefskij lebenslang das Andenken an seinen Lehrer hoch in Ehren gehalten.

Neben den rein mathematischen Studien bei Bartels beschäftigte sich Lobatschefskij unter Littrow auch mit der praktischen Astronomie; im Jahre 1811 beobachtete er zusammen mit Simonof den damaligen grossen Kometen, und diese Beobachtungen wurden von Littrow in den Kasaner Nachrichten veröffentlicht.

Ausserdem war Lobatschefskij auch ein eifriges Mitglied des von Bronner geleiteten pädagogischen Instituts, und es ist anzunehmen, dass er durch den sehr vielseitig und namentlich auch philosophisch gebildeten Bronner in die Philosophie Kants eingeführt worden ist, dessen Lehre von der Apriorität der geometrischen Sätze er später einen so harten Stoss versetzen sollte.

Kapitel II.

Lobatschefskijs erste Lehrthätigkeit. Die Zustände an der Universität. Erste Versuche auf dem Gebiete der Geometrie.

In das Jahr 1812 fällt der Anfang der langjährigen Lehrthätigkeit Lobatschefskijs, denn er erhielt da den Auftrag, einer Anzahl von Beamten, die sich auf eine seit 1809 eingeführte Prüfung vorbereiten sollten, zwei Stunden wöchentlich über Arithmetik und Geometrie vorzutragen. Da sich sein Vortrag durch Einfachheit und Klarheit auszeichnete, so betraute man ihn schon im folgenden Jahre damit, an der Universität selbst neben seinem bisherigen Lehrer Bartels Vorlesungen über diese Gegenstände zu halten, und am 26. März (7. April) 1814 wurde er auf die Empfehlung von Bartels und Bronner zum Adjunkten ernannt, gleichzeitig mit Simonof und zwei andern Magistern.

Die Verhältnisse an der Universität hatten sich mittlerweile recht unerquicklich gestaltet. Der schon früher erwähnte Jakofkin, der bei der Gründung der Universität mit der Verwaltung der Rektorgeschäfte beauftragt worden war, hatte nämlich versucht, an der Universität ebenso unbeschränkt zu herrschen wie am Gymnasium, dessen Direktion er gleichzeitig auch noch führte. Das aber wollten sich die Professoren nicht gefallen lassen und am allerwenigsten die vom Auslande gekommenen wie Bartels, Bronner, Littrow und andre. Die Folge waren fortwährende Streitigkeiten im Professorenkollegium und allgemeine Unzufriedenheit, zumal sich der Kurator Rumofskij immer auf die Seite Jakofkins stellte. Im Jahre 1810 hatte zwar das Ministerium die vorläufige Ordnung der Universitätsverwaltung durch eine endgültige nach dem Muster der ältern Universitäten ersetzen wollen und hatte deshalb die Wahl eines Rektors und von Dekanen verfügt, aber Jakofkin hatte zu hintertreiben gewusst, dass die Gewählten ihr Amt antraten, obwohl seine Unbeliebtheit dadurch sehr deutlich zu Tage getreten war, dass keine der Wahlen auf ihn fiel.

Als 1813 nach Rumofskijs Tode ein neuer Kurator Namens Saltykóf ernannt wurde, da war es allerdings mit Jakofkins Einfluss zu Ende, und so konnte die neue Universitätsverfassung wirklich ins Leben treten; aber der allgemeine Zustand besserte sich dadurch keineswegs. Der zum Rektor gewählte Professor der Anatomie Braun befand sich nämlich in fortwährender Uneinigkeit mit dem Kurator,

und die Kämpfe zwischen dem Professorenkollegium und dem Kurator wurden daher nur noch heftiger. Namentlich war über die Beförderungen gar keine Einigkeit zu erzielen, da sich der Kurator nicht um die Rechte kümmerte, die der Senat nach dem Universitätsstatute in dieser Beziehung besass. So geschah zum Beispiel die Ernennung Lobatschefskijs und Simonofs zu Adjunkten auf den blosen Antrag des Kurators unmittelbar durch den Minister, ohne dass der Senat sie vorgeschlagen hatte, und als im April 1816 der Kurator dem Senat anheimstellte, die beiden zu ausserordentlichen Professoren zu wählen, lehnte das die Mehrheit des Senats ab, weil die im Statute vorgesehene Zahl von vier ausserordentlichen Professoren voll sei. Trotzdem verfügte der Minister am 7. (19.) Juli 1816 ihre Ernennung zu ausserordentlichen Professoren, „in Anbetracht ihrer vom Kurator bezeugten Kenntnisse und Fähigkeiten“. Umgekehrt wollte der Kurator, um zu sparen, freigewordene Stellen ordentlicher Professoren nur mit ausserordentlichen besetzt wissen, und als in demselben Jahre der Senat den ausserordentlichen Professor Sólnzef zum ordentlichen wählte, wurde der Wahl die Bestätigung versagt.

Zu dem höchst unbefriedigenden Verhältnisse zwischen dem Senat und dem Kurator kamen noch, durch gegenseitige Eifersucht und durch Brodneid veranlasst, äusserst widerwärtige Zänkereien einzelner Professoren untereinander, und leider zeigten sich dabei verschiedene der deutschen Professoren keineswegs in vortheilhaftem Lichte. Ueber diesen ewigen Zänkereien vernachlässigten nicht wenige Professoren ihren Unterricht in gröblichster Weise, und jedenfalls konnte von einem gedeihlichen Zusammenwirken aller keine Rede sein.

Die eben geschilderten Zustände an der Universität Kasan konnten selbstverständlich dem Unterrichtsministerium nicht verborgen bleiben und führten endlich im Jahre 1819 zu einer Revision der Universität, nachdem der Kurator Saltykof schon im September vorher abgegangen war.

Lobatschefskij hielt sich während des hier besprochenen Zeitraums ganz zurück und nahm an den erwähnten Streitigkeiten gar nicht Theil. Allerdings lag das wohl mit daran, dass seine Gesundheit zu wünschen übrig liess; wenigstens unternahm er im Sommer 1817 zu deren Herstellung eine Reise, die ihn nach seinem heimathlichen Gouvernement Nishnij-Nowgorod und nach den Schwefelbädern von Sérgijefsk im Gouvernement Samára führte — auch noch später, im Sommer 1819 suchte er diese Bäder auf. Vor allen Dingen aber widmete er sich unausgesetzt seiner Lehrthätigkeit und wissenschaftlichen Arbeiten. Er konnte das um so mehr, als er während

der ersten Jahre nach seinem Eintritt in den Lehrkörper der Universität keine andern Verpflichtungen hatte; erst im Jahre 1818 traten solche Verpflichtungen an ihn heran, denn er wurde zum Mitgliede des an der Universität bestehenden Schulausschusses ernannt, dem die Gymnasien und alle andern Schulen des Kasaner Lehrbezirks unterstellt waren.

Was seine Lehrthätigkeit anbetrifft, so las er zum Beispiel in den Jahren 1814—16 über Zahlentheorie nach Gauss und Legendre, sowie über ebene und sphärische Trigonometrie, wobei er das Lehrbuch von Cagnoli in der Uebersetzung von Chompré zu Grunde legte. Ueber die wissenschaftlichen Arbeiten, die ihn während jener Zeit beschäftigten, sind wir nicht näher unterrichtet; jedoch steht soviel fest, dass er sich schon damals ernstlich mit den Anfangsgründen der Geometrie befasst haben muss.

Im Jahre 1894 ist nämlich ein altes Kollegienheft zum Vorschein gekommen, das Nachschriften von Vorlesungen enthält, die Lobatschefskij von 1815 bis 1817 über Geometrie und Algebra gehalten hat. Nach den von Wassiljef über dieses Heft gemachten Mittheilungen befinden sich darin drei verschiedene Versuche, die Euklidische Parallelentheorie zu begründen.

In dem ersten Versuche erklärt Lobatschefskij die Parallellinien als solche Gerade, die gleiche Richtung haben, um auf diese Weise das Euklidische Parallelenaxiom zu vermeiden. In dem zweiten Versuche stützt er sich auf die Betrachtung unendlich grosser Ebenenstücke, ähnlich wie Bertrand (vgl. S. 71, 73 und 315).

Der dritte Versuch endlich ist besonders deshalb bemerkenswerth, weil er zeigt, dass sich Lobatschefskij sehr eingehend mit den Untersuchungen Legendres über die Parallelentheorie beschäftigt hat. Zunächst wird bewiesen, dass die Winkelsumme eines geradlinigen Dreiecks zwei Rechte nicht übersteigen kann und dass die Winkelsumme in jedem solchen Dreiecke gleich zwei Rechten ist, sobald sie nur in einem einzigen diesen Werth hat. Es handelt sich also nur noch darum, ein Dreieck zu finden, in dem die Winkelsumme gleich zwei Rechten ist, und in der That glaubt Lobatschefskij beweisen zu können, dass jedes rechtwinklige Dreieck, dessen einer spitzer Winkel gleich $\frac{1}{8}\pi$ ist, diese Forderung erfüllt. Erwähnenswerth ist, dass bei seinen Betrachtungen gewisse Sätze über Dreiecke, deren Winkelsumme kleiner ist als zwei Rechte, benutzt werden, zum Beispiel der Satz, dass die Summe der Winkel eines Dreiecks, das in einem andern enthalten ist, aber mit diesem eine Seite und einen anliegenden Winkel gemein hat, grösser sein muss als die Summe der

Winkel des grösseren Dreiecks. Doch braucht man deshalb nicht anzunehmen, dass Lobatschefskij diese Sätze selbständig gefunden hat, denn Sätze derselben Art kommen schon 1799 und 1800 in der zweiten und dritten Ausgabe von Legendres Eléments de Géométrie vor (vgl. S. 313).

Aus dem Gesagten geht hervor, dass Lobatschefskij damals noch gar weit von der Erkenntniss entfernt war, deren Begründung und Weiterbildung später seine Lebensaufgabe und seine grösste Leistung werden sollte, von der Erkenntniss nämlich, dass das Euklidische Parallelenaxiom wirklich ein Axiom und als solches unbeweisbar ist, und dass es eine in sich widerspruchsfreie Geometrie giebt, die dieses Axioms gar nicht bedarf. Er war noch vollständig in der Ueberzeugung befangen, von der sich Legendre sein ganzes langes Leben hindurch nicht hat frei machen können, dass jenes Axiom eines Beweises bedürftig und fähig sei, und er betheiligte sich an den fruchtlosen Bemühungen, einen solchen Beweis zu finden. Wir werden uns später dieser Thatsache zu erinnern haben.

Kapitel III.

Die Magnizkijsche Revision und Verwaltung. Lobatschefskijs Lehrthätigkeit während dieser Zeit.

Da die früher erwähnten Streitigkeiten an der Kasaner Universität gar nicht aufhören wollten, so fasste das Unterrichtsministerium im Februar 1819 den Beschluss, eine gründliche Revision der Universität vornehmen zu lassen, und beauftragte damit den wirklichen Staatsrath Michaíl Leóntjewitsch Magnízkij. Dieser war für die Dauer der Revision mit allen Vollmachten eines Kurators ausgestattet, und von seinem Berichte sollte es abhängen, ob man die Universität fortbestehen lassen oder auflösen würde.

Im Laufe des März fand die Revision statt, und Magnizkij kehrte sodann nach Petersburg zurück, um seinen Bericht zu erstatten. Zum Glücke liess man den Gedanken, die Universität aufzulösen, fallen, vielmehr wurde Magnizkij zum Kurator ernannt und leitete jetzt von Petersburg aus die Reorganisation der Universität. Freilich war das eine sehr eigenthümliche Reorganisation.

Magnizkij war in der Ansicht befangen, die wahre Ursache aller hervorgetretenen Uebelstände sei der mangelhafte Religionsunter-

richt an den Gymnasien und die gänzliche Vernachlässigung des Unterrichts in Religion und Moral an der Universität. Besonders die deutschen Professoren waren ihm ein Dorn im Auge, weil sie nach seiner Meinung ihre Schüler mit dem in Deutschland herrschenden Unglauben angesteckt hatten. Dieser Auffassung entsprechend traf er seine Massregeln.

Eine Anzahl Professoren wurde entfernt. Die Freiheit der Studenten wurde durch geradezu klösterliche Verordnungen in der unerträglichsten Weise beschränkt. Ein Direktor wurde angestellt, der nicht blos über den Lebenswandel der Studenten sondern auch über den der Professoren zu wachen hatte. Wer sich gegen die Vorschriften verging, wurde als ein „Sünder“ bezeichnet und eingesperrt; in der Kirche wurde für diese Sünder öffentlich gebetet. Andrerseits wurden Belohnungen und Auszeichnungen nicht mehr in erster Linie für wissenschaftliche Kenntnisse verliehen, sondern vor allen Dingen für Kenntnisse in der Religion und für Frömmigkeit. Selbstverständlich mussten auch die Professoren ihre Vorlesungen nach diesen Grundsätzen einrichten; von Freiheit des Worts, ja des Denkens war keine Rede mehr.

Auf diese Weise musste unfehlbar bei Professoren und Studenten ein Geist der Heuchelei gross gezogen werden, dessen Folgen nicht anders als verderblich sein konnten. Aber nicht genug damit. Bei der Revision selbst hatte Magnizkij noch die einzelnen Professoren im Allgemeinen ganz zutreffend beurteilt; er hatte Bartels und Bronner in ihren Stellungen belassen und hatte sich namentlich auch über unsern Lobatschefskij äusserst günstig ausgesprochen — Renner lebte damals nicht mehr, denn er war schon im Juni 1816 gestorben, und Littrow war in demselben Jahre nach Ofen als Mitdirektor der dortigen Sternwarte übergesiedelt. Aber bald wurde das anders. Magnizkij verfuhr bei der Besetzung der Professuren mit äusserster Willkür; das Vorschlagsrecht des Senats betrachtete er als nicht vorhanden, machte nicht selten ganz unfähige Leute zu Professoren, setzte andre aus den nichtigsten Gründen ab und bevorzugte namentlich seine Günstlinge in der unverantwortlichsten Weise. Doch hat Lobatschefskij hierunter wenigstens nicht selbst zu leiden gehabt, denn er wurde verhältnissmässig bald, im Frühjahre 1822, gleichzeitig mit Simonof zum ordentlichen Professor ernannt.

Es ist kein Wunder, dass sich Bronner und Bartels unter diesen Umständen in Kasan nicht mehr wohl fühlten und danach trachteten, es zu verlassen. Bronner nahm schon 1819 Urlaub und kam einfach nicht wieder; er ging nach Aarau in der Schweiz, wo er noch

31 Jahre lang im Dienste des Kantons Aargau thätig gewesen ist. Ende 1820 schied auch Bartels, um einem Rufe nach Dorpat zu folgen. Die physiko-mathematische Abtheilung der Kasaner Universität, die schon vorher Renner und Littrow verloren hatte, war damit abermals zweier ihrer besten Lehrkräfte beraubt. Ausserdem verlor sie aber, wenigstens auf mehrere Jahre, auch noch Simonof, der seit 1816 als Nachfolger Littrows die Astronomie vertreten hatte, denn dieser war schon Anfang 1819, noch vor der Magnizkijschen Revision, nach Petersburg gereist und begleitete dann die russische Expedition, die 1819—21 unter der Führung Bellingshausens das antarktische Meer erforschte; erst 1822 kehrte er wieder nach Kasan zurück.

Da diese Verluste zunächst nicht ersetzt wurden, so lag die ganze Last des Unterrichts in der Mathematik, Physik und Astronomie längere Zeit auf den Schultern der beiden einzigen noch übrigen Professoren der Abtheilung, Nikolskij und Lobatschefskij, ja zeitweilig auf denen Lobatschefskijs allein, denn Nikolskij wurde durch den Bau der Universität, dem er sich ganz widmete, dem Unterrichte entzogen. Lobatschefskij entfaltete damals eine geradezu erstaunliche Thätigkeit. Im April 1819 wurde er mit der Abhaltung der Vorlesungen über Astronomie und mit der Leitung des astronomischen Observatoriums beauftragt; gleichzeitig übernahm er alle rein mathematischen Vorlesungen, die bisher Nikolskij gehalten hatte, und nach Bronners Weggange auch noch den Unterricht in der theoretischen und der Experimentalphysik. Nachdem Bartels ausgeschieden war, wurde ihm der ganze Unterricht in der reinen Mathematik übertragen, die Astronomie und die theoretische Physik musste er aber trotzdem beibehalten und nur von den Vorlesungen über Experimentalphysik wurde er auf sein dringendes Ersuchen befreit. Im Jahre 1822 übernahm Simonof zwar die Leitung des Observatoriums wieder, aber Lobatschefskij musste ihn im Sommer 1823 noch einmal vertreten und die Vorlesungen über Astronomie behielt er bis 1825 und ebenso lange die ganze theoretische Physik, doch las er auch nach 1825 immer noch über dieses Gebiet und übernahm ausserdem die Vorlesungen über Mechanik. Erst von der Mitte der dreissiger Jahre ab konnte er sich wieder ganz auf Vorlesungen über reine Mathematik beschränken.

Mit dem Halten der Vorlesungen war es übrigens noch nicht einmal gethan, denn jeder Professor musste allmonatlich einen Bericht über die gehaltenen Vorlesungen einreichen und ausserdem regelmässig über die Leistungen und Fortschritte, namentlich auch über den Lebenswandel seiner Zuhörer berichten.

Zu dieser überaus umfangreichen Lehrthätigkeit kamen nun noch verschiedene Aemter, die Lobatschefskij im Laufe der Zeit übernehmen musste. Wie schon erwähnt, war er 1818 Mitglied des Schulausschusses geworden. Auch das war unter einem Kurator vom Schlage Magnizkijs keine Kleinigkeit, denn dieser Ausschuss wurde nicht blos für die wissenschaftliche Tüchtigkeit jedes neu ernannten Lehrers verantwortlich gemacht, sondern auch und zwar vor allen Dingen für dessen Moralität und Frömmigkeit. Man kann sich daher denken, dass auch dieses Amt, das Lobatschefskij eine ganze Reihe von Jahren bekleidete, eine Menge Arbeit und namentlich unendliche Schreibereien mit sich brachte. Ferner wurde Lobatschefskij schon sehr bald zu den Verwaltungsgeschäften der Universität herangezogen. Noch als ausserordentlicher Professor wurde er Ende 1820 an Stelle seines Lehrers Bartels Dekan der physiko-mathematischen Abtheilung und blieb das bis 1827, mit alleiniger Ausnahme des Jahres 1823, wo das Dekanat an Simonof überging. Im Sommer 1821 musste er nach Petersburg reisen, um im Auftrage des Kurators mathematische Werke sowie physikalische und astronomische Apparate einzukaufen. Ende 1824 wurde er Mitglied des Ausschusses, der die Veröffentlichungen der Universität zu besorgen hatte, also namentlich die Herausgabe des Kasaner Boten, einer Monatsschrift, die seit 1820 auf Magnizkijs Anordnung an die Stelle der Kasaner Nachrichten getreten war, die aber, hauptsächlich weil ihr Inhalt ganz den Magnizkijschen Grundsätzen angepasst werden musste, gar keinen Erfolg hatte und keineswegs den Gewinn abwarf, den man von ihr für die Universitätskasse erhofft hatte. 1825 wurde er Vorsitzender des Ausschusses für den Bau der Universitätsgebäude, sowie ständiges Mitglied der Universitätsverwaltung. Es wird erzählt, dass er, um seinen Pflichten als Vorsitzender jenes Ausschusses genügen zu können, sogar die Baukunst von Grund aus studirte.

Schon im Jahre 1820 war Lobatschefskij vom Kurator beauftragt worden, die Universitätsbibliothek, die sich damals in einem geradezu unglaublichen Zustande der Vernachlässigung befand, in Ordnung zu bringen, doch waren seine Bemühungen vergeblich geblieben, da der damalige Bibliothekar, der uns schon bekannte Kondyref, ihnen mit allen Mitteln entgegenarbeitete. Einer Kommission, die später zu demselben Zwecke ernannt wurde, gelang es ebenso wenig auch nur das Geringste zu erreichen. In dieser Noth wandte sich der Senat im Oktober 1825 abermals an Lobatschefskij, und der übernahm wirklich neben seinen übrigen Pflichten auch noch das Amt des Universitätsbibliothekars, ja er verwaltete dieses Amt längere Zeit sogar ganz allein.

Ein Glück war es, dass Lobatschefskij in seinen Vorlesungen und in seinen wissenschaftlichen Arbeiten nicht mit den Magnizkijschen Ansichten in Streit kommen konnte, so dass ihm dabei keine Hindernisse in den Weg gelegt wurden. Auch sonst scheint er niemals das Missfallen Magnizkijs erregt zu haben, obwohl er nicht der Mann war, sich die Gunst seiner Vorgesetzten durch Schmeicheleien zu erkaufen. Immerhin muss auch auf ihm die Magnizkijsche Verwaltung, die bis zum Jahre 1826 dauerte, schwer genug gelastet haben. Die grosse Mehrheit des Senats der Universität liess sich als ein immer dienstfertiges Werkzeug Magnizkijscher Willkür gebrauchen und war auf Verlangen des Kurators zu jeder Handlung, auch zu ungesetzlichen bereit. Lobatschefskij verhielt sich bei solchen Gelegenheiten schweigend und unterzeichnete schweigend die gefassten Beschlüsse. Er mochte wohl einsehen, dass offener Widerstand zu nichts führen würde, aber es bleibt immerhin unverständlich und wirft einen Schatten auf sein Bild als Menschen, dass er sich durch sein Stillschweigen zum Mitschuldigen machte. Doch wissen wir zu wenig über seine Beweggründe, als dass wir ihn unbedingt verurteilen dürften, und ausserdem hat er die Schuld, die er auf sich geladen hatte, redlich gebüsst, denn für eine ganze Reihe der damals gefassten Beschlüsse wurden die Unterzeichner später, sogar noch im Jahre 1834, verantwortlich gemacht und sie mussten verschiedenen der von Magnizkij gemassregelten Professoren die Verluste ersetzen, die diese infolge ungesetzlicher Senatsbeschlüsse erlitten hatten. Jedenfalls ist das der einzige wirklich dunkle Punkt in Lobatschefskijs Leben und ein neuer Beweis dafür, dass die Verhältnisse eben stärker sind als die Menschen.

Kapitel IV.

Ein ungedrucktes Lehrbuch der Geometrie aus dem Jahre 1823.

Es ist wunderbar, dass Lobatschefskij damals trotz seiner vielseitigen und angestrengten Thätigkeit auch noch Zeit zu wissenschaftlichen Arbeiten fand, doch ist wohl anzunehmen, dass er das Bedürfniss hatte, sich auf diese Weise wenigstens zeitweilig über die Sorgen des Tages und über die unbefriedigenden Zustände in seiner Umgebung zu erheben. Durch den Druck veröffentlicht hat er allerdings in dieser Zeit nichts, doch war das nicht seine Schuld.

Soweit wir über seine damaligen Arbeiten unterrichtet sind, waren es wieder Geometrie und Algebra, mit denen er sich beschäftigte.

Im Jahre 1823 sandte er an Magnizkij nach Petersburg das Manuscript eines von ihm verfassten Lehrbuchs der Geometrie und bat den Kurator, zu veranlassen, dass dieses auf Staatskosten gedruckt werde. Magnizkij übergab das Manuscript zur Begutachtung an Nikolaus Fuss, der als Schüler und Mitarbeiter Eulers bekannt ist und der damals — er ist 1826 gestorben — ständiger Sekretär der Petersburger Akademie war. Fuss sprach sich in seiner Antwort vom 3. August 1823 höchst ungünstig aus und meinte: „Wenn der Verfasser glaubt, seine Schrift könne als Lehrbuch dienen, so zeigt er dadurch, dass er von den Ansprüchen, die man an ein Lehrbuch stellen muss, keinen rechten Begriff hat, das heisst, keinen Begriff von der Fülle der geometrischen Wahrheiten, die den Inbegriff eines Elementarkurses der Wissenschaft bilden, von der mathematischen Methode, von der Nothwendigkeit scharfer und deutlicher Erklärungen aller Begriffe, von der logischen Ordnung und der methodischen Eintheilung des Stoffs, von der gehörigen Aufeinanderfolge der geometrischen Wahrheiten, von der unerlässlichen Strenge und möglichst rein geometrischen Fassung der Beweise. Von allen diesen nothwendigen Eigenschaften ist in der Geometrie, die ich durchgesehen habe, auch nicht eine Spur.“ Besonders empört war Fuss deshalb, weil Lobatschefskij gewagt hatte, bei der Ausmessung gerader Linien das französische Meter als Längeneinheit zu benutzen und bei der Winkelmessung als Grad den hundertsten Theil eines rechten Winkels. In dem Abscheu vor diesen Neuerungen, die der verruchten französischen Revolution entstammten, war Magnizkij selbstverständlich mit Fuss einig, und vermuthlich war schon dieses Vergehen genügend, dem Werke in Magnizkijs Augen allen Werth zu nehmen. Jedenfalls blieb es ungedruckt, und erst durch die zufällige Auffindung der beiden zwischen Magnizkij und Fuss gewechselten Briefe erfuhr man vor einigen Jahren, dass ein solches Manuscript vorhanden gewesen war; dieses selbst aber war verschollen und schien verloren.

Erfreulicher Weise ist das doch nicht der Fall. Im Frühjahre 1898 hat Professor Sagóskin in Kasan bei einer Durchsicht des Archivs des Kurators der Universität das verloren geglaubte Manuscript entdeckt, und durch briefliche Mittheilungen Wassiljefs bin ich in den Stand gesetzt, die beiden merkwürdigsten Stellen daraus in getreuer Uebersetzung nach dem russischen Wortlaute wiederzugeben. Allerdings lässt sich aus diesen Stellen nicht erkennen, in wie weit das von Fuss gefällte Urteil berechtigt war oder nicht, aber das ist auch weniger wichtig, und wir können hier diese Frage einfach auf sich beruhen lassen. Viel wichtiger ist es, zu wissen, welchen Stand-

punkt Lobatschefskij der Euklidischen Parallelentheorie gegenüber einnahm, als er sein Lehrbuch schrieb, und darüber erhalten wir in der That einigen Aufschluss.

Die eine Stelle lautet in der Uebersetzung folgendermassen:

„Die Bestimmung der unbekannten Theile von Dreiecken bildet den Gegenstand der Trigonometrie, wir können daher schon jetzt vorläufig soviel feststellen, dass die Aufgaben der Trigonometrie darauf hinaus kommen müssen, die Grösse dreier Stücke eines Dreiecks zu finden, sobald die drei andern gegeben sind. Sodann ist ersichtlich, dass Dreiecke nicht immer kongruent sind, wenn sie nur gleiche Winkel haben, folglich kann auch die Trigonometrie kein Verfahren zur Bestimmung der Seiten eines Dreiecks liefern, wenn nur dessen Winkel bekannt sind. Einige Mathematiker haben die Unmöglichkeit, Linien mit Hülfe von Winkeln zu bestimmen, als Grundlage der Geometrie annehmen wollen, aber diese Grundlage ist ungenügend, denn Grössen verschiedener Art können sich in Abhängigkeit von einander befinden."

Hierauf folgt ein Kapitel mit der Ueberschrift: „Ueber die Messung der Rechtecke", dessen Anfang ebenfalls von Interesse ist:

„Die Messung ebener Flächenräume gründet sich darauf, dass zwei Linien zusammentreffen, wenn sie auf einer dritten nach derselben Seite hin stehen und wenn die eine eine Senkrechte ist, die andre aber unter einem spitzen Winkel geneigt ist, der sich der Senkrechten zuwendet. Die Linien AB und CD müssen bei genügender Verlängerung zusammentreffen, wenn die eine von ihnen AB auf BC senkrecht steht und die andre CD gegen BC unter einem spitzen Winkel C geneigt ist, der sich der Senkrechten AB zuwendet. Einen strengen Beweis für diese Wahrheit hat man bis jetzt nicht finden können. Die Beweise, die man gegeben hat, kann man nur als Erläuterungen bezeichnen, aber sie verdienen nicht im vollen Sinne als mathematische Beweise geschätzt zu werden."

Lobatschefskij theilt dann von diesen Beweisen einen mit, den er als den besten bezeichnet und der ganz ähnlich wie der Bertrandsche auf der Vergleichung des Flächenraums zwischen zwei Lothen mit dem Flächenraume zwischen den Schenkeln eines Winkels beruht (vgl. S. 71 ff. und S. 315).

Die angeführten Worte zeigen, dass Lobatschefskij seit den Jahren 1815 und 16 wesentlich tiefer in den Gegenstand eingedrungen war. Er war sich mittlerweile jedenfalls darüber klar geworden, dass alle bisherigen Versuche das Parallelenaxiom zu beweisen verfehlt waren, und dass insbesondre die Annahme, die Winkel eines Dreiecks könnten nur von den Verhältnissen der Seiten abhängen, nicht aber

von den absoluten Längen der Seiten, in der Natur der Sache nicht begründet ist. Dagegen bleibt unsicher, ob er 1823 wirklich schon im Besitze seiner neuen Geometrie war oder nicht; es erscheint sogar wahrscheinlicher, dass er es noch nicht war, denn sonst hätte er sich wohl bestimmter dahin ausgesprochen, dass der Satz über das Zusammentreffen der beiden Linien AB und CD überhaupt unbeweisbar sei. Dafür, dass er damals sein System der Geometrie noch nicht vollständig entwickelt hatte, spricht überdies auch ein andrer Umstand. Wie mir nämlich Wassiljef auf eine Anfrage mitgetheilt hat, erklärt Lobatschefskij in jenem Manuscripte die Ebene ganz und gar in der Euklidischen Weise, während er in seinen spätern Schriften Ebene und gerade Linie auf den Begriff der Kugelfläche zurückführt und auf diese Zurückführung ausdrücklich grosses Gewicht legt (vgl. S. 6 ff., 80 f. und 93 ff.). Wie dem auch sei, als er jenes Lehrbuch schrieb, muss er der Erkenntniss der vollen Wahrheit über die Parallelentheorie schon sehr nahe gewesen sein.

Durch den Misserfolg mit seinem Lehrbuche der Geometrie liess sich Lobatschefskij übrigens nicht von derartigen Arbeiten abschrecken, vielmehr schrieb er jetzt ein Lehrbuch der Algebra zum Gebrauche in Gymnasien. Im Jahre 1825 legte er dieses der physikomathematischen Abtheilung vor, und auf Grund von deren Gutachten beschloss der Senat der Universität, beim Kurator zu beantragen, dass das Buch auf Staatskosten gedruckt und in den Gymnasien eingeführt werde. Da aber ein Jahr verging, ohne dass dieser Beschluss ausgeführt wurde, so erbat sich Lobatschefskij schliesslich in einem an den Senat gerichteten Schreiben sein Manuscript zurück, indem er dabei aussprach, „er bedaure die unnütze Arbeit, die er sich gemacht habe, um den Anforderungen der Behörde zu genügen“. Erst viel später wurde das Buch doch noch gedruckt: es erschien 1833 in Kasan unter dem Titel: „Algebra oder die Rechnung mit endlichen Grössen“ (vgl. S. 318, Z. 18 ff.).

Kapitel V.

Magnizkijs Sturz. Lobatschefskij legt der physiko-mathematischen Abtheilung seine neue Geometrie vor.

Das Jahr 1825 war das letzte der Magnizkijschen Willkürherrschaft. Einen Wechsel in der Leitung des Unterrichtsministeriums hatte Magnizkij allerdings noch überdauert, aber er mochte sich bei

dem neuen, freieren Geiste, der jetzt im Ministerium wehte, nicht mehr sicher fühlen; ausserdem liefen nunmehr in Petersburg auch Klagen ein über die Ordnung der Dinge, die Magnizkij in Kasan eingeführt hatte, und diese Klagen fanden bei dem neuen Minister Gehör. Die Folge war, dass Kaiser Nikolaus im Januar 1826, kurz nach seiner Thronbesteigung, eine erneute Revision der Universität Kasan befahl und mit der Ausführung der Revision den Generalmajor Sheltúchin beauftragte, dem als sachverständiger Beirath ein Beamter des Kultusministeriums, Namens Jésipof, beigegeben wurde.

Das Ergebniss dieser zweiten Revision fiel für Magnizkij so ungünstig aus, dass er abgesetzt und in Reval internirt wurde; die übertriebenen Vorschriften, durch die er die Freiheit der Studenten in so unerhörter Weise beschränkt hatte, wurden aufgehoben, und am 24. Februar (8. März) 1827 erhielt der Lehrbezirk Kasan in Mussin-Puschkin einen Mann zum Kurator, der wirkliches Verständniss für die Aufgaben einer Universität besass und der auf alle Weise und mit dem besten Erfolge bestrebt war, die Wunden zu heilen, die Magnizkijs Misswirthschaft der Kasaner Hochschule geschlagen hatte.

Lobatschefskij muss sich nach der Abfassung des vorhin erwähnten Lehrbuchs der Geometrie fortgesetzt ernstlich mit den Anfangsgründen der Geometrie beschäftigt haben, doch mochte er wohl, solange Magnizkij noch am Ruder war, nicht geneigt sein, mit seinen Ergebnissen hervorzutreten. Es dürfte daher, wie schon Wassiljef bemerkt hat, kein zufälliges Zusammentreffen sein, dass Sheltuchin die Revision der Universität am 8. (20.) Februar 1826 begann und dass nur wenige Tage später, am 12. (24.) Februar 1826, Lobatschefskij der physiko-mathematischen Abtheilung eine Arbeit vorlegte, in der er den zweitausendjährigen Streit über das Euklidische Parallelenaxiom zum Austrage gebracht hatte.

Leider kennen wir von dieser Arbeit selbst nur den Titel: „Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles“, gedruckt worden ist sie niemals, und das Manuscript muss vorläufig als verloren gelten, wenn nicht ein gütiges Geschick es doch wieder ans Tageslicht bringt. Zum Glück sind wir dagegen über den Inhalt der Arbeit vollkommen genügend unterrichtet; denn die 1829 und 30 im Kasaner Boten erschienene Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe der Geometrie“ (hier S. 1—66) bezeichnet Lobatschefskij selbst als einen Auszug aus der Arbeit von 1826 und er erklärt ausdrücklich, dass er die Gleichungen für das geradlinige Dreieck (S. 21, Gl. (17)) und Alles darauf folgende, also hier S. 21—66, schon in der „Exposition“ mitgetheilt

habe (vgl. S. 247, Z. 5—1 v. u.). Ausserdem ist uns auch noch in den „Neuen Anfangsgründen der Geometrie“, die erst in den dreissiger Jahren gedruckt worden sind, ein Bruchstück aus der „Exposition“ erhalten (s. S. 214—218, vgl. auch S. 341, Z. 9ff.).

Allerdings bleibt hierbei immer noch eine kleine Unklarheit zurück. Man sieht nämlich nicht recht ein, was Lobatschefskij eigentlich mit dem Zusatze „avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles“ gemeint hat: wenigstens findet sich in seinen spätern gedruckten Schriften keine Stelle, aus der man mit Sicherheit auf die Bedeutung dieses Zusatzes schliessen könnte. An einen vermeintlich mathematisch strengen Beweis des Euklidischen Parallelenaxioms zu denken, ist ausgeschlossen, wenn man nicht das eigene Zeugniss Lobatschefskijs über das Verhältniss zwischen der „Exposition“ und der 1829 und 30 im Kasaner Boten gedruckten Arbeit anzweifeln will, wozu nicht der geringste Grund vorliegt. Nur vermuthen kann man, er habe mit diesem Zusatze die hier auf S. 22—24 wiedergegebenen Betrachtungen gemeint, durch die gezeigt wird, dass in unserm Raume die Euklidische Geometrie so genau richtig ist, dass man nicht hoffen darf, jemals auf eine merkliche Abweichung von ihr zu stossen.

Wie dem auch sein mag, wir dürfen wohl, ohne einen Irrthum befürchten zu müssen, sagen, dass in der „Exposition succincte“ Folgendes geleistet war: Lobatschefskij sprach es klipp und klar aus, dass das Euklidische Parallelenaxiom niemals werde bewiesen werden können, weil es eben unbeweisbar sei. Er zeigte, dass es eine in sich widerspruchsfreie Geometrie giebt, die dieses Axioms gar nicht bedarf, in der mithin die Winkelsumme des geradlinigen Dreiecks von zwei Rechten verschieden ist und zwar kleiner als zwei Rechte. Er hatte diese Geometrie, für die er in dem später veröffentlichten Auszuge aus der „Exposition“ den Namen: Imaginäre Geometrie vorschlägt, so weit entwickelt, dass alle ihre Aufgaben auch rein analytisch behandelt werden konnten, hatte die allgemeinen Regeln zur Berechnung von Bogenlängen, Flächenräumen und Rauminhalten aufgestellt und die wichtigsten Aufgaben dieser Art gelöst. Auch hatte er sicher schon damals bemerkt, dass die Gleichungen, die zwischen den Seiten und Winkeln eines geradlinigen Dreiecks der neuen Geometrie bestehen, sich aus den Gleichungen für ein sphärisches Dreieck ergeben, wenn man dessen Seiten rein imaginäre Werthe ertheilt.

Ein solches Werk konnte auch ein Mann wie Lobatschefskij nicht im Laufe einiger Monate oder gar Wochen vollbracht haben. Noch heute hat jeder, der sich in die von Lobatschefskij geschaffene

Geometrie einarbeitet, gewisse Schwierigkeiten zu überwinden: er muss viele alte, gewohnte Vorstellungen, die er aus der Euklidischen Geometrie mitbringt, über Bord werfen, einige Zeit lang ist er stets in Gefahr rückfällig zu werden und glaubt in der neuen Geometrie Widersprüche zu finden, die in Wahrheit nicht vorhanden sind und die sich bei näherm Zusehen in Nichts auflösen. Auf wie viel grössere Schwierigkeiten musste Lobatschefskij stossen, der ganz auf sich selbst angewiesen war und sich überhaupt erst Bahn zu brechen hatte. Mochte ihm auch die Möglichkeit der neuen Geometrie in einem günstigen Augenblicke wie durch eine plötzliche Eingebung aufgegangen sein — diese Erkenntniss gegen jeden Zweifel sicher zu stellen, sie zu einem Systeme von solcher Vollkommenheit auszubauen, wie es jetzt vorlag, das musste noch viel saure Mühe, viel angestrengtes Nachdenken gekostet haben. Wir dürfen daher wohl annehmen, dass die im Februar 1826 vorgelegte Abhandlung die Frucht mehrjähriger Arbeit war. Da nun Lobatschefskij bis zum Jahre 1823 allem Anscheine nach die Lösung des Räthsels noch nicht oder wenigstens noch nicht vollständig gefunden hatte, so werden es die drei Jahre 1823, 24 und 25 gewesen sein, die diese Frucht gereift haben. Erinnern wir uns dazu, welche umfassende, vielseitig angespannte Thätigkeit Lobatschefskij während dieser Zeit noch ausserdem entfaltet hat, so werden wir ihm unsre Bewunderung nicht versagen können.

Kapitel VI.

Die Entdecker der nichteuklidischen Geometrie: Gauss, Schweikart, Taurinus, Lobatschefskij, J. Bolyai.

Wir haben jetzt Lobatschefskij bis an den Zeitpunkt begleitet, der in der Geschichte seines Lebens und namentlich in der seiner wissenschaftlichen Thätigkeit stets an erster Stelle genannt werden wird. Die Entdeckung, mit der Lobatschefskijs Name auf alle Zeiten unzertrennlich verknüpft bleibt, ist gemacht, eine neue, vom Parallelenaxiome unabhängige Geometrie ist geschaffen, in der die Euklidische Geometrie als ein besondrer Fall enthalten ist. Lobatschefskij hat auch in der Folge diese Leistung nicht mehr überboten und widmete seine spätern wissenschaftlichen Arbeiten zum weitaus grössten Theile der Aufgabe, einerseits die gewonnenen Ergebnisse noch weiter zu vertiefen und sie nach Möglichkeit für die Analysis

nutzbar zu machen, andrerseits auf Grund der gewonnenen Erkenntniss ein zusammenhängendes Lehrgebäude der Geometrie von den ersten Anfängen an zu errichten.

Unter diesen Umständen scheint es angemessen, die Schilderung seines Lebensganges zu unterbrechen und zunächst festzustellen, in welchem Zusammenhange seine Entdeckung mit den Versuchen steht, die vor ihm und gleichzeitig mit ihm gemacht worden sind, die Parallelentheorie ins Reine zu bringen und den Stein des Anstosses zu beseitigen, den man von Alters her in dem Euklidischen Parallelenaxiome erblickt hat. Darauf näher einzugehen ist um so mehr geboten, als auch hier die merkwürdige Erscheinung wiederkehrt, die in der Geschichte der Mathematik mehrfach zu beobachten ist, dass nämlich dieselbe wichtige Entdeckung nahezu gleichzeitig von verschiedenen Männern an räumlich weit auseinanderliegenden Orten gemacht wird; diese Erscheinung wiederholt sich hier sogar in ganz besonders auffallendem Masse.

Schon ungefähr ein Jahrzehnt vor Lobatschefskij war Gauss nach langjährigen Bemühungen zu der Ueberzeugung gekommen, dass eine vom Parallelenaxiome unabhängige Geometrie möglich sei, die er in vertraulichen Mittheilungen als die Anti-Euklidische oder Nicht-Euklidische bezeichnete. Wie er später in einem Briefe aus dem Jahre 1824 schreibt, hatte er diese Geometrie, die mit der von Lobatschefskij gefundenen vollkommen übereinstimmt, „für sich selbst ganz befriedigend ausgebildet, so dass er jede Aufgabe in derselben auflösen konnte mit Ausnahme der Bestimmung einer Constante, die sich a priori nicht ausmitteln lässt". Er selber hat freilich niemals etwas darüber veröffentlicht, ja nicht einmal seine Untersuchungen im Zusammenhange aufgeschrieben. Mehrere Jahre nach seinem Tode hat die mathematische Welt überhaupt erst erfahren, dass er sich mit solchen Ideen getragen hat, und erst in allerneuester Zeit hat sich das Dunkel, das bisher über der Entwickelung seiner Ideen lag, wenigstens einigermassen gelichtet, namentlich weil endlich sein handschriftlicher Nachlass zugänglich geworden ist.

Unabhängig von Gauss und ebenfalls eine ganze Reihe von Jahren vor Lobatschefskij hat Schweikart, damals Professor der Jurisprudenz in Charkof, später in Marburg, das Bestehen einer Geometrie erkannt, in der die Winkelsumme kleiner ist als zwei Rechte, nachdem er früher, 1807, selbst in einem Schriftchen über die Theorie der Parallellinien einen missglückten Versuch gemacht hatte, das Parallelenaxiom zu beweisen. Er nannte seine neue Geometrie Astralgeometrie, weil sie, wenn der Raum, in dem wir leben, wirklich

ihren Gesetzen gehorcht, erst bei Dreiecken merkbar werden kann, die sich bis zu den nächsten Fixsternen erstrecken; doch hat er ebensowenig wie Gauss etwas darüber veröffentlicht.

Von diesem Schweikart angeregt und überdies auch durch Gauss beeinflusst, hat dann Taurinus, ein Neffe Schweikarts, sich eifrig mit der Parallelentheorie beschäftigt und ist auch seinerseits zu der von Gauss so genannten nichteuklidischen Geometrie gelangt; er bemerkte nämlich, dass die Formeln der sphärischen Trigonometrie auch dann noch in reeller Gestalt geschrieben werden können, wenn man den Seiten des sphärischen Dreiecks rein imaginäre Werthe ertheilt, und dass die so entstandenen Formeln die Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks darstellen, dessen Winkelsumme kleiner als zwei Rechte ist. Er hat diese Betrachtungen 1826 auf den letzten elf Seiten seiner „Geometriae prima Elementa“ veröffentlicht und dabei auch eine ganze Anzahl von Aufgaben aus der neuen Geometrie, die er „logarithmisch-sphärische“ nannte, gelöst. Seine „Elementa“ sind, soweit wir wissen, das erste gedruckte Buch, in dem die trigonometrischen Formeln der nichteuklidischen Geometrie angegeben und auf die Lösung von Aufgaben, wie die Berechnung des Kreisumfangs und des Kreisinhalts angewendet sind. In Bezug auf die Veröffentlichung hat Taurinus auch vor Lobatschefskij die Priorität, denn dieser hat zwar seine „Exposition“ in demselben Jahre 1826 der physiko-mathematischen Abtheilung der Kasaner Universität vorgelegt, aber man kann das doch kaum eine Veröffentlichung nennen, und gedruckt wurden seine Untersuchungen erst mehrere Jahre später, 1829 und 30. Dagegen kann man allerdings Taurinus deswegen nicht auf eine Linie mit Lobatschefskij stellen, weil er im Grunde seines Herzens immer noch an die unbedingte Wahrheit der Euklidischen Geometrie glaubte und der Meinung war, deren alleinige Richtigkeit lasse sich doch noch irgendwie beweisen. Das kommt namentlich darin zum Ausdruck, dass er einzig und allein die Euklidische Geometrie als eine ebene Geometrie gelten lassen wollte, die als eben zwischen den beiden andern, der logarithmisch-sphärischen und der sphärischen, in der Mitte stehe. Ausserdem ist Taurinus selbst niemals wieder öffentlich auf die Frage zurückgekommen, weil sein Buch nicht die geringste Beachtung fand; er hat infolgedessen auf seine Zeitgenossen gar keine Wirkung ausgeübt und war vollständig vergessen, bis fast sechs Jahrzehnte später Stäckel sein Buch entdeckte.

Zu den schon genannten Männern kommt endlich noch Johann Bolyai hinzu, ein Ungar, dessen Vater Wolfgang Bolyai einst mit Gauss zusammen in Göttingen studirt hatte. Dieser hat in denselben

Jahren, in denen Lobatschefskij die Lösung der Parallelenfrage fand, auch seinerseits die Unbeweisbarkeit des Euklidischen Parallelenaxioms erkannt und die neue Geometrie systematisch entwickelt. Er sagt selbst, dass er schon im Jahre 1823 das Problem dem Wesen nach durchdrungen und dass er 1825 einem seiner früheren Lehrer einen handschriftlichen Aufsatz über den Gegenstand mitgetheilt habe. Es ist also sehr wahrscheinlich, dass Lobatschefskij und J. Bolyai fast genau zu gleicher Zeit die nichteuklidische Geometrie entdeckt und vollständig ausgebildet haben. Freilich hat hier Lobatschefskij die Priorität der Veröffentlichung für sich, denn J. Bolyais Darstellung der nichteuklidischen Geometrie, der berühmte Appendix zu dem Tentamen seines Vaters, ist erst 1831 gedruckt und 1832 mit dem ersten Bande des Tentamens erschienen.

Es ist gewiss höchst merkwürdig, dass in der damaligen Zeit die zwei Jahrtausende alte Frage der Parallelentheorie gleich von so vielen verschiedenen Seiten her Beantwortung gefunden hat; doch verliert diese Thatsache viel von ihrem Ueberraschenden, wenn man bedenkt, dass seit Euklids Zeiten diese Frage eigentlich niemals von der Tagesordnung verschwunden war.

Wie viele Mathematiker haben sich nicht in diesen zweitausend Jahren mit der Parallelentheorie abgequält. Schon lange vor Gauss war sich ja eigentlich jeder Mathematiker darüber klar: hier ist etwas nicht in Ordnung, hier ist das sonst so vollkommene Gebäude der Euklidischen Geometrie nicht so fest gegründet wie in seinen übrigen Theilen. In fast jedem Lehrbuche der Geometrie stand zu lesen: Euklids Parallelentheorie ist richtig, kein Zweifel, aber eine Schwierigkeit steckt darin, und dann hiess es entweder: erst der Verfasser hat diese Schwierigkeit glücklich gehoben, oder: die Lösung dieser Schwierigkeit ist noch von der Zukunft zu erhoffen.

Andrerseits hatte bereits das achtzehnte Jahrhundert zwei Männer hervorgebracht, die der Lösung des Räthsels ausserordentlich nahe gekommen waren. Saccheri hatte schon 1733 in seinem „Euclides ab omni naevo vindicatus“ mit grossem Scharfsinne die Folgen untersucht, die sich ergeben, wenn man das Euklidische Parallelenaxiom fallen lässt, und nur der unbegreiflichen Gewalt, die Euklids Autorität über ihn wie über alle andern ausübte, ist es zuzuschreiben, dass Saccheri schliesslich seine eigene Schöpfung, die Anfänge einer vom Parallelenaxiom unabhängigen Geometrie, wieder verleugnete und glaubte, das Parallelenaxiom beweisen zu können. Dreiunddreissig Jahre später hatte sich dann Lambert ebenfalls die Frage vorgelegt, welche Schlüsse man aus der Annahme ziehen könne, das Parallelen-

axiom sei unrichtig, und er war ausser andern schönen Ergebnissen insbesondre zu dem Satze gelangt, dass dann eine absolute Längeneinheit vorhanden sei, und hatte sogar den kühnen Gedanken ausgesprochen, die Geometrie, bei der die Winkelsumme im Dreiecke kleiner als zwei Rechte ist, sei möglicherweise auf einer imaginären Kugel verwirklicht, geradeso wie die sphärische Geometrie den Fall verwirklicht, dass die Winkelsumme grösser ist als zwei Rechte. Zwar hatte auch Lambert schliesslich die alleinige Richtigkeit der Euklidischen Geometrie aufrecht erhalten wollen, aber er war doch allem Anscheine nach von seinem Beweisversuche nicht recht befriedigt, wenigstens hat er seine „Theorie der Parallellinien“ nicht selbst veröffentlicht; erst nach seinem Tode wurde sie 1786 durch J. Bernoulli herausgegeben.

Allerdings müssen wir gleich hinzufügen, dass Saccheris und Lamberts Arbeiten sehr bald in Vergessenheit geriethen und erst vor wenigen Jahren wieder entdeckt worden sind, sie scheinen daher auf keinen der spätern Entdecker der nichteuklidischen Geometrie Einfluss ausgeübt zu haben. Höchstens bei Gauss ist es nicht ganz ausgeschlossen, dass er das Buch von Saccheri oder wenigstens die Abhandlung von Lambert gekannt hat, doch wissen wir darüber gar nichts. Taurinus hatte zwar aus Camerers Ausgabe der Euklidischen Elemente ersehen, dass Saccheri und Lambert Untersuchungen über die Parallelentheorie angestellt hatten, aber diese Untersuchungen selbst kannte er jedenfalls zu der Zeit nicht, wo er seine „Geometriae prima Elementa“ schrieb; ähnlich wird es sich mit Schweikart verhalten haben. Lobatschefskij und J. Bolyai endlich haben Saccheri schwerlich jemals auch nur dem Namen nach gekannt, und von Lamberts Parallelentheorie haben sie vermuthlich ebensowenig etwas erfahren.

Aber wenn auch Saccheris und Lamberts Leistungen in Vergessenheit gerathen waren und infolgedessen auf die schliessliche Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie ohne Einfluss blieben — die Schwierigkeit in der Parallelentheorie war und blieb doch die Frage, die mehr als alle andern die Mathematiker fesselte und die jahraus jahrein Bücher und Abhandlungen mit neuen Versuchen zu ihrer Beantwortung hervorrief. Als nun die Lösung der Schwierigkeit endlich gefunden wurde, als aber der Entdecker, Gauss, seine Lösung für sich behielt, ist es da ein so grosses Wunder, dass dem ersten Entdecker bald andre folgten? Müssen diese, weil sie nach Gauss kamen, durchaus von ihm abhängig sein?

Von Schweikart ist es wohl unbestreitbar und auch unbestritten, dass er ganz selbständig, unabhängig von Gauss auf die Idee einer

vom Parallelenaxiom unabhängigen Geometrie gekommen ist. Taurinus hatte allerdings durch einen Brief von Gauss erfahren, dass dieser eine solche Geometrie besass, und er war überdies von seinem Oheim Schweikart darauf hingewiesen worden; aber den genialen Gedanken, diese Geometrie mit einem Schlage aus der sphärischen abzuleiten, hat er offenbar ganz selbständig gefasst.

Wie steht es nun aber mit Lobatschefskij und J. Bolyai? Dass sie von einander unabhängig waren, ist klar. Lobatschefskij hat vermuthlich überhaupt niemals etwas von dem Vorhandensein dieses Nebenbuhlers gehört, und J. Bolyai hat erst viele Jahre später wenigstens Einiges von Lobatschefskijs Arbeiten kennen gelernt und, wie sein handschriftlicher Nachlass zeigt, mit kritischem Blicke gelesen. Beziehungen zu Schweikart und Taurinus sind bei beiden ausgeschlossen. Dagegen sind allerdings Umstände vorhanden, die der Vermuthung, Gauss habe die Untersuchungen von Lobatschefskij und J. Bolyai wenigstens mittelbar veranlasst, einen gewissen Schein von Berechtigung geben: war doch Lobatschefskijs Lehrer, Bartels, mit Gauss befreundet, und war doch J. Bolyais Vater, Wolfgang, ein alter Studienfreund von Gauss. Sehen wir zu, ob sich diese Vermuthung, die von verschiedenen Seiten ausgesprochen worden ist, bei näherer Betrachtung der Verhältnisse bestätigt; doch müssen wir uns hier in der Hauptsache auf die Beleuchtung des vermutheten Zusammenhangs zwischen Gauss und Lobatschefskij beschränken.

Wir haben gesehen, dass Lobatschefskij, als er in den Jahren 1815 und 16 über Geometrie vortrug, noch ganz auf dem Boden Euklids stand und verschiedene Versuche zum Beweise des Parallelenaxioms machte, jedenfalls aber keine Zweifel an dessen Richtigkeit äusserte; dass er ferner 1823 zwar die bisherigen Beweisversuche als verfehlt erkannt hatte, aber doch allem Anscheine nach seine neue Geometrie noch nicht besass, wenn er ihr auch sehr nahe sein mochte. Also Lobatschefskij war keineswegs beim ersten Anlaufe über die Schwierigkeit Herr geworden, sondern es dauerte noch geraume Zeit, gegen acht Jahre, bis er den Gordischen Knoten, den niemand lösen konnte, zerhieb, indem er zeigte, dass das Euklidische Parallelenaxiom zum Aufbaue der Geometrie gar nicht nöthig ist.

Andrerseits waren Bartels und Gauss blos bis zum Jahre 1807 zusammen und haben einander niemals wieder gesehen, und Bartels hatte zwar noch im Jahre 1808 in Kasan einen Brief von Gauss erhalten, seitdem aber bis 1821, wo er bereits in Dorpat war, keinen wieder, und auch der Brief von 1808 enthielt aller Wahrscheinlichkeit nach nur freundschaftliche Mittheilungen, nichts Mathematisches.

Wollen wir daher wissen, was Lobatschefskij etwa durch Bartels über die Ideen von Gauss erfahren haben kann, so brauchen wir nicht weiter als bis zum Jahre 1807, allerhöchstens bis 1808 zu gehen; nur was Gauss bis dahin erkannt hatte, kann für uns in Betracht kommen. Zum Glücke wissen wir darüber wenigstens einigermassen Bescheid.

Gauss hatte schon in den neunziger Jahren des achtzehnten Jahrhunderts angefangen, sich mit den Grundlagen der Geometrie zu beschäftigen. Ueber die Zeit bis 1808 steht Folgendes fest:

Am 16. December 1799 schreibt er an seinen Studienfreund Wolfgang Bolyai: „Ich selbst bin in meinen Arbeiten darüber [über die ersten Gründe der Geometrie] weit vorgerückt, ...; allein der Weg, den ich eingeschlagen habe, führt nicht so wol zu dem Ziele das man wünscht ... als vielmehr dahin, die Wahrheit der Geometrie zweifelhaft zu machen.“ Ausserdem sagt er, dass er die ganze Geometrie — gemeint ist natürlich die Euklidische — streng beweisen könne, sobald sich beweisen lasse, dass es für den Flächeninhalt eines geradlinigen Dreiecks keine endliche obere Gränze gebe; solcher Sätze habe er mehrere. Hier ist er also ganz nahe daran, an der Richtigkeit der Geometrie, das heisst, des Euklidischen Parallelenaxioms zweifelhaft zu werden.

Ein fünfjähriger Zwischenraum liegt zwischen dieser Aeusserung und der nächsten, die abermals in einem Briefe an W. Bolyai enthalten ist. In diesem vom 25. November 1804 stammenden Briefe spricht er von einer „Gruppe von Klippen“, an denen seine Versuche bisher gescheitert seien, und fügt hinzu: „Ich habe zwar noch immer die Hofnung, dass jene Klippen einst, und noch vor meinem Ende, eine Durchfahrt erlauben werden. Indess habe ich jetzt so manche andere Beschäftigungen vor der Hand, dass ich gegenwärtig daran nicht denken kann, und glaube mir, es soll mich herzlich freuen, wenn Du mir zuvorkommst, und es Dir gelingt alle Hindernisse zu übersteigen.“ Das klingt freilich gar nicht, als ob die Autorität Euklids seit dem Jahre 1799 an Kraft verloren hätte; im Gegentheile, man hat den Eindruck, dass Gauss 1804 eher stärker unter ihrem Banne gestanden habe, als zuvor.

Der Briefwechsel zwischen Gauss und W. Bolyai lässt uns jetzt im Stiche, denn er enthält von 1804 bis 1832 keine Aeusserung von Gauss über die Parallelenfrage. Dafür können wir uns aber auf eine Bemerkung berufen, die Schumacher im November 1808 in einem Tagebuche aufgezeichnet hat, das er während eines längern Aufenthaltes in Göttingen führte. Offenbar unter dem Eindrucke eines Ge-

sprächs mit Gauss schreibt Schumacher da, Gauss habe die Theorie der Parallellinien darauf zurückgebracht, dass wenn die angenommene Theorie nicht wahr wäre, es eine constante a priori der Länge nach gegebene Linie geben müsse, „welches absurd ist". Doch halte Gauss selbst diese Arbeit noch nicht für abgeschlossen.

Hieraus geht hervor, dass Gauss auch im Jahre 1808 noch schwankte. Auf die Worte: „welches absurd ist" wollen wir dabei noch nicht einmal das geringste Gewicht legen, denn es ist höchst wahrscheinlich, dass die Schumacher aus seinem Eigenen hinzugefügt hat, wohl aber legen wir Gewicht auf den nachfolgenden Satz. Wenn Gauss selber seine Untersuchungen noch nicht für abgeschlossen hielt, so muss er noch immer halb und halb an Euklid geglaubt haben; auf alle Fälle war er auch damals noch nicht vollständig von der Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms überzeugt. Die Thatsache schliesslich, dass im Falle der Unrichtigkeit des Euklidischen Axioms eine a priori gegebene Einheit der Länge vorhanden ist, hatte Lambert schon 1766 erkannt, und Legendre hatte schon 1794 auf die Unmöglichkeit des Vorhandenseins einer solchen Längeneinheit einen Beweis für die Richtigkeit des Parallelenaxioms gegründet (vgl. S. 312).

Im Ganzen erscheint daher soviel sicher, dass Gauss in der Zeit bis 1808, die hier allein für uns in Betracht kommt, zwar an der unbedingten Wahrheit des Euklidischen Parallelenaxioms zweifelhaft geworden, aber seiner Sache doch noch nicht ganz sicher war. Den endgültigen Bruch mit den Euklidischen Anschauungen wird er erst zwischen 1808 und 1816 vollzogen haben. Dass er spätestens 1816 seine „anti-Euclidische" Geometrie systematisch entwickelt und die zugehörige „transcendente" Trigonometrie aufgestellt hatte, geht aus einem höchst merkwürdigen Briefe hervor, den sein Schüler Wachter am 12. December 1816 an ihn geschrieben hat. Auch schreibt Gauss selbst unterm 28. April 1817 an Olbers: „Ich komme immer mehr zu der Ueberzeugung, dass die Nothwendigkeit unserer Geometrie nicht bewiesen werden kann, wenigstens nicht vom menschlichen Verstande, noch für den menschlichen Verstand. Vielleicht kommen wir in einem andern Leben zu andern Einsichten in das Wesen des Raumes, die uns jetzt unerreichbar sind. Bis dahin müsste man die Geometrie nicht mit der Arithmetik, die rein a priori steht, sondern etwa mit der Mechanik in gleichen Rang setzen."

Demnach dürfen wir annehmen, dass Bartels im persönlichen Verkehre mit Gauss nicht wesentlich mehr über die Parallelenfrage erfahren hat als das, was er ebensogut aus Gesprächen mit Kästner oder aus den damaligen Lehrbüchern der Geometrie, insbesondre aus

den „Eléments" Legendres entnehmen konnte, die Einsicht nämlich, dass jedenfalls alle bisherigen Versuche, die Euklidische Parallelentheorie in Ordnung zu bringen, missglückt waren. Ausser dieser Einsicht, zu der er höchst wahrscheinlich auch schon unabhängig von Gauss gekommen war, brachte er im günstigsten Falle noch einige Zweifel an der Richtigkeit des Euklidischen Parallelenaxioms nach Kasan mit. Hätte nun Lobatschefskij schon in seinen 1815 und 16 gehaltenen Vorlesungen derartige Zweifel ausgesprochen, so könnte man allerdings mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen, dass er dazu durch Mittheilungen veranlasst war, die ihm sein Lehrer Bartels über Ideen von Gauss gemacht hatte. Da aber Lobatschefskij damals keine Spur von solchen Zweifeln verrieth, vielmehr noch ganz fest auf dem Boden der Euklidischen Geometrie stand und das Parallelenaxiom zu beweisen suchte, da er ausserdem noch eine ganze Reihe von Jahren gebraucht hat, um sich über den Euklidischen Standpunkt zu erheben, so erscheint es vollständig ausgeschlossen, dass er einer durch Bartels vermittelten Anregung von Gauss irgend etwas Wesentliches verdankt haben sollte.

Diese Auffassung wird in erwünschter Weise durch Mittheilungen bestätigt, die ich dem berühmten Astronomen Otto Struve verdanke, wohl dem einzigen noch Lebenden, der Bartels, Gauss und Lobatschefskij alle drei persönlich gekannt hat. Als nämlich Struve in den Jahren 1835 und 36 Vorlesungen bei Bartels hörte, nannte dieser wiederholt Lobatschefskij als einen seiner ersten und begabtesten Schüler in Kasan. Lobatschefskij hatte damals bereits seine ersten Schriften über die Grundlagen der Geometrie an Bartels geschickt, aber Bartels sah diese Schriften, wie Struve schreibt, „mehr als interessante geistreiche Speculationen an, wie als ein die Wissenschaft förderndes Werk". Auch erinnert sich Struve nicht, „dass Bartels je von anklingenden Ideen von Gauss gesprochen hätte".

Hiernach können die Gespräche über die Grundlagen der Geometrie, die Bartels etwa mit Gauss geführt hat, keinen besonders nachhaltigen Eindruck hinterlassen haben: Bartels hätte sonst gewiss die Arbeiten seines ehemaligen Schülers anders beurteilt.

Auf Grund der angestellten Erwägungen dürfen wir wohl mit ziemlicher Sicherheit behaupten, dass Lobatschefskij völlig unabhängig von Gauss zu seiner nichteuklidischen Geometrie gelangt ist. Aus den Vorlesungen von Bartels und aus Gesprächen mit diesem, sowie durch das Studium geometrischer Lehrbücher, insbesondre der Legendreschen „Eléments", hatte Lobatschefskij zunächst die Einsicht gewonnen, die damals schon lange Allgemeingut aller denkenden

Mathematiker war, dass nämlich die Parallelentheorie bisher durchaus ungenügend begründet war. Nach jahrelangem Nachdenken über die Frage erkannte er schliesslich ganz selbständig den wahren Grund dafür in der Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms und gelangte durch angestrengte Arbeit zu einem ausgeführten Systeme einer von diesem Axiome unabhängigen Geometrie.

Wir fügen gleich hinzu, dass nach unsrer Ueberzeugung Johann Bolyai ebensowenig irgendwie von Gauss beeinflusst gewesen ist. Johanns Vater Wolfgang hatte zwar als Student mit seinem Studiengenossen Gauss über die Grundlagen der Geometrie verhandelt, aber aus ihrem Briefwechsel gewinnt man den Eindruck, dass sie damals, wenigstens auf diesem Gebiete, einander als vollkommen gleichberechtigt betrachteten, dass keiner sich für dem andern überlegen ansah. Da nun die Gaussischen Briefe in der Zeit vom November 1804 bis zum März 1832, wo Gauss eben den Appendix J. Bolyais erhalten hatte, die Parallelenfrage gar nicht berühren, so kann J. Bolyai durch seinen Vater von Gaussischen Ideen nichts weiter erfahren haben, als was Gauss bis Ende 1804 erkannt hatte. Eine eigentliche Anregung bei seinen Untersuchungen kann daher auch J. Bolyai von Gauss nicht empfangen haben, und den Anstoss zu seiner ganzen Arbeit hat sicher der Umstand gegeben, dass alle Anstrengungen seines Vaters erfolglos geblieben waren; hat doch W. Bolyai sogar in väterlicher Besorgniss seinen Sohn vor der Beschäftigung mit der Parallelentheorie gewarnt, was selbstverständlich das Gegentheil der beabsichtigten Wirkung hervorrief.

Um Alles noch einmal zusammenzufassen: wir stehen vor der merkwürdigen Thatsache, dass im Verlaufe von wenig mehr als zehn Jahren vier Männer ganz unabhängig von einander den Weg gefunden haben, auf dem die in der Euklidischen Parallelentheorie liegende Schwierigkeit überwunden werden kann, zuerst Gauss und Schweikart, wie es scheint nahezu gleichzeitig, nach diesen beiden, wieder ungefähr gleichzeitig, Lobatschefskij und J. Bolyai. Die drei erstgenannten waren reife Männer, als sie die Lösung des Räthsels fanden, und bei jedem von ihnen waren lange Jahre vergeblicher Anstrengungen vorhergegangen, während J. Bolyai schon als einundzwanzigjähriger Jüngling die Wahrheit erkannte, nachdem er sich höchstens drei bis vier Jahre ernstlich mit dem Gegenstande beschäftigt hatte. Dafür hatte aber auch Johanns Vater Wolfgang Bolyai länger als zwei Jahrzehnte vergeblich mit den Schwierigkeiten der Parallelentheorie gerungen: die gewaltige geistige Arbeit, die Gauss, Schweikart und Lobatschefskij jeder für sich allein

vollbracht haben, vertheilt sich eben bei den beiden Bolyai auf zwei Generationen.

Fast noch merkwürdiger als jene Thatsache ist die andre, dass damals alle vier nur die eine von den beiden möglichen Lösungen des Parallelenräthsels gefunden haben. Wie es scheint, ist keiner von ihnen auf den Gedanken gekommen, dass auch eine widerspruchsfreie Geometrie der Ebene möglich ist, bei der die Winkelsumme im Dreiecke grösser ist als zwei Rechte. Keiner scheint es der Mühe werth gefunden zu haben, auch diese Annahme über die Winkelsumme näher zu untersuchen und ihre Folgen zu entwickeln, wie es doch Saccheri und Lambert gethan hatten. Allerdings hatten diese es nur gethan, weil sie keinen einfachen Beweis dafür hatten, dass die Winkelsumme nicht grösser als zwei Rechte sein kann, und weil sie die Annahme, sie sei grösser, blos auf diesem etwas umständlichen Wege als unzulässig nachweisen konnten. Dagegen waren sich Gauss, Lobatschefskij und J. Bolyai vollständig klar darüber, dass eben diese Annahme mit der unendlichen Ausdehnung des Raums und mit der unendlichen Länge der geraden Linie unverträglich ist. Aber indem sie die unendliche Länge der Geraden als etwas selbstverständliches voraussetzten, schnitten sie sich selbst den Weg zu der nichteuklidischen Geometrie ab, die aus jener Annahme entspringt und die bei Saccheri und Lambert schon eine vielversprechende Entwickelung gefunden hatte. So ist es gekommen, dass die zweite nichteuklidische Geometrie erst weit später entdeckt wurde. Allem Anscheine nach hat unter jenen dreien nur Gauss, wenigstens nachträglich, ihre Berechtigung erkannt und damit ihre Entdeckung durch Riemann vorweggenommen.

Kapitel VII.

Lobatschefskij als Rektor der Universität Kasan, 1827—1846.

Nach dieser längern Abschweifung kehren wir zur Lebensgeschichte unsers Helden zurück. Wir hatten deren Erzählung in dem Augenblicke abgebrochen, wo Lobatschefskij der physiko-mathematischen Abtheilung seine „Exposition succincte“ vorlegte und damit zum ersten Male einem wenn auch verhältnissmässig kleinen Kreise die Entdeckung mittheilte, die stets als seine hervorragendste Leistung gelten wird. Wir erinnern uns, dass die Universität Kasan damals unter dem verheissungsvollen Eindrucke der Sheltuchinschen Revision stand, durch die sich endlich Aussicht auf Befreiung von dem unerträglichen Zwange

der Magnizkijschen Tyrannei eröffnete. Wir wissen ferner, dass ein Jahr später Mussin-Puschkin zum Kurator der Universität und des ganzen Lehrbezirks Kasan ernannt wurde.

Als der neue Kurator sein Amt übernahm, befand sich die Universität im Zustande vollständigster Verwirrung: die Zahl der Professoren war sehr zusammengeschmolzen und genügte bei Weitem nicht für die Bedürfnisse des Unterrichts, mussten doch nicht wenige Professoren zwei Lehrstühle auf einmal versehen. Die Sammlungen und Institute der Universität waren in Unordnung, ja geradezu verwahrlost, die Finanzen zerrüttet. Das Schlimmste war aber, dass unter den wenigen vorhandenen Professoren auch noch die grösste Uneinigkeit herrschte. Der damalige Rektor, ein Professor Fuchs, der seine Erhebung zu diesem Amte noch Magnizkij zu verdanken hatte, war zwar ein durchaus ehrenwerther und auch persönlich beliebter Mann, entbehrte aber gänzlich der Energie, die dazu gehörte, das Professorenkollegium in Schranken zu halten und den Universitätsunterricht sowie die Verwaltung wieder in geordnete Bahnen zu lenken: in den oft stürmischen Sitzungen war er machtlos und wurde nicht einmal angehört.

Mussin-Puschkin überzeugte sich sehr bald, dass es unbedingt nöthig sei, Fuchs durch eine geeignetere Persönlichkeit zu ersetzen, und mit scharfem Blicke erkannte er eine solche in Lobatschefskij. Er bestimmte deshalb den Senat, Lobatschefskij zum Rektor zu wählen, obgleich dieser erst dreiunddreissig Jahre zählte und obgleich von den drei Jahren, auf die man Fuchs gewählt hatte, noch nicht einmal das zweite abgelaufen war. Die in der Geschichte der Universität Kasan denkwürdige Wahl fand am 3. (15.) Mai 1827 statt und am 30. August (11. September) 1827 trat Lobatschefskij sein Amt an.

Welch glücklichen Griff man mit der von Puschkin empfohlenen Wahl gethan hatte, zeigte sich bald. In der That war Lobatschefskij ganz der richtige Mann für seinen Posten.

Schon das Beispiel, das er durch seinen unermüdlichen, vor keiner Arbeit zurückschreckenden Pflichteifer gab, musste ihm die allgemeine Achtung erwerben und seine Kollegen anspornen ihre Pflicht zu thun, die während der letzten Jahre gar mancher von ihnen gröblich vernachlässigt hatte. Vor allen Dingen aber wusste er durch entschiedenes, jedoch immer gerechtes und unparteiisches Auftreten die Einigkeit im Senate der Universität wiederherzustellen, sodass die unfruchtbaren Zänkereien allmählich aufhörten und die Universitätsangelegenheiten wieder ruhig und sachgemäss behandelt wurden. Er achtete jede von der seinigen abweichende Meinung und suchte die

Gegner nur durch das Gewicht seiner Gründe zu überzeugen. War ihm das in der Sitzung selbst nicht gelungen, so nahm er die Kollegen, die sich noch nicht hatten belehren lassen, mit auf seine Wohnung, wo bei einer Tasse Thee und vielleicht auch bei einer Pfeife oder Cigarre — Lobatschefskij war nämlich keineswegs ein Verächter des Tabaks — die Frage noch einmal in aller Ruhe durchgesprochen wurde, und da gelang es ihm in der Regel, die vorhandenen Meinungsverschiedenheiten auszugleichen und seine Gegner zu bekehren, ohne dass er die Entscheidung des Kurators anzurufen brauchte. Es wird erzählt, dass er sich nur ein einziges Mal zu diesem äussersten Schritte genöthigt sah, nämlich gegenüber einem Professor der Anatomie, der sich durchaus nicht daran gewöhnen wollte, seine Vorlesungen regelmässig zu halten, und bei dem alles gütliche Zureden nichts half, obgleich schliesslich im ganzen Senate niemand mehr auf seiner Seite stand. Wie ernst es Lobatschefskij überhaupt mit seinen Pflichten als Rektor nahm und wie gewissenhaft er bei der Leitung der Verhandlungen des Senats verfuhr, das geht ganz besonders deutlich aus einer Thatsache hervor, die Janischefskij in seiner Biographie berichtet: Unter den sämtlichen Protokollen über die Senatssitzungen, die während der vielen Jahre abgehalten worden sind, in denen Lobatschefskij Rektor war, findet man kein einziges, das nicht eine von ihm eigenhändig geschriebene Entscheidung enthielte, mit genauer Angabe der Unterlagen und Beweggründe.

Nicht geringere Verdienste erwarb sich Lobatschefskij um die Sammlungen und Institute der Universität, die unter der Vernachlässigung der letzten Jahre ganz besonders gelitten hatten.

Vor allen Dingen galt es, die Universitätsbibliothek endlich in Ordnung zu bringen und wirklich brauchbar zu machen. Lobatschefskij hatte zwar, wie wir wissen, die Verwaltung der Bibliothek schon im Oktober 1825 übernommen, aber da man ihn ohne jede Unterstützung gelassen hatte, war auch er nicht im Stande gewesen, die ungeheure Arbeit zu bewältigen, die hier der Erledigung harrte. Sogleich nach der Ernennung Mussin-Puschkins wendete er sich daher an diesen, um die nöthigen Hülfskräfte zu erhalten. Es wurde denn auch eine Kommission niedergesetzt, die unter Lobatschefskijs Leitung die vorhandenen Bücher zu ordnen und Kataloge herzustellen hatte. Da diese Kommission dem Kurator wöchentlich über ihre Thätigkeit berichten musste, so machte ihre Arbeit rasche Fortschritte und wurde schon im folgenden Jahre, also 1828, beendet. Erst jetzt konnte man ganz übersehen, wie grosse Einbusse die Bibliothek durch die Nachlässigkeit ihrer früheren Verwalter erlitten hatte: auf 750

Rubel berechnete die Kommission den Werth der verschwundenen Bücher und auf 4500 den der nicht mehr vorhandenen Zeitschriftenbände. Diese Lücken konnten selbstverständlich nur nach und nach ergänzt werden, doch that Lobatschefskij sein Möglichstes, um das zu erreichen, denn er beantragte öfters und niemals vergeblich beim Ministerium die Bewilligung ausserordentlicher Geldmittel zur Vervollständigung der Bibliothek. Noch bis zum Jahre 1835 behielt er das Amt des Bibliothekars bei und übergab es dann einem von ihm selbst empfohlenen Nachfolger.

Gleich nach seinem Amtsantritte hatte Mussin-Puschkin noch eine andre Kommission niedergesetzt, deren Bestimmung war, die übrigen Institute und Sammlungen der Universität nachzusehen und die vorhandenen Bestände festzustellen; auch an dieser war Lobatschefskij als Mitglied betheiligt. Wie nicht anders zu erwarten, machte man hier ebenso betrübende Erfahrungen wie bei der Bibliothek. Zum Beispiele waren unter Magnizkij verschiedene werthvolle Sammlungen für das mineralogische Kabinet angekauft worden; die waren aber nicht einmal ausgepackt, sondern lagen noch in den Kisten, in denen sie angekommen waren, eine von ihnen war sogar spurlos verschwunden und die dafür verantwortlichen Professoren waren entweder gestorben oder hatten die Universität längst verlassen. Mehrere Sammlungen von Gesteinen und Erzen, die Lobatschefskijs Bruder Alexej auf einer Reise nach Sibirien zusammengebracht und an die Universität geschickt hatte, wurden erst nach langem vergeblichen Suchen ganz zufällig wieder aufgefunden; auch sie waren noch unausgepackt. Man kann sich hiernach ungefähr vorstellen, eine wie unangenehme und schwierige Arbeit die Kommission zu leisten hatte, doch wurde auch diese Arbeit schliesslich glücklich zu Ende geführt. Nachdem so ermittelt war, was in den Sammlungen eigentlich hätte vorhanden sein sollen und was wirklich noch vorhanden war, konnte man daran gehen, sie systematisch zu ordnen und möglichst zweckmässig aufzustellen. Selbstverständlich sorgten Puschkin und Lobatschefskij dafür, dass das geschah; auch wurden reichliche Mittel flüssig gemacht, um die Sammlungen planmässig zu vervollständigen.

Unter den verschiedenen von uns erwähnten Uebelständen, die Puschkin an der Universität Kasan bei Uebernahme seines Amtes vorfand, war nicht der geringste der, dass die Zahl der noch vorhandenen Professoren viel zu klein war, um alle Lehrfächer auch nur einigermassen genügend zu besetzen. Puschkin und Lobatschefskij liessen es sich selbstverständlich sehr angelegen sein, diesem Mangel nach Möglichkeit abzuhelfen, doch war das keineswegs leicht, da es

damals überhaupt bei allen russischen Universitäten sehr an Lehrkräften, besonders an einheimischen, fehlte. Sie sahen sich daher, wenigstens in den ersten Jahren, genöthigt, wieder zu dem Auskunftsmittel der Berufung deutscher Professoren zu greifen, doch trafen sie zugleich geeignete Massregeln, um die allmähliche Heranbildung einer genügenden Anzahl einheimischer Lehrkräfte zu sichern. So wurden einzelne besonders begabte junge Leute zu ihrer weiteren Ausbildung ins Ausland oder nach Petersburg geschickt; namentlich aber diente diesem Zwecke die von Lobatschefskij angeregte Umgestaltung des mit der Universität verbundenen pädagogischen Instituts.

Dieses war, wie wir wissen, früher errichtet worden, um den Kandidaten und Magistern Gelegenheit zu bieten, sich auf ihren künftigen Lehrerberuf vorzubereiten. Unter Bronners Direktion hatte es seine Bestimmung ganz gut erfüllt, aber nachdem Bronner 1819 Kasan verlassen hatte, war es vollständig in Verfall gerathen, da Magnizkij die Direktion ganz unfähigen Menschen anvertraut hatte: war doch einer der von ihm ernannten Nachfolger Bronners vorher Postbeamter gewesen! Lobatschefskij war zweifellos schon beim Antritt seines Rektorats von der Reformbedürftigkeit des pädagogischen Instituts überzeugt, doch hinderten ihn jedenfalls zunächst dringendere Aufgaben, die Reform in Angriff zu nehmen. Erst im Jahre 1829 that er das. Er stellte dem Senate der Universität vor, dass das pädagogische Institut in seiner bisherigen Verfassung unmöglich seine Aufgabe erfüllen könne, da ein einzelner Mann, möge er auch noch so hervorragend sein, nicht im Stande sei, allen Wissenschaften gerecht zu werden. Er schlug deshalb vor, es solle zukünftig eine grössere Anzahl von Professoren an dem Institute mitwirken, und zwar solle jeder die pädagogische Ausbildung der Kandidaten und Magister übernehmen, die sich seinem besondern Fache widmeten. Nachdem diese Vorschläge die Billigung des Senats und des Kurators gefunden hatten, wurde das pädagogische Institut ihnen gemäss umgestaltet, und die Universität Kasan erhielt so eine Anstalt, in der sowohl für die Gymnasien des Kasaner Lehrbezirks als auch für die Universität selbst geeignete Lehrkräfte herangebildet wurden. Dass Lobatschefskij die pädagogischen Studien der zukünftigen Mathematiklehrer zu leiten übernahm, bedarf kaum der Erwähnung; dass er es in einer äusserst anregenden und gründlichen Weise that, bezeugt Janischefskij, indem er hervorhebt, mit welcher Freude und Genugthuung die damaligen Schüler Lobatschefskijs sich noch 1868 der mathematisch-pädagogischen Anleitung erinnerten, die sie bei ihm genossen hatten.

Ueberhaupt dachte Lobatschefskij von der pädagogischen Auf-

gabe der Universität sehr hoch und verlangte, dass die Hochschule nicht blos eine Anstalt zur Erwerbung von Kenntnissen, sondern auch eine Anstalt zur Erziehung ihrer Schüler sei. Bezeichnend für diese Auffassung ist es, dass er nach dem Antritte seines Rektorats die erste sich ihm bietende Gelegenheit benutzte, um seinen Ansichten über die Erziehung öffentlich Ausdruck zu verleihen. Die Universität Kasan feierte damals ihr Jahresfest am 5. (17.) Juli, weil sie an diesem Tage des Jahres 1814 zum ersten Male als eine sich selbst verwaltende Körperschaft mit selbst gewähltem Rektor und selbst gewählten Dekanen aufgetreten war. Als nun im Jahre 1828 der eben genannte Tag zum ersten Male unter Lobatschefskijs Rektorate begangen wurde, da hielt dieser in der feierlichen Versammlung der Universität eine Rede „Ueber die wichtigsten Gegenstände der Erziehung", in der er sich über die Aufgaben und die Bedeutung der Erziehung aussprach. Er hat seine Rede später, im Jahre 1832, im Kasaner Boten drucken lassen, und, soweit man nach den von Wassiljef aus ihr mitgetheilten Proben urteilen kann, findet sich darin zwar nicht wenig Phrasenhaftes, doch spricht sich überall eine auf das Ideale gerichtete Gesinnung aus, die nur das Beste der Universität und des Vaterlandes im Auge hat.

Wir haben zu schildern versucht, wie rastlos und unermüdlich Lobatschefskij als Rektor thätig war, um die Universität Kasan aus dem Zustande kläglichsten Verfalls, in den sie durch Magnizkij gerathen war, emporzuheben. Der Erfolg konnte nicht ausbleiben. Nach Verlauf weniger Jahre war die Universität vollständig reorganisirt und in den Stand gesetzt, ihre Aufgabe als Unterrichtsanstalt und als Pflanzstätte wissenschaftlicher Studien zu erfüllen. Unter diesen Umständen ist es kein Wunder, dass Mussin-Puschkin zu Lobatschefskij, der sein Vertrauen so glänzend gerechtfertigt hatte, eine aufrichtige und herzliche Freundschaft fasste und dass er keine der Fragen, die in seiner Stellung als Kurator des Lehrbezirks Kasan an ihn herantraten, erledigte, ohne den Rath Lobatschefskijs eingeholt zu haben. Ebenso erkannten auch Lobatschefskijs Kollegen dessen Verdienste um die Universität rückhaltlos an, indem sie ihn immer und immer wieder zum Rektor wählten, so dass man ihn mit gewissem Rechte als den Rector perpetuus der Universität Kasan bezeichnen konnte. Im Ganzen ist er sechsmal hinter einander zum Rektor gewählt worden — zweimal auf je drei Jahre, dann auf je vier — und neunzehn Jahre lang hat er dieses Amt ununterbrochen bekleidet, bis er 1846 von seiner Stellung als Professor entbunden wurde und infolgedessen auch das Rektorat, das ihm im Jahre vorher zum sechsten Male übertragen worden war, niederlegte.

Während dieser langen Zeit hörte Lobatschefskij nicht auf, für das Wohl der Universität zu arbeiten und deren Blüthe nach Kräften zu fördern; da wir jedoch keine Geschichte der Universität Kasan schreiben wollen, so müssen wir uns eine eingehende Schilderung dieser seiner amtlichen Wirksamkeit versagen: nur das Wichtigste wollen wir kurz besprechen und uns dann wieder seiner wissenschaftlichen Thätigkeit zuwenden.

Im Jahre 1830 kam die Cholera, die damals ihren Zug durch ganz Europa begonnen hatte, auch nach Kasan. Sobald die ersten Spuren der Seuche bemerkt worden waren, machte Lobatschefskij den Gouverneur darauf aufmerksam, dieser aber wollte noch nicht recht an das Vorhandensein der Seuche glauben, sondern ordnete erst eine ärztliche Untersuchung aller verdächtigen Kranken an. Als nun am 12. (24.) September alle Aerzte der Stadt das Auftreten der Cholera für zweifellos erklärt hatten, da berief Lobatschefskij — Puschkin war damals abwesend — sofort eine ausserordentliche Senatssitzung, in der man sich dafür entschied, die Vorlesungen zu schliessen, und ihn beauftragte, die nöthigen Massregeln zu treffen, um die in den Universitätsgebäuden wohnenden Professoren, Beamten und Studenten vor der Ansteckung zu sichern.

Am nächsten Tage begab sich Lobatschefskij zum Gouverneur, um mit diesem die zu treffenden Massregeln zu besprechen, erfuhr aber dort, dass während der Nacht die Stadt geschlossen und abgesperrt worden war, als wäre sie von der Pest heimgesucht. Er eilte daher sofort nach der Universität zurück und ordnete an, dass jeder Verkehr zwischen den Bewohnern der Universität und denen der übrigen Stadtviertel aufhören solle: alle Thore der Universität wurden bis auf eines gesperrt, und auch durch dieses eine wurde der Zutritt nur Aerzten gestattet. Da ausser den ständigen Bewohnern der Universität noch andre Studenten und mehrere Universitätsbeamte mit ihren Familien auf dem Gebiete der Universität eine Zuflucht gesucht hatten, so belief sich die Zahl der dort Eingeschlossenen auf 560 Personen, darunter im Ganzen neun Professoren und Adjunkten. Lobatschefskij sorgte dafür, dass alle diese auf Staatskosten verpflegt wurden; die Herbeischaffung der dazu nöthigen Lebensmittel geschah unter Aufbietung aller der Vorsichtsmassregeln, die man bei den damals herrschenden übertriebenen Vorstellungen von der Ansteckungsgefahr der Cholera für nöthig hielt. Für diese Vorstellungen bezeichnend ist es, dass an dem einen, nicht vollständig gesperrten Thore nur solche Schriftstücke angenommen werden durften, die aus losen Blättern bestanden, weil man glaubte, die zum Heften benutzten Fäden könnten

die Ansteckung besonders leicht übertragen; aber auch diese losen Blätter mussten erst noch mit Chlordämpfen desinficirt oder mit Chlorwasser abgewaschen werden! Besonders streng hielt Lobatschefskij darauf, dass auf dem ganzen Gebiete der Universität die grösste Reinlichkeit herrschte und dass die Luft durch häufige Räucherungen mit Chlor und Essig gereinigt wurde. Für die an der Cholera Erkrankten wurden zwei Lazarethe eingerichtet; die Bettwäsche und die Kleidungsstücke jedes Gestorbenen wurden verbrannt.

Anderthalb Monate lang blieb die Universität auf diese Weise von jedem Verkehre mit der Stadt abgeschlossen; dank den von Lobatschefskij getroffenen Massregeln kamen in dieser Zeit auf dem Universitätsgebiete nur vierzig Cholerafälle vor, von denen sechzehn tödtlich verliefen — einer der Professoren war unter den Gestorbenen — während in der übrigen Stadt die Sterblichkeit unverhältnissmässig viel grösser war. Die Vorlesungen konnten erst am 25. November (7. December) wieder aufgenommen werden.

Wir haben früher (S. 366) des Antheils gedacht, den Lobatschefskij bereits in den zwanziger Jahren an der Erbauung der eigentlichen Universitätsgebäude genommen hatte. Im Jahre 1833 wurde abermals ein Ausschuss niedergesetzt, der den Bau einer grossen Anzahl von Universitätsinstituten beaufsichtigen sollte. Lobatschefskij wurde wieder Vorsitzender dieses Ausschusses, und unter seiner Leitung entstanden im Laufe der Jahre 1833—41 die Sternwarte, das Bibliotheksgebäude, das physikalische Institut, die Anatomie und die Klinik. Er kümmerte sich dabei um alle Einzelheiten, und ihm war es hauptsächlich zu danken, dass bei diesen Bauten gegenüber den Voranschlägen eine Summe von nicht weniger als 49 000 Silberrubeln erspart wurde. Aber die Freude über die Vollendung der neuen stattlichen Gebäude blieb nicht lange ungetrübt. Eine Feuersbrunst, die im August 1842 in Kasan wüthete und die halbe Stadt in Asche legte, zerstörte die Sternwarte und einige andre Universitätsgebäude; doch hatten die energischen Massregeln, die Lobatschefskij traf, wenigstens so viel Erfolg, dass man die übrigen Universitätsgebäude, namentlich die Bibliothek, rettete und auch die innere Einrichtung der Sternwarte bergen konnte. Der Wiederaufbau der abgebrannten Gebäude wurde auch jetzt unter Lobatschefskijs Leitung ausgeführt und so gefördert, dass er bereits 1844 beendet war.

Vergessen wir übrigens nicht, dass sich Lobatschefskijs amtliche Thätigkeit keineswegs auf die Universität beschränkte. Er war lange Zeit hindurch Vorsitzender der Kommission, vor der die zukünftigen Studenten die zur Aufnahme in die Universität erforderliche

Prüfung abzulegen hatten. Als solcher hatte er vielfache Gelegenheit auf den Gymnasialunterricht einzuwirken und für dessen Besserung zu sorgen. Auch wurde er mehrmals vom Unterrichtsministerium mit der Revision von Gymnasien beauftragt: so revidirte er vom December 1835 bis zum März 1836 alle Gymnasien der Gouvernements Nishnij-Nowgorod und Simbirsk, und 1842 hatte er dieselbe Aufgabe im Gouvernement Pensa.

Neben den aufreibenden Geschäften, die das Rektorat mit sich brachte, vernachlässigte Lobatschefskij seine Lehrthätigkeit keineswegs. In den ersten Jahren musste er, wie wir wissen, neben der Mathematik auch noch die theoretische Physik und die Mechanik in den Kreis seiner Vorlesungen ziehen. Nachdem aber 1833 E. Knorr als Professor der Physik angestellt worden war und bald auch die Mechanik ihren eigenen Vertreter erhalten hatte, konnte sich Lobatschefskij in der Hauptsache auf Vorträge über reine Mathematik beschränken; doch blieb die Zahl der Vorlesungen, die er hielt, und der mathematischen Fächer, die er darin behandelte, immerhin recht beträchtlich. Dass er daneben noch besondre Lehrverpflichtungen an dem pädagogischen Institute der Universität übernahm, haben wir schon gesehen. Doch auch das war ihm noch nicht genug. Er hielt mehrmals öffentliche, jedermann zugängliche Vorlesungen über Physik, die zum Theile auch von Versuchen begleitet waren, und suchte dadurch zur Bildung des Volkes beizutragen. Insbesondre hielt er 1839—40 für den Handwerkerstand eine Reihe von Vorträgen unter dem Titel: „Volksthümliche Physik“.

Endlich dürfen wir nicht unerwähnt lassen, dass er neben der geistigen Ausbildung auch die körperliche nicht vernachlässigt wissen wollte. Auf sein Betreiben wurde 1834 an den Gymnasien und an der Universität das Turnen eingeführt und auch für die Pflege des Tanzens gesorgt. Puschkin theilte übrigens seine Ansichten über den Werth solcher Uebungen und unterstützte ihn bei diesen Bestrebungen.

Es ist erfreulich berichten zu können, dass Lobatschefskijs Wirken bei der vorgesetzten Behörde auch die äussere Anerkennung fand, die es in so reichem Masse verdiente. Im September 1831 wurde ihm der allerhöchste Dank seines Kaisers für sein Verhalten während der Choleraepidemie zu Theil. Im Mai 1833 verlieh ihm der Zar einen Brillantring und im December desselben Jahres den Stanislausorden dritter Klasse. Wiederholt sprach ihm das Ministerium seine besondre Anerkennung aus für die Verdienste, die er sich um das Rechnungswesen der Universität und des Bezirks erworben hatte. Nach

der Revision der Gymnasien des Gouvernements Nishnij erhielt er den St. Annen-Orden zweiter Klasse. Für seine Bemühungen zur Rettung der Universitätsgebäude während der Feuersbrunst von 1842 erntete er wieder die allerhöchste Anerkennung des Monarchen und erhielt überdies den Wladjimir-Orden dritter Klasse. Noch zweimal wurde er durch Ordensverleihungen ausgezeichnet, und dass ihm die üblichen Titel: Staatsrath und wirklicher Staatsrath und die Auszeichnungen für zwanzig-, fünfundzwanzig- und dreissigjährige Dienstzeit verliehen wurden, versteht sich von selbst.

Kapitel VIII.

Lobatschefskijs wissenschaftliche Veröffentlichungen, insbesondre seine geometrischen Arbeiten in der Zeit von 1827—1846.

Eine so umfangreiche und aufreibende amtliche Thätigkeit, wie sie Lobatschefskij während seines neunzehnjährigen Rektorats entfaltet hat, würde die meisten andern Menschen vollständig in Anspruch nehmen und ihnen zu wissenschaftlichen Arbeiten keine Zeit übrig lassen. Nicht so bei ihm: es ist wahrlich staunenswerth, was er in dieser Zeit, trotz seiner Ueberhäufung mit Vorlesungen und Verwaltungsgeschäften, auch noch auf wissenschaftlichem Gebiete geleistet hat. Wir wollen jetzt einen flüchtigen Ueberblick über diese Seite seiner Thätigkeit geben, werden aber hier nur auf die geometrischen Schriften etwas näher eingehen, während wir uns bei den nichtgeometrischen mit einer blosen Aufzählung der einzelnen Abhandlungen begnügen.

In den Jahren 1829 und 30 veröffentlichte Lobatschefskij im Kasaner Boten endlich wenigstens einen Auszug aus der „Exposition succinte", die er 1826 der physiko-mathematischen Abtheilung vorgelegt hatte. Dieser in russischer Sprache abgefasste Auszug, der den Titel trägt: „Ueber die Anfangsgründe der Geometrie", sichert ihm, wie wir schon erwähnt haben, die Priorität der Veröffentlichung gegenüber J. Bolyai, dessen Appendix erst 1831 gedruckt und 1832 erschienen ist. Dafür ist aber wieder zu berücksichtigen, dass J. Bolyais Appendix nur eine Anzahl Sätze voraussetzt, die Euklid unabhängig vom Parallelenaxiome bewiesen hat, sonst aber eine wirklich vollständige Begründung der nichteuklidischen Geometrie enthält, die allerdings äusserst knapp gefasst ist und deshalb vom rein geometrischen

Standpunkte aus manches zu wünschen übrig lässt; während dagegen der von Lobatschefskij veröffentlichte Auszug aus der „Exposition" zwar Andeutungen darüber enthält, wie man vom Begriffe der Kugelfläche ausgehend die ganze Geometrie aufbauen kann, andrerseits jedoch eine Reihe neuer, der nichteuklidischen Geometrie eigenthümlicher Sätze ohne Beweise mittheilt. Hinwiederum darf man nicht übersehen, dass bei Lobatschefskij die neue Geometrie gleich in einer für Anwendungen unmittelbar brauchbaren Form erscheint: die zur Berechnung geometrischer Figuren nöthigen Formeln sind systematisch entwickelt, und eine grosse Anzahl dahin gehöriger Aufgaben ist vollständig gelöst. J. Bolyai giebt in dieser Beziehung nur das allernothdürftigste: man sieht zwar, dass er den Gegenstand vollständig beherrscht, aber man würde doch noch eine beträchtliche geistige Arbeit aufwenden müssen, wollte man auf Grund der Andeutungen des Appendix selbständig derartige Aufgaben in Angriff nehmen.

Ferner wollen wir noch auf Folgendes aufmerksam machen: Lobatschefskij hat später in den „Neuen Anfangsgründen" das nachgeholt, was in seiner ersten Arbeit „Ueber die Anfangsgründe" fehlte, er hat eine vollständige, zusammenhängende Entwickelung und Darstellung seiner neuen Geometrie geliefert, eine Darstellung, an der auch vom rein geometrischen Standpunkte aus verhältnissmässig nicht sehr viel auszusetzen ist. Er war dabei sichtlich bestrebt, die Anfänge der Geometrie von jeder Beimischung der Analysis frei zu halten und die Geometrie rein synthetisch soweit zu entwickeln, bis man im Stande ist, „jede Abhängigkeit durch Gleichungen darzustellen und für jede Art geometrischer Grössen Ausdrücke zu geben". Das zeigt sich besonders darin, dass er, bewusst oder unbewusst, in den „Neuen Anfangsgründen" von der Stetigkeit nur sehr sparsamen Gebrauch macht und dass die Zahl der Stellen, wo er die Stetigkeit benutzt, während sie doch vermieden werden kann, äusserst gering ist. Dagegen hat J. Bolyai zwar auch angefangen, eine grosse und zusammenhängende Darstellung der Geometrie auszuarbeiten, aber was er niedergeschrieben hat, blieb in seinen Papieren vergraben und ist niemals erschienen. Was davon zur Veröffentlichung geeignet ist, wird Stäckel in einiger Zeit der Allgemeinheit zugänglich machen, und es wird sich dann wohl zeigen, dass J. Bolyai bei seiner Darstellung nach ähnlichen Grundsätzen zu Werke gehen wollte, wie sie Lobatschefskij thatsächlich befolgt hat. In dem Appendix freilich hat J. Bolyai unter dem Zwange des Strebens nach äusserster Kürze und Knappheit einen nur allzu ausgiebigen Gebrauch von der Stetigkeit gemacht.

Um endlich die Vergleichung der beiden Begründer der nicht-

euklidischen Geometrie zum Abschluss zu bringen und Licht und Schatten in gerechter Weise zu vertheilen, sei noch folgender Thatsache gedacht: In seinem Appendix geht J. Bolyai insbesondre auch auf die der nichteuklidischen Geometrie eigenthümlichen Konstruktionsaufgaben ein. Zum Beispiel giebt er sehr elegante Lösungen für die beiden Aufgaben: durch einen gegebenen Punkt die Parallelen zu einer gegebenen Geraden zu ziehen und die Gerade zu zeichnen, die auf dem einen Schenkel eines spitzen Winkels senkrecht steht und zu dem andern Schenkel parallel ist; auch zeigt er, dass im Falle der nichteuklidischen Geometrie eine geometrische Quadratur des Kreises möglich ist. In den „Neuen Anfangsgründen“ Lobatschefskijs und in dessen übrigen Arbeiten werden Fragen dieser Art nirgends berührt, nur in der ersten Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe“ giebt es Spuren, aus denen mit grosser Wahrscheinlichkeit hervorgeht, dass auch er im Besitze von Konstruktionen war, die zur Lösung der beiden zuerst erwähnten Aufgaben dienen können.

Ausser der Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe“ enthält der Kasaner Bote nur noch zwei Arbeiten von Lobatschefskij: einen 1828 veröffentlichten Auszug aus einer akustischen Abhandlung von Wheatstone und die erst 1832 gedruckte Rektoratsrede aus dem Jahre 1828. Im Laufe der Zeit stellte sich nämlich immer deutlicher heraus, dass der Kasaner Bote nicht lebensfähig war. Ursprünglich enthielt er friedlich neben einander rein wissenschaftliche Arbeiten, populäre Aufsätze, Uebersetzungen aus fremden Sprachen, politische Nachrichten und Regierungsverordnungen. Dieses Gemisch der verschiedenartigsten Gegenstände konnte niemanden befriedigen, zumal da die politischen Nachrichten wegen des seltenen Erscheinens der Zeitschrift jedesmal längst veraltet waren. Man hatte deshalb seit 1828 die politischen Nachrichten allwöchentlich als „Zugabe zum Kasaner Boten“ herausgegeben, während von der eigentlichen Zeitschrift alle Monate oder alle zwei Monate ein Heft erschien. Aber auch das hatte nichts geholfen, der Absatz blieb ganz unbedeutend und damit selbstverständlich auch die Auflage. Heutzutage würde man schwerlich noch ein Exemplar des Kasaner Boten von 1829 und 30 zu kaufen bekommen, wollte man es auch mit Gold aufwiegen.

Unter diesen Umständen wurde das Erscheinen des Kasaner Boten mit Ende des Jahres 1832 eingestellt. Aber Lobatschefskij sorgte für einen Ersatz. Auf sein Betreiben wurde nämlich jetzt eine rein wissenschaftliche Zeitschrift geschaffen, die nur Originalarbeiten enthalten sollte. Es sind das die noch heute bestehenden Utschónyja Sapíski, die Gelehrten Schriften der Kasaner Universität, und ihre

Gründung ist nicht das kleinste unter den vielen Verdiensten, die sich Lobatschefskij um diese Hochschule erworben hat.

Im Jahre 1834 erschien das erste Heft der Gelehrten Schriften mit einer Vorrede, in der Lobatschefskij die Vorgeschichte und den Plan der neuen Zeitschrift schildert. Auch enthielt schon dieses erste Heft eine wissenschaftliche Arbeit von seiner Hand, in der er seine auf S. 359 erwähnten Untersuchungen über Gleichungen von der Form: $x^n - 1 = 0$ fortsetzte. Ebenso brachte das zweite Heft des Jahrgangs 1834 eine Abhandlung von ihm über trigonometrische Reihen, und auch in den Jahren 1835—38 war er es hauptsächlich, der den Inhalt der Gelehrten Schriften bestritt. Ausser einer zweiten grossen Abhandlung über unendliche Reihen, die 1835 erschien, bezogen sich diese Arbeiten, drei an der Zahl, sämmtlich auf seine neue sogenannte imaginäre Geometrie.

Der ersten, 1835 erschienenen Arbeit, gab er sogar den Titel „Imaginäre Geometrie", statt aber seine neue Geometrie Schritt für Schritt zu entwickeln, wie er es in der Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe der Geometrie" wenigstens bis zu einem gewissen Grade gethan hatte, schlug er hier genau den umgekehrten Weg ein: Er stellte nämlich von vornherein und ganz unvermittelt die Gleichungen, die zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks seiner neuen Geometrie bestehen, als etwas Gegebenes hin und bewies nun erstens, dass diese Gleichungen ein in sich widerspruchsfreies System bilden, und zweitens, dass sie für Dreiecke mit unendlich kleinen Seiten in die Gleichungen der Euklidischen Geometrie übergehen. Diesen letztern Umstand benutzte er, um die in der neuen Geometrie gültigen Ausdrücke für Bogenelemente, Flächenelemente und Raumelemente aufzustellen und löste dann im Grossen und Ganzen dieselben Aufgaben über die Berechnung von Bogenlängen, Flächenräumen und Rauminhalten, die er schon in der Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe" gelöst hatte.

Eine Art Fortsetzung dieser Arbeit ist die 1836 erschienene: „Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale", doch ist sie, wie schon ihr Titel zeigt, hauptsächlich bestimmt, die Verwendbarkeit der neuen Geometrie für die Integralrechnung zu zeigen, ein Gesichtspunkt, der auch schon in den beiden frühern geometrischen Arbeiten stark hervorgehoben wird.

Die dritte und umfangreichste Arbeit endlich heisst: „Neue Anfangsgründe der Geometrie" und vertheilt sich von 1835 bis 1838 auf nicht weniger als sechs Hefte der Gelehrten Schriften. Sie ist ein vollständiges Lehrbuch der neuen Geometrie von den ersten Anfängen

an und führt diese soweit, bis die Gleichungen für die geradlinigen und die sphärischen Dreiecke aufgestellt sind. Allerdings fallen die beiden letzten, 1838 erschienenen Kapitel der „Neuen Anfangsgründe“ ganz aus dem Rahmen des Uebrigen heraus und sind wohl nur aus rein zufälligen Gründen unter demselben Titel veröffentlicht; sie haben nämlich mit der imaginären Geometrie gar nichts zu thun und beschäftigen sich nur mit der Auflösung der geradlinigen Dreiecke der Euklidischen Geometrie und mit der Auflösung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke.

Man kann nicht umhin die „Neuen Anfangsgründe“ als eine wirklich meisterhafte Leistung zu bezeichnen, denn so wenig man leugnen wird, dass sie auch ihre Mängel haben, so wenig darf man diesen Mängeln besondres Gewicht beilegen: sie verschwinden neben den Vorzügen des Werkes fast ganz. Bedauerlicher Weise waren aber Lobatschefskijs Landsleute noch nicht reif, diese Leistung zu würdigen: gerade seine geometrischen Arbeiten begegneten in Russland überall entweder vollkommener Gleichgültigkeit oder verständnisslosem Widerspruche.

So erschien z. B. 1834 in der Petersburger Zeitschrift „Syn Otjétschestwa“ (Sohn des Vaterlandes) eine geradezu kränkende Besprechung der Arbeit „Ueber die Anfangsgründe“. Der offenbar nicht sehr sachkundige Verfasser dieser Besprechung behauptete, die Arbeit tauge nichts, weil er unter den Beispielen ein „abgeschmacktes“ Integral gefunden habe. In der 1835 gedruckten „Imaginären Geometrie“ beklagt sich Lobatschefskij darüber, dass eine von ihm im November 1834 eingesandte Entgegnung noch jetzt, nach fünf Monaten, nicht aufgenommen worden sei, ja er kommt an einer spätern Stelle derselben Arbeit noch ein zweites Mal auf jene abfällige Kritik zurück und zwar bei Gelegenheit eines Integrals, das nach einer später von Dirichlet eingeführten Benennung als ein Diskontinuitätsfaktor zu bezeichnen wäre Er meint, der bewusste Recensent müsse entweder recht unerfahren sein oder allzu voreilig mit seinem Urteile, da er solche bereits bei Poisson vorkommende Integrale abgeschmackt nenne. Es scheint, dass jene Entgegnung überhaupt ungedruckt geblieben ist.

Nun ist es allerdings sehr begreiflich, dass die Arbeit „Ueber die Anfangsgründe“ nicht verstanden wurde, denn sie stellte in der That für die damalige Zeit an den Leser sehr hohe Ansprüche; dieser musste sich nicht nur in ganz neue, ungewohnte Vorstellungen hineindenken, sondern sah sich auch vor die Aufgabe gestellt, die zahlreichen, oft gar nicht leichten Rechnungen, die Lobatschefskij grössten Theils

nur angedeutet hatte, selbständig auszuführen; nicht zu gedenken der Druckfehler, die diese Aufgabe noch erschwerten. Desgleichen waren auch die „Imaginäre Geometrie“ und die „Anwendung der imaginären Geometrie“ alles andre als leicht lesbar. Dagegen fallen bei den „Neuen Anfangsgründen“ alle diese Entschuldigungsgründe weg, denn von der Einleitung abgesehen, die hie und da dem Verständnisse Schwierigkeiten bereitet, sind die „Neuen Anfangsgründe“ durchaus klar und verständlich geschrieben. Wenn also auch diese Arbeit bei den russischen Mathematikern keine Beachtung und Anerkennung fand, so liegt die Schuld daran lediglich an Lobatschefskijs Landsleuten, nicht an ihm.

Ausser den vorhin erwähnten Veröffentlichungen in den Gelehrten Schriften sind noch eine ganze Reihe andre zu nennen. Im Jahre 1833 gab er sein Lehrbuch der Algebra heraus, dessen Manuskript, wie wir wissen, schon 1825 beendet, aber damals nicht zum Drucke gelangt war. Im folgenden Jahre schickte er nach Moskau eine Abhandlung „Ueber die Bedingungsgleichungen für die Bewegung und die Lage der Hauptdrehungsaxen eines starren Körpers“, die 1835 in den Gelehrten Schriften der Moskauer Universität gedruckt wurde. Hierzu kommen einige Arbeiten in französischer und deutscher Sprache, während die bisher erwähnten alle russisch abgefasst sind.

Die 1835 in den Kasaner Gelehrten Schriften herausgegebene „Imaginäre Geometrie“ ist nichts andres als eine wenig veränderte Bearbeitung einer Abhandlung, die Lobatschefskij schon vorher unter dem Titel „Géométrie imaginaire“ an Crelle geschickt hatte, die aber freilich erst 1837, im 17. Bande des Crelleschen Journals, erschienen ist. Durch die Veröffentlichung dieser Arbeit wollte er jedenfalls seine geometrischen Entdeckungen allen europäischen Mathematikern zugänglich machen, da er ja doch nicht erwarten konnte, dass diese die russischen Arbeiten lesen würden, wenn sie sie überhaupt zu Gesicht bekamen. Leider aber war die in der „Géométrie imaginaire“ gewählte Darstellung zu diesem Zwecke nicht sehr geeignet, ja sie konnte dem Verständnisse und der Verbreitung seiner Ideen nur hinderlich sein: das wird man schon aus dem Wenigen ahnen, was wir vorhin zur Charakterisirung der russischen Bearbeitung der „Géométrie imaginaire“ gesagt haben.

Lobatschefskij mochte das selbst fühlen und entschloss sich daher, in deutscher Sprache eine ganz kurze und möglichst elementare Bearbeitung seiner Geometrie herauszugeben. Diese erschien 1840 in Berlin als selbständiges Schriftchen unter dem Titel: „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien“. Er hatte darin eine

Darstellung gewählt, die allen billigen Anforderungen entsprach. Nur im Anfange waren ohne Beweis einige wenige Sätze zusammengestellt, die er für das Folgende brauchte, die aber schon bei Euklid unabhängig vom Parallelenaxiome bewiesen sind. Alle übrigen Sätze waren streng bewiesen, in der Hauptsache so wie in den „Neuen Anfangsgründen“, doch waren auch an mehreren Stellen die Beweise nicht unwesentlich vereinfacht. Die Entwickelung hatte er so weit geführt, dass die Gleichungen für die geradlinigen Dreiecke der neuen Geometrie vollständig abgeleitet waren. Am Schlusse wies er noch auf den Zusammenhang hin, der zwischen diesen Gleichungen und denen der sphärischen Trigonometrie besteht. Das Ganze setzte fast gar keine Vorkenntnisse voraus, war klar geschrieben und bot dem Verständniss durchaus keine Schwierigkeit.

Trotz alledem blieben die „Geometrischen Untersuchungen“ genau ebenso unbeachtet, wie die „Géométrie imaginaire“. Vermuthlich hörten überhaupt nur die wenigsten Mathematiker etwas von ihrem Erscheinen, und wer konnte ahnen, dass eben dieses dünne, unscheinbare Heftchen von 61 Kleinoktavseiten die Lösung des Parallelenräthsels enthielt, das seit Euklids Zeiten unzähligen Menschen Kopfzerbrechen verursacht hatte und das jahraus jahrein, aber immer vergebens, in so und so vielen Schriften bearbeitet wurde?

So schien es, dass Lobatschefskij die Anerkennung seiner geometrischen Entdeckungen, die seine Landsleute ihm versagten, auch ausserhalb Russlands nicht finden könne. Und doch gab es wenigstens einen Mathematiker, der seine Leistungen zu schätzen wusste, einen, dessen Urteil ihn über die Gleichgültigkeit und Verständnisslosigkeit aller andern trösten konnte und, wir dürfen es hoffen, auch getröstet hat. Dieser eine war Gauss.

Allem Anscheine nach war Gauss auf die „Geometrischen Untersuchungen“ zuerst durch eine in Gersdorfs Repertorium der deutschen Literatur erschienene Anzeige aufmerksam geworden, die er selbst als „höchst albern“ bezeichnet. Von einem gewissen Knorre — so schreibt er den Namen in einem 1841 an Encke gerichteten Briefe, dem ich diese Thatsachen entnehme — von diesem Knorre also hatte er dann „eine kleine in russischer Sprache geschriebene Abhandlung“ Lobatschefskijs bekommen, die ihn schon deshalb besonders anzog, weil er damals anfing, „das Russische mit einiger Fertigkeit zu lesen“. Durch das Studium dieser beiden Arbeiten fasste er ein lebhaftes Interesse für den „scharfsinnigen russischen Mathematiker“ und gab in verschiedenen Briefen an Encke, Gerling und Schumacher seiner hohen Meinung über Lobatschefskij unverhohlen Ausdruck. Da er

es jedoch grundsätzlich vermied, sich in seinen Veröffentlichungen über die Frage der Parallelentheorie auszusprechen, so hat er in seinen gedruckten Arbeiten den Namen Lobatschefskij niemals erwähnt, ebensowenig wie er jemals J. Bolyai genannt hat, dessen Appendix er doch auch seinerzeit mit wahrer Bewunderung gelesen hatte. Immerhin that er für Lobatschefskij wenigstens soviel, dass er 1842 dessen Wahl zum Korrespondenten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften veranlasste und die Uebersendung des Diploms mit einem eigenhändigen Briefe begleitete. Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass diese ganz unerwartete Anerkennung Lobatschefskij eine ganz besondere Freude und Genugthuung bereitet hat, zumal sie von einem Manne kam, den zu bewundern er schon in seiner Jugend gelernt hatte. Das an Gauss gerichtete, noch erhaltene Dankschreiben Lobatschefskijs stammt aus dem Juni 1843; es ist allerdings von der Hand eines Schreibers und von Lobatschefskij nur unterzeichnet. Der „unglückliche Brand der Stadt" trug die Schuld an der Verzögerung der Antwort, denn er hatte, wie es in dem Schreiben heisst, Lobatschefskijs Gesundheit und auch seine „persönlichen Angelegenheiten etwas zerstört" und ihn „ausserdem noch mit einer Menge besonderer Dienstgeschäfte überhäuft".

Es bleibt uns jetzt noch übrig anzugeben, was Lobatschefskij sonst noch während seines Rektorats, also bis zum Jahre 1846 veröffentlicht hat.

In erster Linie ist da zu nennen eine deutsch geschriebene Abhandlung „Ueber die Convergenz der unendlichen Reihen", die in Kasan 1841 als Beilage zu den von Ernst Knorr herausgegebenen „Meteorologischen Beobachtungen aus dem Lehrbezirk der Universität Kasan" erschienen ist. Ueber den Inhalt der Abhandlung werden wir später sprechen, hier nur einiges über die Vorgeschichte der ganzen Veröffentlichung, die von Lobatschefskijs vielseitigem wissenschaftlichen Interesse Zeugniss ablegt.

Schon im Jahre 1828 waren einige Zöglinge der Universität Kasan beauftragt worden, regelmässige meteorologische Beobachtungen anzustellen. Die Aufsicht über diese Beobachtungen, die im Kasaner Boten abgedruckt wurden, hatte zuerst der Professor der Physik Kupffer übernommen und dann, als Kupffer noch in demselben Jahre als Mitglied der Akademie nach Petersburg berufen worden war, Lobatschefskij. Das dauerte bis zum Anfange des Jahres 1833, wo Ernst Knorr die Professur der Physik und damit zugleich die Leitung der meteorologischen Beobachtungen übernahm.

Dass Lobatschefskij auch nach diesem Zeitpunkte immer noch

regen Antheil an der Sache nahm, zeigt eben jene Veröffentlichung aus dem Jahre 1841. Wir haben aber dafür noch einen andern Beweis. Es wird berichtet, dass er sich mit grossem Eifer an Beobachtungen über die Temperatur des Erdbodens betheiligte. Dazu wurde auf dem Hofe der Universität ein Brunnen angelegt, der bis zu einer Tiefe von 32 Metern reichte und in dem man gegen 20 Thermometer vertheilte. Die Zahl der gemachten Beobachtungen belief sich 1833 und 1834 jährlich auf mehr als 3000. Wegen des Auftretens grosser Mengen von Kohlensäure wurden die Beobachtungen 1835 aufgegeben, aber 1841 liess sie Lobatschefskij wieder beginnen und richtete dabei seine Aufmerksamkeit namentlich auf die Temperatur der vegetabilischen Bodenschicht; um diese Temperatur zu messen ersann er sogar ein Metallthermometer von eigner Konstruktion.

Der vorhin erwähnte Knorr ist für uns aus zwei Gründen von besonderm Interesse. Erstens ist er es wahrscheinlich gewesen, der Gauss jene „kleine in russischer Sprache geschriebene Abhandlung“ Lobatschefskijs verschafft hat. Zu vermuthen ist das deshalb, weil sich Knorr eben mit Lobatschefskijs geometrischen Untersuchungen eifrig beschäftigt hat und weil er gerade im Jahre 1840 im Auftrage der russischen Regierung neun Monate lang die Schweiz, Deutschland, England und Frankreich bereist hat, um physikalische Apparate zu kaufen; dagegen ist wohl kaum anzunehmen, dass der Astronom K. F. Knorre aus Dorpat, der von 1821 ab an der Steuermannsschule und später an der Sternwarte von Nikolájef gewirkt hat, Gaussens Bekanntschaft mit den Arbeiten Lobatschefskijs vermittelt haben sollte. Vermuthlich hat also Gauss irrthümlich Knorre statt Knorr geschrieben.

Zweitens ist aber Knorr auch deswegen interessant, weil er trotz jahrelangen Verkehrs mit Lobatschefskij und trotz aller Bewunderung für dessen Leistungen sich nicht zu der neuen Geometrie hat bekehren können. In Kijef, wohin er 1843 berufen worden war, hat er 1849 einen „Versuch einer Darstellung der Elemente der Geometrie“ veröffentlicht, in dessen Vorrede er die „Geometrischen Untersuchungen“ erwähnt und bemerkt: „es gehört in der That eine nicht gewöhnliche Freiheit des Geistes dazu, eine solche Untersuchung, bey welcher stets ein gewisses inneres Gefühl die Zulässigkeit der ursprünglichen Annahme [dass die Winkelsumme im Dreiecke kleiner ist als zwei Rechte] zurückweist, so durchzuführen, wie diess von Lobatschewsky geschehen ist.“ Aber er fügt hinzu: „Um so mehr muss ich bedauern nicht die Ansicht Lobatschewsky's theilen zu können, dass neben der euclidischen Geometrie noch eine andere, die von ihm sogenannte imaginäre

Geometrie, möglich sey, denn meiner Ansicht nach zeigt seine Arbeit nur, dass auf dem von ihm betretenen Wege der Beweis dessen was zu beweisen gefordert wird, nicht erlangt werden kann, aber nicht dass es keinen anderen Weg gebe, der zum Ziele führe." Sein Buch ist denn auch ein neuer, selbstverständlich verunglückter Versuch, die Euklidische Parallelentheorie zu retten.

Ausser der 1841 erschienenen Arbeit über unendliche Reihen haben wir hier noch drei Veröffentlichungen Lobatschefskijs zu erwähnen.

Im Jahre 1842 erschien im 24. Bande des Crelleschen Journals eine ganz kurze Arbeit von ihm unter dem Titel: „Sur la probabilité des résultats moyens, tirés des observations répétées". Sie ist nichts weiter als eine grösstentheils wörtliche Uebersetzung eines Abschnitts aus dem 1838 herausgegebenen zwölften Kapitel seiner „Neuen Anfangsgründe".

In demselben Jahre wurde Lobatschefskij zugleich mit Simonof von der Regierung nach Pensa geschickt, um dort die am 24. Juni (6. Juli) stattfindende totale Sonnenfinsterniss zu beobachten, woran sich die schon früher erwähnte Revision der Gymnasien des Gouvernements Pensa schloss. Zurückgekehrt veröffentlichte er in den Kasaner Gelehrten Schriften und im Journale des Ministeriums für Volksbildung einen ausführlichen Bericht über die Sonnenfinsterniss, der besonders deshalb merkwürdig ist, weil er darin seine Ansichten über die Entstehung der Sonnenkorona und über die verschiedenen Lichttheorieen auseinandersetzt.

Im Jahre 1845 erwarb Popóf, Lobatschefskijs Schüler und späterer Nachfolger auf dem Lehrstuhle der reinen Mathematik, den Doktorgrad mit einer Arbeit „Ueber die Integration der Differentialgleichungen der Hydrodynamik". Dem Abdrucke dieser Arbeit hatte Lobatschefskij eine ausführliche Beurteilung hinzugefügt, in der er zugleich auch noch eigne Ergebnisse mittheilte. Später, als er zeitweilig den Posten eines Kurators des Kasaner Lehrbezirks zu versehen hatte, regte er an, es solle zukünftig überhaupt jeder Doktordissertation eine ausführliche gedruckte Beurteilung beigegeben werden; jedoch fand dieser Plan im Senate Widerstand und kam infolgedessen nicht zur Ausführung.

Kapitel IX.

Die letzten Lebensjahre. Lobatschefskij als Mensch und als Lehrer.

Wir brechen jetzt die Aufzählung der wissenschaftlichen Arbeiten Lobatschefskijs ab und wenden uns zur Betrachtung des letzten Jahrzehnts seines Lebens.

Mit dem Jahre 1841 waren fünfundzwanzig Jahre vergangen, seitdem Lobatschefskij zum Professor ernannt worden war. Von diesem Zeitpunkte ab gehörte er nach den in Russland gültigen Bestimmungen zu den pensionirten Professoren, doch war er mit dem Titel eines Honorarprofessors noch auf fünf Jahre in seiner Stellung belassen worden. Im Juli 1846 waren auch diese fünf Jahre zu Ende.

Obgleich nun Lobatschefskij im Jahre vorher noch einmal auf vier Jahre zum Rektor gewählt worden war, und obgleich der Senat an das Ministerium die dringende Bitte richtete, ihm nochmals fünf Jahre zuzugeben, „da es für den Senat eine grosse Ehre sein werde, einen so hervorragenden Gelehrten und so erfahrenen Professor unter seinen Mitgliedern zu haben“, so wurde trotzdem darauf keine Rücksicht genommen. Durch eine kaiserliche Entschliessung vom 28. August (9. September) 1846 wurde er von seinen Aemtern als Professor und Rektor entbunden und, da gerade um dieselbe Zeit Mussin-Puschkin nach Petersburg versetzt wurde, zum Stellvertreter des Kurators ernannt. Diesen Posten hat er bekleidet, bis er im November 1855 ganz in den Ruhestand versetzt wurde.

Als Vertreter des Kurators leitete er die Verwaltung der Universität bis zur Ankunft des neuen Kurators Molostwóf, die 1847 erfolgte. Aber merkwürdig: so lange er Rektor gewesen war, hatte zwischen ihm und dem Senate stets ungestörte Einigkeit geherrscht, in seiner neuen Stellung gerieth er sofort in Streitigkeiten mit dem Senate. Woran das lag, ist nicht ganz aufgeklärt, doch scheint es, dass Simonof, den man zu seinem Nachfolger im Rektorate gewählt hatte, die Schuld mit trug: wenigstens wird dieser als ein ziemlich eitler Mann geschildert, der schon lange nach dem Rektorposten lüstern gewesen war. Wie dem auch sei, Lobatschefskij sah seinen wohlverdienten und so lange behaupteten Einfluss zusehends schwinden. Nach der Ankunft des neuen Kurators zog er sich daher von den Geschäften fast ganz zurück und wirkte nur noch bei den Aufnahmeprüfungen und bei den andern Prüfungen mit.

Die Gemüthsbewegungen, die dieser jähe Wechsel seiner Stellung an seiner geliebten Universität in ihm hervorrief, beeinflussten auch sein körperliches Befinden ungünstig und verminderten seine Widerstandskraft. Die länger als zwei Jahrzehnte hindurch fortgesetzte übermässige Anspannung seiner Kräfte rächte sich jetzt: seine Gesundheit, die schon früher gelitten hatte, nahm mit Riesenschritten ab. Dazu kam schwerer Kummer in seiner Familie. Er hatte 1832 geheirathet, und seine Gattin hatte ihm drei Söhne und eine Tochter geschenkt. Den ältesten, 1833 geborenen dieser Söhne musste er Anfang der funfziger Jahre als hoffnungsvollen Studenten sterben sehen. Dies Alles brach seine Kraft, und in den letzten Jahren seines Lebens machte der eben erst sechzigjährige den Eindruck eines hinfälligen Greises.

Auch sein Augenlicht nahm immer mehr ab und ging zuletzt gänzlich verloren. Trotzdem fuhr er fort, die Universitätsversammlungen zu besuchen, die Doktordisputationen und akademischen Reden anzuhören. Noch ganz kurz vor seinem Tode stellte er sich persönlich in Uniform dem Minister für Volksbildung vor, der Kasan besuchte. Das war seine letzte Anstrengung im Dienste der Pflicht. Am 12. (24.) Februar 1856 starb er.

Wissenschaftlich thätig war Lobatschefskij auch noch in diesen letzten zehn Jahren seines Lebens. Eine im Jahre 1852 zugleich russisch und deutsch veröffentlichte Arbeit über bestimmte Integrale beweist das. Namentlich aber beschäftigte er sich immer wieder mit seiner imaginären Geometrie. Einmal — mehrere Jahre, nachdem er von seiner Professur entbunden worden war — hielt er vor einem auserlesenen Zuhörerkreise von Universitätsprofessoren und Gymnasiallehrern eine längere Reihe von Vorträgen über seine neuen Anfangsgründe der Geometrie, und als im Jahre 1855 das fünfzigjährige Jubiläum der Universität Kasan gefeiert werden sollte, da raffte er seine letzten Kräfte zusammen, um einen würdigen Beitrag zu der Sammlung wissenschaftlicher Abhandlungen zu spenden, die die Universität bei dieser Gelegenheit herauszugeben vorhatte. „Pangeometrie" nannte er diesen Beitrag, in dem er nochmals eine ausführliche Darstellung seines geometrischen Systems gab, um zum Ausdrucke zu bringen, dass dieses System die gewöhnliche Euklidische Geometrie als besonderen Fall umfasse.

Die Pangeometrie, die sowohl in französischer als in russischer Sprache erschien, war Lobatschefskijs letzte wissenschaftliche Arbeit. Noch vor der Beendigung des Druckes erblindete er; es heisst sogar, er habe sie einigen seiner Schüler in die Feder diktirt.

Leider war es ihm nicht vergönnt bei Lebzeiten seine geometrischen Arbeiten in seinem Vaterlande anerkannt zu sehen. Noch 1853 erschien von dem Akademiker Bunjakofskij in Petersburg eine umfangreiche Arbeit über die Parallellinien, in der Lobatschefskij nicht einmal erwähnt ist! Auch unter seinen zahlreichen Schülern fand sich keiner, der diese Arbeiten fortgesetzt hätte. Die einzige Auszeichnung, die ihm von einer wissenschaftlichen Körperschaft seines Vaterlandes zu Theil geworden ist, kam von der Moskauer Universität: bei Gelegenheit ihres hundertjährigen Jubiläums ernannte ihn diese zu ihrem Ehrenmitgliede. Das Ausland blieb, von Gauss abgesehen, theilnamelos.

Lobatschefskij war mittleren Wuchses. Die Bilder, die man von ihm besitzt, zeigen ein ernstes, strenges Gesicht; auf einem Bilde, das aus seinen letzten Lebensjahren stammt und das unserm Buche beigegeben ist, sieht er fast mürrisch aus. Als ein ernster, finster blickender, unzugänglicher und wortkarger Mann lebte er auch in der Erinnerung derer, die nur den von Alter und Krankheit gebeugten Greis gesehen hatten. In seiner Jugend muss er lebhaft, ja feurig gewesen sein; eine aufreibende Thätigkeit im Dienste seiner Universität, schwere Erfahrungen, die auch ihm nicht erspart blieben, sie hatten ihn so verschlossen und wortkarg gemacht. Gleichwohl bewahrte er sich lebenslang ein warmes Herz, und wahrhaft väterlich war seine Liebe zur studirenden Jugend. Als Rektor hat er nicht wenige Studenten vor den Folgen jugendlicher Uebereilungen bewahrt und sich bei allen ein ehrfurchtsvolles Andenken gesichert. Namentlich aber war er stets bereit, begabte junge Leute auf alle Weise zu unterstützen und zu fördern. Man erzählt dafür verschiedene Beispiele. Einen Handlungsdiener Namens Bolzani fand Lobatschefskij hinter dem Ladentische damit beschäftigt, ein mathematisches Buch zu lesen. Er ermöglichte dem jungen Manne den Eintritt in das Gymnasium und dann den Besuch der Universität, und aus dem Handlungsdiener wurde später der Professor der Physik an der Universität Kasan. Eines armen Priesters Sohn war zu Fuss aus Sibirien nach Kasan gekommen, gänzlich mittellos; mit Lobatschefskijs Hülfe gelang es ihm in die medicinische Fakultät einzutreten. Nachdem er später als Arzt eine geachtete Stellung erworben hatte, vermachte er aus Dankbarkeit der Universität seine kostbare Büchersammlung.

Der hervorstechendste Zug in Lobatschefskijs Charakter war jedoch seine Gewissenhaftigkeit und sein unermüdlicher Pflichteifer. In einem dem Andenken seines Lehrers gewidmeten kurzen Aufsatze erzählt Popof, einer der Kollegen Lobatschefskijs habe sich über diesen

so ausgesprochen: „Es gab für ihn im Dienste und in der Wissenschaft nichts Untergeordnetes; was er auch angriff, Alles war in seinen Augen von der grössten Wichtigkeit, Alles that er mit ganzem Herzen und mit voller Ueberzeugung von dem Nutzen seiner Arbeit. Niemals entzog er sich seinen Verpflichtungen und in vielen Fällen nahm er freiwillig Arbeiten auf sich.“ Ich denke, denselben Eindruck wird man aus den von mir angeführten Thatsachen gewonnen haben.

Ueber Lobatschefskij als Lehrer sagt derselbe Popof Folgendes: „Im Hörsaale verstand es Lobatschefskij scharfsinnig oder hinreissend zu sein je nach dem Gegenstande seines Vortrags. Im Allgemeinen glich sein gesprochener Stil dem geschriebenen nicht. Während sich seine Abhandlungen durch einen knappen und nicht immer ganz klaren Stil auszeichneten, liess er es sich im Hörsaale angelegen sein, seine Auseinandersetzungen recht klar zu geben, indem er zunächst auf synthetischem Wege specielle Aufgaben löste und dann auf analytischem Wege die allgemeinen behandelte. Um den Mechanismus der Rechnung kümmerte er sich wenig, sondern vor allen Dingen um die Schärfe der Begriffe. Auf der Tafel schrieb er nicht schnell, vielmehr sorgfältig; Formeln schrieb er schön, damit die Phantasie des Zuhörers sich mit Vergnügen die Gegenstände des Unterrichts wieder vergegenwärtige. Er liebte es mehr, selbst zu lehren, als die Schriften andrer auszulegen, und überliess es daher seinen Zuhörern, sich mit der gelehrten Literatur bekannt zu machen. Seine öffentlichen Vorträge über Physik zogen ein zahlreiches Publikum in seinen Hörsaal, und die Vorlesungen für einen auserwählten Zuhörerkreis, in denen er seine neuen Anfangsgründe der Geometrie entwickelte, können mit Fug und Recht als äusserst scharfsinnig bezeichnet werden.“

Hören wir endlich noch, was Popof über Lobatschefskij als Examinator erzählt: „Bei den Prüfungen war er anscheinend eigensinnig: zuweilen begnügte er sich mit einer ganz kurzen Antwort, andre Male unterbrach er missvergnügt eine gewandte Antwort des Studenten. Das lag daran, dass er sein Augenmerk stets auf die Entwickelung der Fähigkeiten und des gesunden Verstandes richtete, während er den Besitz eines jugendlich guten Gedächtnisses nicht für dauerhaft hielt. Aber indem er von den jungen Leuten tadellose Schärfe des Ausdrucks forderte, erschien er unnöthig streng, denn der gelehrte Stil wird von den Doktoranden zu allerletzt erworben.“

Janischefskij, der selbst noch von Lobatschefskij geprüft worden war, erzählt ebenfalls, dass dieser ein strenger, ja peinlicher Examinator gewesen sei und dass er auf auswendig gelernte Antworten

wenig Werth gelegt, sondern hauptsächlich Schärfe des Ausdrucks verlangt habe. Bei den Prüfungen namentlich habe sich Lobatschefskijs ausgedehntes Wissen gezeigt: er konnte fast über jede Wissenschaft examiniren, und niemals verliess man die Prüfung ohne das Bewusstsein, etwas gelernt zu haben.

Aeusserlich verfloss das Leben Lobatschefskijs sehr ruhig und gleichmässig. Abgesehen von den früher erwähnten Dienstreisen hat er nur noch zwei grössere Reisen gemacht, das eine Mal war er vom September 1836 bis zum Januar 1837 in Petersburg und besuchte bei dieser Gelegenheit auch Dorpat, wo er vielleicht sogar seinen Lehrer Bartels, der 1836 am 7. (19.) December gestorben ist, noch einmal gesehen hat. Endlich vertrat er 1840 seine Universität in Helsingfors bei dem zweihundertjährigen Jubiläum der dortigen Hochschule. Die Gränzen Russlands hat er niemals verlassen.

Seine Erholung von der wissenschaftlichen Arbeit und von den Amtsgeschäften suchte er auf dem Lande. An der Wolga stromaufwärts, wenig mehr als sechzig Kilometer von Kasan, liegt ein Dörfchen „Bjelowólshskaja Slobódka“, das ihm gehörte. Hier legte er einen schönen Garten an, in dem sich noch heutigen Tages ein Cedernhain erhalten hat. Nach einer Ueberlieferung seiner Familie soll er beim Pflanzen dieser Cedern schwermüthig geäussert haben, die Früchte werde er wohl nicht mehr erleben, und wirklich: die ersten Cedernnüsse wurden in seinem Todesjahre gepflückt, aber erst nach seinem Tode.

Aber auch diese ländlichen Beschäftigungen trieb er nicht blos zu seiner Erholung und zu seinem Vergnügen, sondern auch dabei verfolgte er ernstere Ziele und war bemüht, sein bescheidenes Besitzthum zu einer Musterwirthschaft zu machen. Er legte eine Wassermühle an und erfand ein eigenes Verfahren zur Herstellung von Mühlsteinen. Er benutzte sogar Guano zum Düngen. Mit besonderm Erfolge betrieb er die Schafzucht: von dem Erlöse für den Brillantring, den ihm Kaiser Nikolaus geschenkt hatte, kaufte er eine Anzahl Merinoschafe und bei der Bearbeitung der Wolle führte er gewisse Verbesserungen ein, für die ihm die kaiserliche landwirthschaftliche Gesellschaft zu Moskau 1850 ihre silberne Medaille verlieh. Auch war er ein sehr eifriges Mitglied der 1839 gegründeten kaiserlichen Oekonomischen Gesellschaft zu Kasan und bekleidete darin lange Jahre das Amt eines Abtheilungsvorsitzenden.

Kapitel X.

Lobatschefskijs Schreibart. Nachträgliches über seine geometrischen Schriften. Seine Arbeiten auf dem Gebiete der Analysis.

Wir wenden uns jetzt wieder zur Betrachtung der Schriften Lobatschefskijs und wollen zunächst versuchen, uns von dem allgemeinen Eindrucke Rechenschaft zu geben, den diese machen.

Da müssen wir sagen, dass Lobatschefskijs Stil im Grossen und Ganzen nicht sehr flüssig ist, eher schwerfällig. Am wenigsten fühlbar ist das bei rein mathematischen Entwickelungen: seine Darstellung ist da zwar nirgends elegant, aber doch fast immer klar und verständlich; in einzelnen Schriften ist sie freilich zu knapp, zu abgerissen und stellt recht hohe Ansprüche an die Fähigkeit des Lesers, zwischen den Zeilen zu lesen, nur angedeutete Gedankengänge selbständig wiederherzustellen, unterdrückte Rechnungen zu ergänzen. Viel unangenehmer machen sich die Mängel seines Stils bei allgemeinen Auseinandersetzungen bemerklich, die das philosophische Gebiet streifen, wie zum Beispiel in der Einleitung zu den „Neuen Anfangsgründen“. Da ist er nicht selten dunkel und wirklich schwer verständlich.

Sieht man von stilistischen Unebenheiten im Einzelnen ab, sondern achtet blos auf die Darstellung im Ganzen, also darauf, ob die Gedankenentwickelung gut geordnet vor sich geht und planmässig vom Leichtern zum Schwerern fortschreitet, so wird man nicht anstehen, die „Neuen Anfangsgründe“ — wohlbemerkt mit Ausnahme der Einleitung — und die „Geometrischen Untersuchungen“ als gut, ja sogar musterhaft geschrieben zu bezeichnen. Auch der „Pangeometrie“ wird man bis zu einem gewissen Grade diese Anerkennung nicht vorenthalten können und die Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe“ würde man mit den beiden zuerst genannten auf eine Stufe stellen müssen, wenn sie nicht gar zu aphoristisch abgefasst wäre, so dass sie ohne vorhergehendes Studium der „Neuen Anfangsgründe“ nur äusserst schwer verständlich ist. Was dagegen die übrigen geometrischen Arbeiten, die „Imaginäre Geometrie“ und die „Anwendung der imaginären Geometrie“ anbetrifft, so wird man, ohne ungerecht zu sein, dem Urteile von Gauss beipflichten können, dass sie „mehr einem verworrenen Walde gleichen, durch den es, ohne alle Bäume erst einzeln kennen gelernt zu haben, schwer ist, einen Durchgang und Uebersicht zu finden“. Die Arbeiten endlich, die rein analytischen

Inhalts sind, verrathen zwar in jeder Zeile den geübten, vor keiner noch so mühsamen Rechnung zurückscheuenden Mathematiker, aber sie sind gerade deshalb nicht leicht zu lesen, und man ist bei ihnen immer in Gefahr, den Faden zu verlieren.

Ueber den Inhalt und über die Bedeutung der geometrischen Arbeiten Lobatschefskijs ist früher schon das Nöthige gesagt, ausserdem kann man jetzt die beiden wichtigsten unter ihnen, die bisher ganz unzugänglich waren, die „Neuen Anfangsgründe“ und die Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe“ in deutscher Uebersetzung lesen. Da ferner in den Anmerkungen zu dieser Uebersetzung auch noch aus der „Imaginären Geometrie“, den „Geometrischen Untersuchungen“ und der „Pangeometrie“ alles einigermassen Wichtige mitgetheilt ist, was in den beiden übersetzten Abhandlungen nicht berührt wird und was zu deren Ergänzung dienen kann, so bleibt jetzt nur noch einiges wenige nachzutragen.

Schon in der Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe“ zeigt Lobatschefskij sehr deutlich das Bestreben, die Fruchtbarkeit seiner imaginären Geometrie für die Integralrechnung in ein möglichst helles Licht zu setzen. Er hat deshalb auch einen ganzen Abschnitt eingeschaltet, der sich blos mit der Betrachtung gewisser Integrale beschäftigt, auf die seine imaginäre Geometrie führt. In der Uebersetzung habe ich diesen Abschnitt weggelassen, weil er eigentlich ganz in das Gebiet der Integralrechnung gehört. Hier will ich nur erwähnen, dass Lobatschefskij darin unter anderm zwei Funktionen:

$$L(x, \omega) = \int_0^x \frac{x\,dx}{e^x + e^{-x} - 2\cos\omega}, \qquad \Phi(x) = -\int_0^x dx \,.\, \log\cos x$$

einführt, mit deren Hülfe sich viele in der imaginären Geometrie vorkommende Integrale ausdrücken lassen, namentlich die Inhalte von Pyramiden (vgl. S. 56 ff.). Insbesondre will ich noch auf eine Beziehung aufmerksam machen, die sich aus den Gleichungen (73) und (75) auf S. 56 f. sehr leicht ergiebt, nämlich auf diese:

$$\sin 2\omega \,.\, L(x, 2\omega) = \Phi(\omega + \xi) + \Phi(\omega - \xi) - 2\Phi(\omega),$$

wo ξ und x durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \cot \omega$$

verbunden sind, endlich auch auf die Reihenentwickelung:

$$\Phi(x) = x \log 2 - \frac{1}{2} \sum_1^\infty {}_\nu \frac{(-1)^\nu}{\nu^2} \sin 2\nu x$$

und auf die daraus folgende Relation:

$$\Phi(\pi + x) = \Phi(x) + \pi \log 2.$$

In der 1835 erschienenen „Imaginären Geometrie“ tritt das vorhin gekennzeichnete Bestreben Lobatschefskijs noch viel deutlicher hervor. Man hat geradezu den Eindruck, als ob die neue Geometrie Nebensache und die Anwendung auf die Integralrechnung die Hauptsache wäre. Uebrigens sind die in der „Imaginären Geometrie“ gemachten Anwendungen auf die Integralrechnung zum grössten Theile auch schon in der frühern Arbeit behandelt.

Ganz und gar solchen Anwendungen gewidmet ist die 1836 erschienene „Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale“, doch enthält sie zugleich die Lösung verschiedener geometrischer Aufgaben. Zum Beispiel wird der Rauminhalt eines Kegels berechnet, dessen Grundfläche ein Kreis ist und dessen Erzeugende parallel sind zu einer Geraden, die auf der Ebene des Kreises, aber nicht im Kreismittelpunkte, senkrecht steht. Ferner wird mit grosser Ausführlichkeit die Berechnung des Rauminhalts von Pyramiden auseinandergesetzt. Diese Rauminhalte drückt Lobatschefskij mit Hülfe der Funktion $\Phi(x)$ aus, die aber jetzt mit $L(x)$ bezeichnet wird, und zwar bildet er sie aus den Werthen, die diese Funktion für gewisse Werthe ihres Arguments annimmt, durch Addition und Subtraktion. Die verschiedenen Wege, die man zur Berechnung eines solchen Rauminhalts einschlagen kann, liefern eine Menge linearer Gleichungen zwischen gewissen Werthen der Funktion $L(x)$.

Ausserdem entwickelt Lobatschefskij in der hier besprochenen Abhandlung noch eine lange Reihe von Relationen zwischen Integralen. Sein Verfahren besteht im Allgemeinen darin, dass er ein bekanntes, ausführbares Doppelintegral durch Einführung eines neuen Koordinatensystems umgestaltet und auf diese Weise zu neuen Integralen kommt, die auch in endlicher geschlossener Form dargestellt werden können. In einzelnen Fällen zeigt er dann noch, wie man rein analytisch, ohne die imaginäre Geometrie heranzuziehen, das eine Integral auf das andre zurückführen kann. Er sagt darüber einmal Folgendes:

„Ueberhaupt wollen wir bemerken, dass man zu allen Schlüssen, zu denen das Hülfsmittel der imaginären Geometrie führt, immer auch vermittelst der Analysis gelangen kann, indem man sich auf die zwischen den Veränderlichen bestehenden Gleichungen selbst stützt. Wenn ich im gegenwärtigen Falle der Kürze halber nicht gleich diesen Weg eingeschlagen habe, so dient das nebenbei als ein Beispiel dafür, welchen Vorzug das geometrische Verfahren nicht nur in Rück-

sicht auf die Einfachheit der Rechnung besitzt, sondern sogar durch die Unmittelbarkeit, mit der sich hier jede Abhängigkeit zwischen den Zahlen darbietet."

Auf Einzelheiten einzugehen ist hier nicht möglich, ist doch allein die Zusammenstellung der gefundenen Integralausdrücke, die er am Schlusse der Abhandlung giebt, so umfangreich, dass sie in der Sammlung seiner geometrischen Arbeiten sechzehn Quartseiten füllt!

Wir haben früher erwähnt, dass die beiden letzten Kapitel der „Neuen Anfangsgründe" mit der imaginären Geometrie nichts zu thun haben, sie sind deshalb auch in der Uebersetzung weggelassen. Es ist aber doch angebracht, auch über diese Kapitel XII und XIII noch etwas zu sagen.

In dem Kapitel XII behandelt Lobatschefskij mit grosser Sorgfalt die verschiedenen Fälle, die bei der Auflösung der geradlinigen Dreiecke der gewöhnlichen Geometrie zu unterscheiden sind. Er legt dabei ganz besondres Gewicht darauf, festzustellen, wie gross der Einfluss ist, den die Benutzung siebenstelliger Logarithmentafeln und die dadurch bedingte Vernachlässigung der höhern Decimalen auf das Endergebniss hat. In jedem einzelnen Falle entwickelt er die Formeln, aus denen sich beurteilen lässt, wie gross die Abweichung des Rechnungsergebnisses von dem wahren Werthe des gesuchten Stückes höchstens sein kann. Auch theilt er jedesmal vollständig durchgerechnete Zahlenbeispiele mit. Erwähnenswerth ist überdies, dass er gewisse Hülfsmittel angiebt, die zur Erreichung einer noch grösseren Genauigkeit der Rechnung dienen können.

Bei der Untersuchung über die Grösse der Abweichung des Resultats von der Wahrheit geht aber Lobatschefskij noch weiter. Er bemerkt, dass er bisher bei der Beurteilung dieser Grösse alle Umstände als ungünstig angenommen habe, während doch sehr oft im Laufe der Rechnung ein Fehler dem andern entgegengesetzt ist, so dass also einer den andern vermindern oder sogar ganz aufheben kann. Er stellt daher auch noch Betrachtungen darüber an, wie gross die Wahrscheinlichkeit des Auftretens jedes einzelnen Fehlers ist. Diese Betrachtungen hat er später im 24. Bande des Crelleschen Journals in französischer Sprache von Neuem veröffentlicht (vgl. S. 401).

Da ferner auch die gegebenen Stücke des Dreiecks nur durch Messungen gefunden sind, die mit Fehlern behaftet sind, so wird noch der Einfluss untersucht, den diese Fehler auf die übrigen Stücke haben. Endlich bespricht er gewisse Fälle, in denen man mit Vortheil von Reihenentwickelungen Gebrauch machen kann, um die fehlenden Stücke des Dreiecks zu ermitteln.

In Kapitel XIII wird die Auflösung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke genau in derselben Weise behandelt.

Von den geometrischen Schriften blieben jetzt nur noch die „Geometrischen Untersuchungen“ und die „Pangeometrie“ übrig; doch haben wir die „Untersuchungen“ schon früher zur Genüge gekennzeichnet, und über die Pangeometrie ist nicht viel zu sagen, da sie im Vergleich mit den ältern Schriften nur wenig wirklich Neues enthält. Höchstens könnten wir bemerken, dass in der „Pangeometrie“ an einigen Stellen Spuren vorhanden sind, die auf die geschwächte Sehkraft des Verfassers hinzudeuten scheinen. Einzelne Rechnungen sind so umständlich und so wenig übersichtlich durchgeführt, dass man fast glauben möchte, Lobatschefskij habe hier nur im Allgemeinen den einzuschlagenden Weg angegeben und die Ausführung der erforderlichen Rechnungen seinen Schülern überlassen. Doch gilt das nur von verhältnissmässig wenigen Stellen, und im Uebrigen zeigt sich der Verfasser der Pangeometrie noch im vollen Besitze seiner Geisteskräfte.

Lobatschefskijs rein analytische Untersuchungen hat man bisher gänzlich vernachlässigt, nur Wassiljef hat seit einigen Jahren bei verschiedenen Gelegenheiten darauf hingewiesen, dass auch sie durchaus nicht des Interesses entbehren, dass sie vielmehr Stellen aufweisen, an denen Lobatschefskij seiner Zeit vorauseilend Gedanken ausspricht, die heutzutage allerdings Gemeingut der Mathematiker sind, damals aber noch vollständig neu waren. Es würde sich wohl lohnen, diese Schriften einmal sorgfältig durchzuarbeiten, vielleicht würde man sogar Manches finden, was auch jetzt immer noch von Werthe ist. Leider sind sie zum grössten Theile russisch geschrieben und ausserhalb Russlands nur in äusserst wenigen Exemplaren vorhanden.

Hier muss ich mich selbstverständlich mit einigen kurzen Andeutungen über diese Schriften begnügen, doch will ich wenigstens ein paar Proben daraus mittheilen.

Lobatschefskijs Lehrbuch der Algebra, das ich leider nicht zu Gesicht bekommen habe, ist an erster Stelle zu nennen. Es behandelt in 17 Kapiteln die elementaren Rechnungsoperationen, die Brüche und Kettenbrüche, die Gleichungen ersten Grades, die unbestimmten Gleichungen, die reellen und komplexen Potenzen, die trigonometrischen Funktionen, die Differenzen und Summen von Funktionen, die Auflösung der binomischen Gleichungen und die Auflösung beliebiger algebraischer Gleichungen. Insbesondre enthält es auch schon ein

von Lobatschefskij ersonnenes Verfahren zur Untersuchung der Konvergenz unendlicher Reihen, auf das wir später zurückkommen werden.

Man sieht hieraus, dass sich der Verfasser für sein Lehrbuch ziemlich weite Gränzen gesteckt hatte. Aber auch sonst war dieses keine Arbeit nach der Schablone. Charakteristisch hierfür ist eine Stelle im Vorworte, wo es heisst: „In allen Zweigen der mathematischen Wissenschaften erwirbt man die ersten Begriffe leicht, aber immer mit Mängeln behaftet. Schliesslich muss man jedoch einmal wieder zu den Grundlagen zurückkehren, und dann ist es an der Zeit, auf vollkommene Strenge Gewicht zu legen.“ Nach seiner Ansicht „beginnt erst in der Algebra die Mathematik mit der ganzen Schärfe der Begriffe und mit der ganzen Weite des Gesichtskreises, während die Arithmetik blos den Anfang bildet und nur zur Vorbereitung und zur Uebung dient“. Er machte deshalb in seiner Algebra den Versuch, diese Wissenschaft ganz systematisch von den ersten Elementen an aufzubauen, und in der Einleitung zu den „Neuen Anfangsgründen“ (s. S. 81 f.) spricht er mit einem gewissen Selbstbewusstsein davon, dass er diesen Versuch jetzt auch bei der Geometrie durchführen wolle.

Nur im Vorbeigehen erwähnen wir die 1834 erschienene Arbeit über die Gleichungen von der Form: $x^n - 1 = 0$. Sie ist eine Fortsetzung seiner auf S. 359 erwähnten Jugendarbeit, die er, wie wir schon damals erzählt haben, später in sein Lehrbuch der Algebra aufgenommen hatte. Er behandelt nämlich jetzt den Fall $n = 8m + 1$ und zeigt, wie man die Gleichung m-ten Grades aufstellen kann, auf die sich die gegebene Gleichung durch Ausziehung von Quadratwurzeln zurückführen lässt. Etwas näher müssen wir dagegen auf die ebenfalls 1834 gedruckte Arbeit „Ueber die Konvergenz der trigonometrischen Reihen“ eingehen. Wir kümmern uns dabei um den Hauptgegenstand der Arbeit, die trigonometrischen Reihen, gar nicht und berichten davon nur soviel, dass Lobatschefskij die berühmte Arbeit Dirichlets aus dem vierten Bande des Crelleschen Journals (1829) anführt und meint, Dirichlet scheine „ohne die nöthige Vorsicht“ die unendliche Reihe:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi}{\varphi}\,d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{\varphi}\,d\varphi + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin\varphi}{\varphi}\,d\varphi + \cdots$$

blos deshalb für konvergent erklärt zu haben, weil das Vorzeichen der Glieder wechselt, ein Tadel, dessen Berechtigung hier unerörtert bleiben muss. Wohl aber wollen wir die für jene Zeit wirklich merkwürdigen Betrachtungen mittheilen, die Lobatschefskij über den Funktions-

begriff und über den Differentialquotienten anstellt. Es heisst da auf S. 181 ff. in genauer Uebersetzung:

„Der allgemeine Begriff erfordert, dass man eine Zahl dann [181 als Funktion von x bezeichnet, wenn sie für jedes x gegeben wird und sich mit x stetig ändert. Der Werth der Funktion kann entweder durch einen analytischen Ausdruck gegeben sein oder durch eine Bedingung, die ein Mittel liefert, um alle Zahlen zu prüfen und eine davon auszuwählen; oder endlich kann die Abhängigkeit bestehen, aber unbekannt bleiben.

„Zum Beispiele ist x^3 eine Funktion von x, die analytisch ausgedrückt ist; aber die Wurzel einer Gleichung fünften Grades ist eine Funktion des letzten Gliedes, für die noch kein analytischer Ausdruck gefunden ist und die durch die Gleichung selbst als Bedingung bestimmt wird. Im strengen Sinne muss man sagen, dass weder von diesen noch von jenen Funktionen die Werthe unmittelbar gegeben sind, sondern dass sie stets durch Bedingungsgleichungen begränzt und deshalb grössten Theils nur näherungsweise berechnet werden. Zum Beispiele wird ja die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl, wenn sie nicht wieder ganz ist, durch einen unendlichen Bruch dargestellt, bei dem die Decimalstellen eine nach der andern durch Versuche ermittelt werden.

„Endlich können die Bedingungen, denen eine Funktion unterworfen ist, noch unbekannt sein, während schon zweifellos eine [182 Abhängigkeit zwischen Zahlen besteht. In diesem Falle muss die Annahme, die Funktion lasse sich analytisch ausdrücken, als willkürlich bezeichnet werden. Es ist wahr, dass man noch keine solchen Beispiele gefunden hat, bei denen es unmöglich ist, die Abhängigkeit zwischen den Zahlen unmittelbar oder mittelbar durch einen analytischen Ausdruck darzustellen; jedoch kann man auch nicht vollkommen sicher sein, dass nicht etwa eine andre Annahme zu einer andern Lösung führen könnte. In meiner Abhandlung über die Anfangsgründe der Geometrie (Kasaner Bote von 1830 [hier S. 1—66]) nahm ich den Winkel an als abhängig von dem Abstande zwischen seinem Scheitel und dem Punkte auf dem einen Schenkel, wo die Senkrechte dem andern Schenkel parallel wird, indem ich unter einer parallelen Linie eine solche verstand, die bei der kleinsten Veränderung ihrer Richtung nach der einen Seite hin zu schneiden beginnt. Es ist klar, dass hier der Begriff der Abhängigkeit in der Erklärung selbst enthalten ist, aber irgend einen analytischen Ausdruck zuzulassen, hiesse doch von vornherein die Allgemeinheit der Annahme einschränken. Indem ich daher den Abstand des Scheitels von der Senkrechten mit

x bezeichnete, nannte ich den Winkel selbst $F(x)$, wobei ich jedoch keineswegs unter diesem Zeichen irgend eine analytische Funktion von x verstand, sondern nur ausdrücken wollte, dass mit dem Abstande x jedesmal zugleich der Winkel $F(x)$ gegeben ist. In der Folge wird nunmehr bewiesen, dass $F(x)$ wirklich eine analytische Funktion ist und durch die Gleichung:

$$\cot \tfrac{1}{2} F(x) = e^x$$

bestimmt wird, wo e die Grundzahl der Neperschen Logarithmen ist. [183

„Anscheinend ist es unmöglich an der Wahrheit dessen zu zweifeln, dass Alles in der Welt durch Zahlen dargestellt werden kann, und ebensowenig an der Richtigkeit der Annahme, dass jede darin vorkommende Veränderung und Beziehung durch eine analytische Funktion ausgedrückt wird. Indessen lässt eine allgemeine Betrachtung der Theorie das Bestehen einer Abhängigkeit schon in dem Sinne zu, dass man die Zahlen, die mit einander verbunden sind, als gleichzeitig gegeben ansieht. Lagrange hat infolgedessen in seiner Funktionenrechnung (Calcul des fonctions), durch die er die Differentialrechnung ersetzen wollte, die Allgemeinheit des Begriffs um ebensoviel geschädigt, wie er an Strenge der Schlüsse zu gewinnen gedachte.

„Man muss daher unter dem Worte Funktion überhaupt eine Zahl verstehen, deren stetige Aenderungen gegeben sind und von den Aenderungen einer andern abhängen, wenn auch auf eine vollständig unbekannte Art. Wir bezeichnen mit $F(x)$ eine Funktion von x, die, sich mit x ändernd, unaufhörlich wächst von einem bestimmten x bis zu $x = a$. Wir theilen $a - x$ in i gleiche Theile und setzen: $a - x = i \,.\, h$. Die Zahlen in der Reihe

$$F(x),\ F(x+h),\ F(x+2h),\ \ldots,\ F(a)$$

seien immer bekannt, wie klein auch h sein möge, das mit wachsendem i unbegränzt abnimmt. Das Verhältniss: [184

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

muss sich zugleich mit h ändern. Für $i' > i$ sei $a - x = i'.h'$. Wenn dann überdies:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \frac{F(x+h') - F(x)}{h'} = E$$

oder, was ganz dasselbe, wenn:

$$\frac{h' \,.\, F(x+h) - h \,.\, F(x+h') + (h-h')F(x)}{hh'} = E$$

für jedes x zugleich mit h stetig so weit abnimmt, dass es so klein

gemacht werden kann, wie man will, so soll die Funktion $F(x)$ ununterbrochen heissen, und es wird dadurch für das Verhältniss:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

eine Gränze bedingt, zu der man durch stetige Verkleinerung von h gelangt und die gleich $\frac{dF(x)}{dx}$ sein wird. Wenn sich dagegen E bei [185 der Verkleinerung von h irgend einer Zahl nähert, die grösser als Null ist, und diese nicht überschreiten kann, so zerfällt die Funktion $F(x)$ in zwei, die zusammen einen Punkt scharfen Knickes in der Krümmung der Linie darstellen, auf der die Spitzen der zur x-Axe senkrechten Ordinaten $F(x)$ liegen. Wenn dieser Knick in der Krümmung insbesondre in dem Punkte stattfindet, dessen Koordinaten x und $F(x)$ sind, so erhalten wir durch die Substitution $h' = -h$ den Ausdruck:

$$\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h},$$

der für eine ununterbrochene Funktion $F(x)$ mit h ohne Gränzen abnimmt, während er für unterbrochene Funktionen $F(x)$ und für gewisse x nicht unter eine bestimmte Gränze der Abnahme herabsinkt."

Lobatschefskij hatte also die Nothwendigkeit der Unterscheidung zwischen solchen Stellen, an denen eine Funktion blos stetig, und solchen, an denen sie auch differentiirbar ist, klar erkannt. Er sah jedenfalls die Unmöglichkeit ein, zu beweisen, dass aus der Stetigkeit einer Funktion deren Differentiirbarkeit folgt. Zwar spricht er es nicht aus, dass stetige Funktionen denkbar seien, die überhaupt nicht differentiirbar sind, und noch weniger kommt bei ihm ein Beispiel einer solchen Funktion vor; aber auch so ist die Bestimmtheit, mit der er die Unterscheidung als geradezu selbstverständlich hinstellt, ein starker Beweis für die Schärfe seines Denkens und für sein stetes Streben nach wirklicher Strenge.

Aus dem Jahre 1835 stammt wieder eine lange Abhandlung über unendliche Reihen. Ihr Titel lautet: „Ein Verfahren sich von der Konvergenz unendlicher Reihen zu überzeugen u. s. w.", gemeint ist damit das Verfahren, das Lobatschefskij schon in seiner Algebra angegeben hatte. Ich übersetze seine Darstellung des Verfahrens auf den Seiten 214—216 der Abhandlung:

„Die positive Zahl $f(i)$ möge irgend eine Funktion der ganzen [214 Zahl i darstellen und zugleich jedes Glied der unendlichen Reihe:

$$(1) \qquad S = \sum_1^\infty f(i),$$

die entsteht, wenn wir die Werthe von $f(i)$ addiren, indem wir an die Stelle von i der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3 und so weiter bis ins Unendliche setzen.

„Die Funktion $f(i)$ können wir wieder als den Werth einer unendlichen Reihe annehmen

$$(2)\qquad f(i) = \Sigma l \,.\, 2^{a-\lambda} \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \infty, \end{cases}$$

die durch Entwickelung nach Potenzen von 2 entsteht, so dass hier a für alle Glieder konstant ist, λ entweder null oder eine ganze positive Zahl, $l = 1$ für $\lambda = 0$ und sodann für jedes andre λ entweder: $l = 0$ oder: $l = 1$. Setzen wir diesen Werth (2) der Funktion $f(i)$ in die Gleichung (1) ein, so müssen wir erhalten:

$$S = \Sigma L \,.\, 2^{a-\lambda} \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \infty \end{cases}$$

mit ganzen positiven Zahlen L. Es sei jetzt μ eine solche ganze [215 Zahl, dass:

$$(3)\qquad f(\mu) \geqq 2^{a-\lambda} \quad f(\mu + 1) \leqq 2^{a-\lambda}.$$

Danach ist $L \leqq \mu$ und folglich:

$$(4)\qquad S < \Sigma \mu \,.\, 2^{a-\lambda} \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \infty. \end{cases}$$

„Die Bedingungen (3) dienen zur Bestimmung der Gränze, über die μ nicht hinauskommt und die in die Gleichung (4) eingesetzt zugleich die Gränze für den Werth der Reihe selbst bestimmt, wenigstens jedesmal dann, wenn in dieser Form die Summation möglich ist. An Beispielen wird dieses Verfahren deutlicher zu ersehen sein.

„Es sei:

$$f(i) = \frac{1}{i^n},$$

wo die Zahl n für alle Glieder der Reihe konstant ist. Wir müssen nun setzen:

$$\mu^n < 2^{\lambda - a}$$

und folglich: [216

$$\mu < 2^{\frac{\lambda - a}{n}}.$$

Auf Grund der Ungleichheit (4) finden wir ferner:

$$S < \Sigma 2^{\left(1 - \frac{1}{n}\right)(a-\lambda)} \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \infty \end{cases}$$

und hieraus für $n > 1$:

$$S < \frac{2^{a - \frac{1}{n} a}}{1 - 2^{\frac{1}{n} - 1}},$$

so dass in diesem Falle die unendliche Reihe:

$$S = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{i^n}$$

immer konvergirt, wie klein auch die Differenz $n - 1$ sein mag."

Die übrigen Beispiele unterdrücke ich und bemerke nur noch, dass das ganze Verfahren Lobatschefskij eigenthümlich sein dürfte, wenigstens scheint es weder vor noch nach ihm von irgend jemandem angewendet worden zu sein.

Im weiteren Verlaufe der Arbeit kommt der Verfasser in seiner Ausdrucksweise noch einmal auf den Unterschied zwischen Stetigkeit und Differentiirbarkeit zurück. Auf S. 297 sagt er:

„Bei jeder analytischen Funktion, wie hier $f(x)$, muss man die Aufmerksamkeit auf die Stetigkeit und die Ununterbrochenheit lenken. In meiner Arbeit „Ueber die Konvergenz der trigonometrischen Reihen" habe ich die Nothwendigkeit dieser Unterscheidung bewiesen, wobei ich die Funktion $f(x)$ stetig nannte, wenn ihre Zuwachse zugleich mit den Zuwachsen der Veränderlichen x bis auf Null abnehmen, dagegen ununterbrochen, wenn das Verhältniss zweier solcher Zuwachse bei deren Verkleinerung unmerklich in eine neue Funktion übergeht, die infolgedessen der Differentialquotient sein wird. Integrale müssen stets so in Intervalle zerlegt werden, dass die Elemente unter jedem einzelnen Integralzeichen die Stetigkeit und Ununterbrochenheit bewahren."

Man sieht hieraus von Neuem, welche grosse Wichtigkeit Lobatschefskij der Sache beilegte.

Von dem übrigen Inhalte der Abhandlung wollen wir nur eine Stelle erwähnen, an der auch Lobatschefskij einem damals weit verbreiteten Irrthume unterlag. Auf S. 233 ff. behauptet er nämlich: Wenn $F(x)$ nur für $x = f(n)$ verschwindet, wo $f(n)$ für $n = 1, 2, 3 \ldots$ verschiedene Werthe liefert, so ist:

$$F(x) = A\left(1 - \frac{x}{f(1)}\right)\left(1 - \frac{x}{f(2)}\right)\cdots,$$

sobald auch die Konstante A diese Gleichung für irgend ein x erfüllt und sobald das Produkt aus unendlich vielen Faktoren sich einem bestimmten Werthe nähert, wenn ein Faktor nach dem andern zugefügt wird. Er scheint aber, wie wir sehen werden, die Unrichtigkeit dieser Behauptung später erkannt zu haben.

Die 1841 erschienene deutsch geschriebene Abhandlung „Ueber die Konvergenz der unendlichen Reihen“ ist deshalb von Interesse, weil Lobatschefskij sie benutzt hat, um gewisse Entwickelungen seines Lehrbuchs der Algebra noch einmal zu wiederholen. Er sagt ausdrücklich, dass er die Untersuchung der Konvergenz unendlicher Reihen, die Einführung der Exponentialfunktion, der Logarithmen, der trigonometrischen Funktionen und der allgemeinen Potenz hier ebenso dargestellt habe, wie in seinem Lehrbuche und dass er diese Dinge in das Lehrbuch deshalb aufgenommen habe, „um diesem Theile der Mathematik nicht den wesentlichen Nutzen zu rauben, welcher von den trigonometrischen Functionen und der Zerlegung in unendliche Reihen gezogen werden kann, und um den Berechnungen mit Hülfe imaginärer Grössen eine feste Grundlage zu geben“. Ebenso wiederholt er Einiges aus der Arbeit über die trigonometrischen Reihen. Aber auch Neues fügt er hinzu, und da ist besonders eine Stelle beachtenswerth. Er sagt nämlich: „Die Zerlegung der trigonometrischen und Exponential-Functionen kann bis jetzt in ihrer Demonstration nicht als vollkommen begründet angesehen werden.“ Darauf folgt dann ein allem Anscheine nach wirklich strenger Beweis dafür, dass die Funktion $\sin x$ in der That durch das bekannte unendliche Produkt dargestellt wird. Er scheint also damals den Irrthum, den er 1835 begangen hatte, durchschaut zu haben.

Von den drei bisher nicht besprochenen Abhandlungen Lobatschefskijs ist mir nur noch eine bekannt, die von 1852, über bestimmte Integrale. Er betrachtet darin unter anderm ein Integral von der Gestalt:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \sin x \,.\, f(x),$$

wo $f(x)$ den Bedingungen:

$$f(-x) = f(x), \quad f(x+\pi) = f(x)$$

genügt, und bringt es auf die Form:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{(-1)^i \,.\, dx \,.\, \sin x}{i\pi + x} f(x),$$

woraus er schliesst, dass es den Werth:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \,.\, f(x)$$

besitzt. Ausserdem beschäftigt er sich zum Beispiele auch noch mit Untersuchungen über die Gammafunktion.

Kapitel XI.

Lobatschefskijs Werke vergessen. Späte Anerkennung seiner Leistungen. Gegenwart.

Als Lobatschefskij starb, war er weiter als jemals davon entfernt, seine geometrischen Entdeckungen anerkannt zu sehen. Ausserhalb Russlands waren diese so gut wie unbekannt: nur sehr wenige Eingeweihte wussten etwas davon, vermuthlich fast nur solche, die mittelbar oder unmittelbar durch Gauss von ihrem Vorhandensein unterrichtet waren; Gauss selbst war schon todt. In Russland kümmerte sich niemand darum, sogar in Kasan fand sich niemand, der in der von Lobatschefskij eingeschlagenen Richtung weiter gearbeitet hätte, keiner seiner Schüler trat für die Wahrheit ein, für die jener zwanzig Jahre lang gekämpft, die er in seinem wissenschaftlichen Testamente, der Pangeometrie, noch einmal seinen Zeitgenossen ans Herz gelegt hatte. Genau ebenso erging es den Untersuchungen seines grossen Nebenbuhlers J. Bolyai, auch sie schienen für die Welt verloren zu sein. Als ob die neue Geometrie niemals entdeckt worden wäre, kamen wie früher alljährlich neue Versuche zum Vorscheine, das Euklidische Parallelenaxiom zu beweisen. Freilich ist gerade das auch heutzutage noch nicht anders geworden.

Unter diesen Umständen war keine Möglichkeit vorhanden, dass die Arbeiten Lobatschefskijs und J. Bolyais auch nur den geringsten Einfluss auf die Entwickelung der Geometrie hätten ausüben können. Ganz unabhängig von ihnen entwickelte sich eine andre, noch allgemeinere Geometrie, die projektive Geometrie oder Geometrie der Lage, deren Anfänge zeitlich sogar vor den Untersuchungen Lobatschefskijs und Bolyais liegen und deren Geschichte an die Namen Poncelet, Möbius, Steiner, v. Staudt, Chasles geknüpft ist. Unabhängig von ihnen zeigte Riemann schon 1854 in seiner Habilitationsrede, die allerdings erst dreizehn Jahre später bekannt geworden ist, dass ausser der Euklidischen sogar zwei Geometrieen möglich sind, eine, die nichts andres ist als die Lobaschefskij-Bolyaische, und eine, die jetzt nach ihm benannt wird, in der die Gerade eine endliche Länge hat und die Winkelsumme im Dreiecke grösser ist als zwei Rechte. Endlich gab Cayley 1859, ohne von Lobatschefskij, J. Bolyai und Riemann etwas zu wissen, ein allgemeines Verfahren an, in die projektive Geometrie metrische Be-

ziehungen einzuführen: er ahnte damals noch nicht, dass seine projektive Massbestimmung geradezu das Wesen der nichteuklidischen Geometrie aufdeckte.

Da begann Anfang der sechziger Jahre der Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher zu erscheinen. Der zweite 1860 herausgekommene Band zeigte der überraschten Welt, dass auch Gauss und zwar schon sehr früh sich mit der Parallelentheorie beschäftigt und die Möglichkeit einer Nicht-Euklidischen Geometrie — so nannte er sie selbst — erkannt hatte. Im Jahre 1863 erschien dann der fünfte Band mit einem Briefe von 1846, in dem Gauss seinen Freund Schumacher auf Lobatschefskijs „Geometrische Untersuchungen“ hinweist und sagt: „Sie wissen, dass ich schon seit 54 Jahren (seit 1792) dieselbe Ueberzeugung habe (mit einer gewissen späteren Erweiterung, deren ich hier nicht erwähnen will). Materiell für mich Neues habe ich also im Lobatschefsky'schen Werke nicht gefunden, aber die Entwickelung ist auf anderem Wege gemacht, als ich selbst eingeschlagen habe, und zwar von Lobatschefsky auf eine meisterhafte Art in ächt geometrischem Geiste. Ich glaube Sie auf das Buch aufmerksam machen zu müssen, welches Ihnen gewiss ganz exquisiten Genuss gewähren wird.“

Nachdem so die Autorität von Gauss für die Berechtigung einer nichteuklidischen Geometrie und für die „Geometrischen Untersuchungen“ Lobatschefskijs eingetreten war, konnte diese Geometrie nicht wieder von der Tagesordnung verschwinden, und zugleich war der Name Lobatschefskijs der Vergessenheit entrissen. Es kann nicht meine Aufgabe sein, die umfangreiche Literatur, die seitdem über die nichteuklidische Geometrie und über die Grundlagen der Geometrie entstanden ist, auch nur aufzuzählen, geschweige denn zu besprechen, ich nenne daher neben Riemann, dessen Rede ja erst 1867, nach seinem Tode, gedruckt worden ist, nur noch die Namen: Beltrami, Helmholtz, Felix Klein, Sophus Lie und verzichte darauf, auch nur anzudeuten, was diese Männer im Einzelnen für die nichteuklidische Geometrie geleistet haben; ausserdem darf ich in dieser Beziehung auf das zusammenfassende Werk Killings verweisen: „Einführung in die Grundlagen der Geometrie“, das jetzt in zwei Bänden abgeschlossen vorliegt (1893 und 1898). Meine Aufgabe erblicke ich vielmehr jetzt darin, wenigstens in grossen Zügen zu schildern, was seitdem geschehen ist, um den Leistungen Lobatschefskijs zu der gebührenden Anerkennung zu verhelfen.

Allem Anscheine nach ist es Baltzer gewesen, der zuerst nachdrücklich und mit Erfolg für das Bekanntwerden der Untersuchungen

Lobatschefskijs gewirkt hat. In der 1867 erschienenen zweiten Auflage des zweiten Bandes seiner Elemente der Mathematik wies er auf die von Lobatschefskij und J. Bolyai entdeckte Geometrie hin. Vorher hatte er schon Hoüel brieflich darauf aufmerksam gemacht, und dieser nahm sich der Sache mit grossem Eifer an. Hoüel veröffentlichte 1866 und 1868 französische Uebersetzungen der „Geometrischen Untersuchungen“ und des Bolyaischen Appendix. Auf seine Veranlassung gab Battaglini 1867 und 1868 italienische Uebersetzungen der „Pangeometrie“ und des Appendix heraus. Namentlich aber wendete sich Hoüel schon 1867 nach Kasan und suchte dort das Andenken Lobatschefskijs der Vergessenheit zu entreissen. Und nicht vergebens. Im Oktober 1867 fasste die physiko-mathematische Fakultät der Universität Kasan den Beschluss, eine Sammlung der geometrischen Werke Lobatschefskijs herauszugeben. Es kamen zwar allerhand Hindernisse dazwischen, so dass der erste, die russisch geschriebenen Arbeiten enthaltende Band erst 1883 erschienen ist und der zweite mit den deutsch oder französisch geschriebenen erst 1886 — aber der Anstoss war gegeben, man war sich endlich wenigstens in Kasan bewusst geworden, dass man in Lobatschefskij einen Mathematiker besessen hatte, auf den man stolz sein konnte.

Nun war die Bahn gebrochen. Die Namen Lobatschefskij und Bolyai fingen an, allgemein bekannt zu werden; doch ist nicht zu leugnen, dass die Kenntniss ihrer Werke wenigstens in Deutschland heute noch auf einen verhältnissmässig engen Kreis von Mathematikern beschränkt ist. Bei J. Bolyai liegt das hauptsächlich an der nicht geringen geistigen Anstrengung, die das Studium seines Appendix erfordert, der überdies noch nicht einmal in deutscher Uebersetzung erschienen ist; bei Lobatschefskij liegt es mit daran, dass gerade seine wichtigsten Schriften bisher nur dem zugänglich waren, der des Russischen mächtig ist. Auch die Versuche, die Frischauf 1872 und 1876 in zwei kleinen Schriften gemacht hat, die Geometrie Bolyais und Lobatschefskijs für das mathematische Publikum zu bearbeiten, haben daran nicht viel ändern können. Dagegen sind die französischen Uebersetzungen, die Hoüel von den „Geometrischen Untersuchungen“ und dem „Appendix“ herausgegeben hat, und die englischen Uebersetzungen Halsteds, nach der Zahl ihrer Auflagen zu urteilen, ziemlich verbreitet.

Inzwischen nahte das Jahr 1893 heran und damit Lobatschéfskijs hundertjähriger Geburtstag. Da zeigte sich doch, dass Lobatschefskij der mathematischen Welt jetzt mehr war, als ein bloser Name. Die Physiko-mathematische Gesellschaft an der Universität Kasan sah es

als eine Ehrenpflicht an, für eine würdige Feier des Tages zu sorgen; Dank ihren Bemühungen vereinigten sich die ersten Mathematiker der Gegenwart, um öffentlich zu einer Sammlung aufzufordern, von deren Ertrage man in Kasan ein doppeltes Denkmal für Lobatschefskij errichten wollte: eines in Erz, das vor der Universität Kasan stehend die Züge des grossen Mathematikers und einstigen Rektors den Nachkommen vor die Augen führen sollte, eines in Gestalt einer Stiftung, aus der von Zeit zu Zeit Preise für hervorragende Leistungen auf dem Gebiete der Mathematik verliehen werden sollten, auf dem Lobatschefskij so erfolgreich gearbeitet hatte. Von allen Seiten, aus allen Ländern liefen die Beiträge ein, und als man am 22. Oktober (3. November) 1893 in feierlicher Sitzung der Universität Kasan den hundertsten Geburtstag Lobatschefskijs festlich beging, wobei Wassiljef als Vorsitzender der Physiko-mathematischen Gesellschaft die Festrede hielt, da konnte dieser der Versammlung berichten, dass die Ausführung jenes Planes durch den über Erwarten günstigen Ausfall der Sammlung gesichert sei.

Eben die Kasaner Feier des hundertsten Geburtstages hat ausserordentlich dazu beigetragen, den Namen Lobatschefskijs in weiten Kreisen bekannt zu machen, namentlich in Russland selbst, wo man vielfach geradezu überrascht war, dass ein solcher Mann in seinem Vaterlande so lange hatte unbekannt bleiben können.

Seitdem ist nicht blos das eherne Denkmal Lobatschefskijs am 1. (13.) September 1896 enthüllt worden, sondern es hat auch am 22. Oktober (3. November) 1897 die Physiko-mathematische Gesellschaft zum ersten Male den Lobatschefskijpreis verliehen: unter neun Bewerbern hat Sophus Lie für die geometrischen Untersuchungen im dritten Bande seines Werkes über Transformationsgruppen den Preis davongetragen.

Nachweisungen

zu

Lobatschefskijs Leben und Schriften.

Die auf S. 237 eingeführten Abkürzungen werden hier wieder benutzt.

S. 349, Z. 3—5. Die Janischefskijsche Biographie hat den Titel: Историческая записка о жизни и дѣятельности Н. И. Лобачевскаго. Э. П. Янишевскаго (Istoritscheskaja sapiska o shisni i djejatjelnosti N. J. Lobatschefskawa. E. P. Janischefskawa). Kasan 1868, 59 SS. in 8⁰. Die Uebersetzung A. Potockis steht in dem Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni, und zwar in Bd. II, Rom 1869 auf S. 223—262 unter dem Titel: Notice historique sur la vie et les travaux de Nicolas Ivanovitch Lobatchefsky. Discours prononcé dans la séance solennelle de l'Université Impériale de Kazan, le 5./17. Novembre 1868. Die Nachrichten über Lobatschefskij, für die im Folgenden keine Quelle angegeben ist, sind fast durchweg dieser Biographie entnommen. Die betreffenden Stellen einzeln anzuführen, hätte keinen Zweck: ich verweise deshalb nur da auf Janischefskij, wo ich mich dessen Darstellung besonders eng angeschlossen habe; die Seitenzahlen beziehen sich dabei immer auf die Potockische Uebersetzung.

S. 349, Z. 5—8. Die Rede Wassiljefs ist am 22. Oktober (3. November) 1893 in Kasan gehalten und ebenda 1894 erschienen. Eine englische Uebersetzung hat G. B. Halsted 1894 in Austin, Texas veröffentlicht. Eine deutsche, durch Nachträge des Verfassers vermehrte Uebersetzung habe ich selbst im VII. Hefte der „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik" herausgegeben, das zugleich das Supplement zu dem Jahrgange 1895 der „Zeitschrift für Mathematik und Physik" bildet, s. da S. 207—244. Ich citire im Folgenden diese Uebersetzung kurz: Wassiljef.

S. 350, Z. 9, 8 v. u. In Kasan besitzt man mehrere eigenhändige Briefe Lobatschefskijs, die dieser an den Kurator der Universität, Mussin-Puschkin (s. S. 384 ff.), gerichtet hat (Mittheilung von Dr. Sinzof in Kasan und von Wassiljef). Das auf S. 399 erwähnte Dankschreiben Lobatschefskijs befindet sich mit andern Dankschreiben derselben Art zu einem Bande vereinigt auf der Göttinger Universitätsbibliothek.

Zu Kapitel I.

S. 351, Z. 6 und 10—13. Mittheilungen Wassiljefs.

S. 351, Z. 11 v. u. — 352, Z. 6. Janischefskij S. 225 f.

S. 352, Z. 13 f. und Z. 18—20. Mittheilungen Wassiljefs.

S. 352 f. Diese Nachrichten über Bartels sind der kurzen Selbstbiographie entnommen, die dieser in der Vorrede zu seinen „Vorlesungen über höhere Analysis“ mitgetheilt hat. Die Jahreszahl 1805, S. 352, Z. 4 v. u., verdanke ich Stäckel*), sie ist durch einen Brief von Gauss an Wolfgang Bolyai sicher gestellt. Am 2. September 1808 schreibt nämlich Gauss aus Göttingen: „Ein vieljähriger Freund von mir und mein erster Lehrer in der Mathematik, Bartels, der 9 Jahre in der Schweiz war nachher 1805—1807 in Braunschweig und jetzt Prof. der Mathematik in Kasan in Russland geworden ist, hat in jenen 2 Jahren jenes Werk [die Disquisitiones arithmeticae] auch fleissig studirt, und ist in die meisten Materien eingedrungen: vor kurzen habe ich den ersten Brief von ihm aus Kasan gehabt, worin er mir schreibt, dass auch unter seinen Zuhörern 2 sind die es mit Eifer studiren.“ S. den „Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bolyai. Mit Unterstützung der ungarischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von F. Schmidt und P. Stäckel“. Leipzig bei Teubner, 1898, S. 94. Ich citire fortan kurz: Briefwechsel G.-B.

S. 353, Z. 14, 13 v. u. Die Briefe von Bartels an Gauss befinden sich in Göttingen im Gaussarchive. Die Briefe von Gauss sind anscheinend nicht erhalten, da Bartels nach der Angabe O. Struves (vgl. S. 429) seine Korrespondenz nicht aufzubewahren pflegte.

S. 354, Z. 6—8. Es sind das die „Vorlesungen über mathematische Analysis von Dr. J. M. C. Bartels. Herausgegeben von F. G. W. Struve. Dorpat 1837“. In dem „Vorwort des Herausgebers“, vom August 1837, heisst es, dass das Werk mit Ausnahme des Anhanges schon im Jahre 1833 im Druck vollendet war und damals in einzelnen Exemplaren an mehrere Lehranstalten im Reiche, an die Schüler von Bartels und an einige wenige Freunde vertheilt wurde**). Dem Buchhandel sollte das Werk erst nach gänzlicher Vollendung übergeben werden. Während seiner letzten Krankheit habe Bartels seinen Schwiegersohn Struve mit der Herausgabe beauftragt, dieser habe aber von Band II nur die erste Vorlesung vollendet vorgefunden und diese daher als Anhang beigegeben. Das Werk sollte ausser dem, was es jetzt darbietet, noch Differentialrechnung, Integralrechnung, analytische Mechanik und Wahrscheinlichkeitsrechnung umfassen. Stäckel.

S. 355, Z. 6 und Z. 14. Die Zeitangaben nach Mittheilungen Wassiljefs. Ueber die merkwürdige Persönlichkeit Bronners findet man Näheres in der Allgemeinen Deutschen Biographie.

S. 355, Z. 19 v. u. — 356, Z. 12. Mittheilungen Wassiljefs.

S. 356, Z. 13 — 357, Z. 17. Janischefskij, S. 227 f.

S. 357, Z. 14—16. Mittheilung Wassiljefs. Dieser hat auch aus den

---

*) Im Folgenden sind die Notizen, die von Stäckel herrühren, jedesmal am Schlusse mit dessen Namen bezeichnet.

**) Hierdurch erklärt sich das Vorhandensein einzelner Exemplare, die die Bezeichnung Bd. I und die Jahreszahl 1833 tragen.

„Kasaner Nachrichten“ ermittelt, dass Lobatschefskij am 15. (27.) September 1811 als Magister vereidigt worden ist.

S. 357, Z. 18 v. u. — 358, Z. 2. Janischefskij S. 228 f. Nach einer Mittheilung Wassiljefs hatten die „Kasaner Nachrichten“ im April 1811 zu erscheinen begonnen und zwar zunächst als Privatunternehmen.

S. 358, Z. 3 — 8, s. G. A. I, S. II f.

S. 359, Z. 5 — 8, s. G. A. I, S. II f. und VI, Wassiljef S. 209.

S. 359, Z. 9 — 18. Man erinnere sich dessen, was Gauss in einem Briefe an W. Bolyai über Bartels sagt, s. S. 424, Z. 11 ff. Hier bei dieser algebraisch-zahlentheoretischen Arbeit liegt der durch Bartels vermittelte Einfluss Gaussens auf Lobatschefskij klar zu Tage, und dieser Einfluss ist so stark gewesen, dass Lobatschefskij auch später noch die damals begonnenen Untersuchungen fortgesetzt hat, vgl. S. 412. Dagegen ist es als sicher zu betrachten, dass Gauss auf Lobatschefskijs spätere geometrische Untersuchungen keinen Einfluss ausgeübt hat, der irgendwie von Bedeutung wäre, vgl. S. 378 — 382.

S. 359, Z. 19 f. Mittheilung Wassiljefs.

S. 359, Z. 9 — 7 v. u. In Nr. 21, 6. Sept. 1811; nach den G. A. I, S. V die erste Stelle, an der man seinem Namen im Drucke begegnet. Von den Hülfsmitteln, mit denen diese astronomischen Beobachtungen angestellt werden mussten, kann man sich eine Vorstellung machen, wenn man liest, was Littrow noch vier Jahre später, am 21. November 1815, in einem Briefe schreibt, den er von Kasan aus an den Direktor der Ofener Sternwarte, Pasquich, richtete und in dem er die Berufung nach Ofen annehmen zu wollen erklärte. Die bemerkenswerthesten Stellen dieses Briefes sind abgedruckt in dem Aufsatze von A. Heller: „Die St. Gerardsberger Sternwarte zu Ofen“ im 2. Bande der „Literarischen Berichte aus Ungarn“, Buda-Pest 1878, und zwar schreibt Littrow da unter Anderm: „Was meine astronomische Lage hier betrifft, so schäme ich mich, sie Ihnen zu beschreiben. Nach einem fünfjährigen Betteln erhielt ich endlich ein hölzernes Gartenhaus von etwa 12 Schuh ins Gevierte und einen 16-zölligen Multiplicationskreis von Baumann nebst einer Secundenpendeluhr, die aber auch schlägt und die Monatstage zeigt. Da jenes Häuschen ganz und gar nichts taugte, so habe ich dies Instrument sammt der Uhr in einem meiner Zimmer, dessen Fenster ich dazu einrichten liess, aufgestellt und so die Breitenbeobachtungen gemacht, die ich Ihnen unten der Sonderbarkeit wegen beilege. Jenes Gartenhäuschen heisst übrigens die kaiserliche Universitäts-Sternwarte und ich wurde von oben aufgefordert, eine günstige Nachricht davon in das B[odesche] Jahrbuch einzurücken. Obschon es auf diese Art mit der practischen Astronomie aller meiner Bemühungen ungeachtet nicht fortwollte, so ging es doch auch schlecht genug mit der theoretischen, da unsere Bibliothek weder irgend die Memoiren einer Academie, noch sonst auch nur eines der neueren mathematischen Werke enthält und man jedes Blatt, was man hier lesen will, bezahlen muss, was bei der ungeheuern Entfernung und dem ungeregelten Zustande des russischen Buchhandels äusserst kostspielig ist.“ Er berichtet ferner, er habe sich einen $1\frac{1}{2}$-füssigen Dollond verschafft und an diesem den Kreis des Diaphragmas unbrauchbar gefunden, ein Kasaner „sogenannter“ Mechaniker habe den Kreis nicht verbessern können, weil er keine Drechselbank besass

und weil dieses einfache nöthige Instrument in der ganzen Stadt nicht zu finden war. „Und doch nennt man Kasan die dritte Stadt des Reiches.“ Ich verdanke die Kenntniss dieser Briefstellen Herrn Baumeister Franz Schmidt in Buda-Pest.

S. 359, Z. 6—2 v. u. Wassiljef S. 210.

Zu Kapitel II.

S. 360 f. Janischefskij S. 229—233.

S. 361, Z. 7—3 v. u. Die Zeitangaben nach Mittheilungen Wassiljefs.

S. 362, Z. 7—11. Nach den G. A. I, S. VII. Chomprés Uebersetzung der „Trigonometria piana e sferica“ Cagnolis war 1808 in zweiter Auflage in Paris erschienen.

S. 362, Z. 15—363, Z. 5. Wassiljef S. 239 f. Die erste öffentliche Mittheilung über dieses „Kollegienheft“ hat Wassiljef im September 1894 auf der Wiener Naturforscherversammlung gemacht, s. den Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung Bd. IV, für 1894—95, Berlin 1897, S. 88.

Zu Kapitel III.

S. 363, Z. 5—3 v. u. Genaueres über Magnizkijs ganzes Verfahren findet man bei Janischefskij S. 235—246, sowie in dem Buche: Изслѣдованія и статьи по русской литературѣ и просвѣщенію М. И. Сухомлинова (Untersuchungen und Arbeiten über die russische Literatur und Bildung, von M. J. Suchomlinof), Petersburg 1889 bei Suworin.

S. 364, Z. 14, 13 v. u. Es scheint nicht, dass nach dieser Zeit noch direkte Beziehungen zwischen Littrow und Lobatschefskij bestanden haben. Stäckel hat in Wien den handschriftlichen Nachlass Littrows eingesehen, der sich im Besitze einer Enkelin Littrows, der Frau Professor Ella Edlen v. Lang, geb. v. Littrow, befindet. In einer Art Tagebuch, das Littrow geführt hat, hat dieser bemerkt, dass er während seines Aufenthalts in Kasan (1810—1816) Lobatschefskij verschiedene Bücher geliehen habe, so Lehrbücher der Astronomie von Schubert und Laplace, die Geodäsie von Puissant, Schriften von Lessing und Diderot. In demselben Tagebuche hat Littrow auch den Inhalt der von ihm abgeschickten Briefe aufgezeichnet, doch kommen keine Briefe an Lobatschefskij vor, sondern nur solche an dessen Kollegen Simonof, die meist astronomische Dinge betreffen; einmal, im Jahre 1816, wird auch Lobatschefskij erwähnt und zwar als „Günstling“ Saltykofs, des Kurators der Universität. Stäckel.

S. 365, Z. 12 ff. Hauptsächlich nach Mittheilungen Wassiljefs, zum Theile auch nach Janischefskij S. 247. Wie ausgedehnt die Lehrthätigkeit Lobatschefskijs damals war, sieht man am deutlichsten aus dem auf ihn bezüglichen Theile des Programms über die Vorlesungen, die vom 17. August 1824 bis zum 28. Juni 1825 an der Kaiserlichen Universität Kasan gehalten werden sollten. Wassiljef theilt die Stelle des Programms vollständig mit (S. 228 der deutschen Uebersetzung), und ich kann mir nicht versagen, sie auch hier zu wiederholen:

„Nikolaj Lobatschefskij, Dekan der physiko-mathematischen Abtheilung, ordentlicher Professor der reinen Mathematik, kündigt an

a) Aus dem Gebiete der reinen Mathematik für die Studenten der ersten Abtheilung Folgendes: Ueber die Eigenschaften der ganzen Zahlen, über imaginäre Potenzen, über die Wurzeln der Gleichungen, Elemente der Geometrie, ebene und sphärische Trigonometrie nach eigenen Heften; für die Studenten der zweiten Abtheilung: Analytische Geometrie, Differenzenrechnung, Anfangsgründe der Differentialrechnung nach dem Lehrbuche von Lacroix; für die Studenten der dritten Abtheilung: Integral- und Variationsrechnung, Anwendung der Analysis auf Geometrie, die ersten beiden nach Lacroix, die letztere nach Monge.

b) Aus dem Gebiete der Physik für die Studenten der ersten Abtheilung: Grundlagen der Physik, die Untersuchungsmethoden in dieser Wissenschaft, über die anziehenden und die abstossenden Kräfte, die Anschauungen der Physiker über die Körper, die Ausdehnung der Körper durch die Wärme, über die Elasticität der Körper und über die Verdampfung der Flüssigkeiten. Für die Studenten der zweiten und dritten Abtheilung: Ueber Elektricität, Magnetismus, Licht und Wärme, wobei er in seinem Unterrichte das Werk Biots zu Grunde legt: Traité complet de Physique, zugleich mit Benutzung andrer Schriftsteller.

c) Aus dem Gebiete der Astronomie wird er den Studenten der dritten Abtheilung sphärische und theoretische Astronomie anbieten nach Anleitung der Werke von Delambre."

Der Rede Wassiljefs entnehme ich noch, dass Lobatschefskij 1826 — 27 ausser den Vorlesungen über reine Mathematik noch Statik und Mechanik der festen und der flüssigen Körper nach Lagrange und Poisson vortrug, sowie mathematische Physik nach Fourier, Laplace, Poisson und Fresnel.

S. 366, Z. 4 — 8. Janischefskij S. 247 f.

S. 366, Z. 11 — 1 v. u. Ebenda S. 249 — 251.

S. 367, Z. 8 — 27. Ebenda S. 248.

Zu Kapitel IV.

S. 368, Z. 1 — 31. Wassiljef S. 220.

S. 370, Z. 19 — 10 v. u. Janischefskij S. 249.

Zu Kapitel V.

S. 371, Z. 19 — 14 v. u. Wassiljef S. 221.

Zu Kapitel VI.

Ueber die Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie vgl. man das von Stäckel und mir herausgegebene Buch: „Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss", Leipzig 1895, das ich wieder kurz mit: P.Th. bezeichne. Ergänzungen dazu enthält unsre Abhandlung: „Gauss, die beiden Bolyai und die nichteuklidische Geometrie", Math. Ann. Bd. 49, S. 149 ff., 1897, in der auch alle mathematisch interessanten Stellen aus dem Briefwechsel zwischen Gauss und W. Bolyai (vgl. S. 424, Z. 18 ff.) zusammengestellt sind. Uebrigens hatte Stäckel diese Stellen schon vorher in den Göttinger Nachrichten, Jahrgang 1897, S. 1 ff. veröffentlicht.

S. 374, Z. 17 — 33. Vgl. P. Th. S. 215 — 235. Der im Texte an-

geführte Brief war an Taurinus gerichtet und steht vollständig P. Th. S. 249 f. Ein Bruchstück aus einem noch älteren Briefe an Gerling, vom Jahre 1819, findet man ebenda S. 246.

S. 374, Z. 8 v. u. — 375, Z. 3. Vgl. P. Th. S. 243—245. In einem an Gauss gerichteten Briefe vom 26. Februar 1844 erzählt Gerling, dass Schweikart seine Entdeckung schon in Charkof gemacht habe; dort war aber Schweikart von 1812—1816 gewesen, erst 1816 kam er nach Marburg. Stäckel.

S. 375, Z. 4 v. o. — 4 v. u. Vgl. P. Th. S. 246—283.

S. 375, Z. 3 v. u. — 376, Z. 13. Vgl. Math. Ann. Bd. 49, S. 149 ff. und den Briefwechsel G.-B.

S. 376, Z. 12 v. u. — 377, Z. 14 v. u. Vgl. P. Th. S. 31—136 und 137—208.

S. 378, Z. 4—6. Sehr deutlich zeigt das ein im Gaussarchive befindlicher Brief von Taurinus an Gauss, datirt Coeln a. Rh. den 29. Dec. 1829, es heisst darin: „Ich darf nun hinzufügen, dass ich das ganze Problem eigentlich schon von Anfang an gewissermassen durchschaut habe: denn sobald ich bemerkt hatte, dass die Annahme einer Winkelsumme von $> 180^0$, consequent verfolgt, auf eine sphärische Geometrie führt, war es mein erster Gedanke, dass dem entgegengesetzten Falle auch eine Bedeutung gegeben werden könne, und ich vermuthete sogleich, dass diese Hypothese mit der wechselseitigen Beziehung zwischen Kreis-Bogen und Logarithmen zusammenhängen müsste. Sie werden mir verzeihen, wenn ich dem Drange, mir so wichtig und interessant scheinende Wahrheiten, soweit ich sie mit Recht für mein Eigenthum halten zu dürfen glaubte, der Welt nicht vorzuenthalten, nicht widerstand. Der Erfolg bewies mir, dass Ihre Autorität dazu gehört, ihnen Anerkennung zu verschaffen, . . .". Taurinus denkt hierbei an seine 1826 erschienenen: Geometriae prima Elementa. Stäckel.

S. 378, Z. 10—13. In seinem kleinen Buche: „Kurzer Grundriss eines Versuchs u. s. w." Marós-Vasárhely 1851 spricht W. Bolyai mit hoher Anerkennung von den 1840 erschienenen „Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien", wohl der einzigen Schrift Lobatschefskijs, die er und sein Sohn Johann kennen gelernt haben. In Johanns deutschen Aufzeichnungen finden sich ebenfalls, wie Stäckel bemerkt hat, verschiedene Hinweise auf Lobatschefskij, namentlich aber enthält der magyarisch geschriebene Theil von J. Bolyais handschriftlichem Nachlasse eine sehr umfangreiche Kritik der „Geometrischen Untersuchungen" und ausführliche Auseinandersetzungen über deren Verhältniss zum „Appendix". (Nach Mittheilungen von Suták in Buda-Pest, die ich dem Baumeister F. Schmidt verdanke.)

S. 378, Z. 14—19. Die Vermuthung, dass Gauss durch Bartels die geometrischen Untersuchungen Lobatschefskijs angeregt haben könnte; ist bei verschiedenen Gelegenheiten ausgesprochen worden, so in den Vorreden zu den G. A., I, S. I f. und II, S. 4, ferner auch von Wassiljef S. 211 f. Besonders F. Klein ist mit grossem Nachdrucke für diese Vermuthung eingetreten, die er als ihm überkommene „Göttinger Tradition" bezeichnet, s. dessen „Nichteuklidische Geometrie I", autographirte Vorlesung, gehalten 1889—90, 1. Abdruck, Göttingen 1892, S. 175 f., 2. Abdruck von 1893, S. 174 f. Jedenfalls findet sich aber in Gaussens Briefen nirgends

ein Anhalt für diese Tradition, an keiner Stelle dieser Briefe findet sich auch nur die leiseste Andeutung, dass Gauss die Entdeckungen Lobatschefskijs und J. Bolyais auf eine mittelbar oder unmittelbar von ihm ausgehende Anregung zurückführte, im Gegentheile zeigen die Briefe (vgl. S. 432 f. und Math. Ann. 49, S. 162, Briefwechsel G.-B. S. 109), dass Gauss die Selbständigkeit beider durchaus anerkannte, genau so wie die Schweikarts, dessen Unabhängigkeit von Gauss keinem Zweifel unterliegt. Mit Stäckel bin ich darin einig, dass gerade dieser Umstand für die Beurteilung der ganzen Frage sehr ins Gewicht fällt.

S. 378, Z. 9 v. u. Diesen Ausdruck braucht schon Gauss in seinem Briefe an W. Bolyai vom 25. November 1804: „Du willst aber nicht mein leeres Lob, das auch gewissermaassen schon darum partheiisch scheinen könnte, weil dein Ideengang sehr viel mit dem meinigen Aehnliches hat, worauf ich ehemals die Lösung dieses Gordischen Knotens versuchte und vergebens bisher versuchte.“ Math. Ann. Bd. 49, S. 159, Briefwechsel G.-B. S. 81.

S. 379, Z. 10—19 und 18—11 v. u., s. Math. Ann. Bd. 49, S. 157, 159, Briefwechsel G.-B. S. 36 f., 81.

S. 379, Z. 4 v. u. — 380, Z. 5. Dieses Tagebuch befand sich bis vor Kurzem in dem Besitze der Frau Professor Peters in Königsberg i. Pr., es ist aber von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen erworben und dem Gaussarchive überwiesen worden.

Schumacher war im Winter 1808—1809 in Göttingen.

S. 380, Z. 17—5 v. u. Diese Briefe sind ebenfalls im Besitze des Gaussarchivs.

S. 380, Z. 4—2 v. u. Neben Kästner ist hier auch Pfaff in Helmstedt zu nennen. In einem Briefe an W. Bolyai vom 31. Oktober 1851 sagt Gerling, ein Lieblingsschüler von Gauss und später dessen vertrauter Freund: „Meine früheren Beschäftigungen mit der Parallelentheorie erwähne ich nicht, denn schon im Jahre 1810—1812 hatte ich bei Gauss, sowie früher 1809 bei J. F. Pfaff einsehen gelernt, wie alle bisherigen Versuche das Euklidische Axiom zu beweisen misslungen waren.“ Dieses und andre Bruchstücke aus dem Gerlingschen Briefe sind schon P. Th. S. 244 abgedruckt (vergl. auch P. Th. S. 215, Z. 9—12). Stäckel.

S. 381, Z. 19—30. Der Brief O. Struves, dem ich diese Mittheilungen entnehme, ist datirt: Karlsruhe, 1896, Jan. 31.

S. 383, Z. 14—12 v. u. Riemann hat seine berühmte Abhandlung: „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“ am 10. Juni 1854 als Habilitationsrede vor der Göttinger philosophischen Fakultät vorgetragen, und Gauss befand sich dabei unter den Zuhörern.

Man darf mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen, dass Gauss die nichteuklidische Geometrie, bei der die Winkelsumme des Dreiecks grösser ist als zwei Rechte, gemeint hat, als er 1846 in einem Briefe an Schumacher von „einer gewissen späteren Erweiterung“ schrieb; s. den Briefwechsel Gauss-Schumacher Bd. 5, S. 246 und P. Th. S. 235. Dagegen sagt er in einer Besprechung aus dem Jahre 1816 (P. Th. S. 223), dass „die Unmöglichkeit dieses Falles [wo ein Viereck mit drei rechten Winkeln einen vierten stumpfen Winkel hat] in aller Strenge bewiesen werden kann“. Vgl. auch Math. Ann. Bd. 49, S. 152.

Zu Kapitel VII.

S. 384, Z. 4—28. Janischefskij S. 252 f.

S. 384, Z. 6 v. u. — 385, Z. 23. Ebenda S. 254 f., 259 Anm.

S. 385, Z. 15 v. u. — 386, Z. 9. Ebenda S. 251 f.

S. 386, Z. 10 v. o. — 8 v. u. Ebenda S. 255 f.

S. 386, Z. 7 v. u. — 387, Z. 2 v. u. Ebenda S. 253 f., 240, Z. 1—8, 258, Z. 7—20.

S. 388, Z. 6—10. Die eigentliche Eröffnung der Universität hatte am 14. (26.) Februar 1805 stattgefunden, nachdem Kaiser Alexander I. die Bestätigungsurkunde am 5. (17.) November 1804 unterzeichnet hatte. Jetzt wird dieser letztere Tag gefeiert.

S. 388, Z. 15—19. Wassiljef S. 221—223. Da diese Proben zur Charakteristik Lobatschefskijs als Menschen beitragen, wiederhole ich sie hier.

Die Rede Lobatschefskijs beginnt mit einem Hinweise auf die Bedeutung der Erziehung:

„Ich stelle mir vor, in welchem Zustande sich ein Mensch befinden muss, der der menschlichen Gesellschaft entfremdet ganz dem Ermessen der wilden Natur überlassen ist. Sodann richte ich meine Gedanken auf einen Menschen, der inmitten der wohlgeordneten, gebildeten Bürgerschaft des letzten aufgeklärten Jahrhunderts durch tiefe Kenntnisse seinem Vaterlande zur Ehre und zum Ruhme gereicht. Welch ein Unterschied! Welcher unermessliche Abstand trennt den einen vom andern. Hervorgebracht hat diesen Unterschied die Erziehung. Sie beginnt von der Wiege an; zuerst wird sie durch die blose Nachahmung erworben, allmählich entwickeln sich Verstand, Gedächtniss, Einbildungskraft, Geschmack für das Schöne, es erwacht die Liebe zu sich selbst und zum Nächsten, die Liebe zum Ruhme, der Sinn für die Ehre, der Wunsch das Leben zu geniessen. Alle Fähigkeiten des Verstandes, alle Gaben, alle Leidenschaften, Alles das verwerthet die Erziehung und stellt es in den Dienst eines wohlgeordneten Ganzen, und der Mensch, als wäre er von Neuem geboren, zeigt sich als das Geschöpf in seiner Vollkommenheit." Aber die Erziehung darf die Leidenschaften des Menschen und die ihm angeborenen Begierden nicht unterdrücken und ausrotten: „Alles das muss bei ihm erhalten bleiben: sonst würden wir seine Natur verderben, ihr Gewalt anthun und sein Glück schädigen." „Es ist nichts gewöhnlicher, als über die Leidenschaften Klagen zu hören, aber wie richtig hat Mably*) gesagt: je stärker die Leidenschaften, um so nützlicher sind sie für die Gesellschaft; schädlich werden kann nur ihre Richtung."

„Aber die blose Verstandesbildung ist noch nicht der Abschluss der Erziehung. Während der Mensch seinen Verstand mit Kenntnissen bereichert, muss er auch noch verstehen lernen, das Leben zu geniessen. Ich meine damit die Bildung des Geschmacks. Leben heisst: empfinden — das Leben geniessen: unaufhörlich etwas Neues empfinden, was uns daran erinnert, dass wir leben. . . . Nichts hemmt den Strom des Lebens so sehr

---

*) [Gabriel Bonnot de Mably (1709—1785), französischer Philosoph, ein älterer Bruder Condillacs.]

wie die Unwissenheit; wie ein verödeter, geradliniger Weg begleitet sie das Leben von der Wiege bis zum Grabe. In den niedern Klassen erquicken noch die anstrengenden Arbeiten für des Lebens Nothdurft abwechselnd mit der Erholung den Geist des Landmanns, des Handwerkers. Ihr aber, deren Dasein ein ungerechtes Schicksal andern als eine schwere Last auferlegt hat, ihr, deren Geist abgestumpft, deren Gefühl erstickt ist, ihr geniesst das Leben nicht. Für euch ist die Natur todt, die Schönheiten der Poesie sind euch fremd, die Baukunst ihrer Reize und ihrer Herrlichkeiten entblöst, die Weltgeschichte gleichgültig. Ich tröste mich mit dem Gedanken, dass aus unsrer Universität derartige Erzeugnisse vegetabilischer Natur nicht hervorgehen werden; sie werden nicht einmal hierher kommen, wenn sie unglücklicherweise zu einem solchen Schicksale geboren sind. Sie werden nicht herkommen, wiederhole ich, denn hier weilt die Liebe zum Ruhme, das Gefühl für Ehre und inneres Verdienst."

„Die Natur, die den Menschen bei seiner Geburt so freigebig beschenkt hat, scheint noch nicht zufrieden gewesen zu sein und so hat sie einem jeden den Wunsch eingeflösst, die andern zu übertreffen, bekannt zu sein, ein Gegenstand der Bewunderung zu sein, berühmt zu werden, und auf diese Art hat sie dem Menschen die Pflicht auferlegt, selbst für seine Vervollkommnung zu sorgen. In unaufhörlicher Thätigkeit strebt der Geist, Ehrenbezeugungen zu erringen, sich emporzuheben und das ganze Menschengeschlecht schreitet von Vervollkommnung zu Vervollkommnung — und wo ist ein Ende abzusehen?"

„Wir wollen das Leben hochschätzen, solange es seine Würde nicht verliert. Mögen Vorbilder in der Geschichte, ein rechter Begriff von der Ehre, Liebe zum Vaterlande, die in jungen Jahren erweckt ist, bei Zeiten den Leidenschaften die edle Richtung und die Kraft geben, die uns erlauben, über die Schrecken des Todes zu siegen."

Indem er sich jetzt zur Moral als dem wichtigsten Gegenstande der Erziehung wendet, verweilt Lobatschefskij besonders bei der Liebe zum Nächsten: „Duclos*), Rochefoucauld, Knigge haben erklärt, auf welche Weise die Selbstliebe die versteckte Triebfeder aller Handlungen der Menschen in der Gesellschaft zu sein pflegt. Wer, frage ich, hat vollständig darzulegen verstanden, welche Pflichten aus der Liebe zum Nächsten entspringen?"

Dies die von Wassiljef mitgetheilten Proben.

S. 388, Z. 7 v. u. Brief von Gauss an Gerling vom 8. Februar 1844: „er scheint rector perpetuus der Universität zu sein". Vgl. S. 434, Z. 7.

S. 389, Z. 8 — 390, Z. 16. Janischefskij S. 256 f.

S. 390, Z. 17 v. o. — 5 v. u. Ebenda S. 258 f. Wassiljef S. 230. Der Tag des Brandes war der 24. August (5. September).

S. 391, Z. 3—7. Mittheilung Wassiljefs.

S. 391, Z. 16—18. Nach Wassiljef S. 229 Anm. las Lobatschefskij im Jahre 1833—34 mit Benutzung der Werke von Cousin, Lagrange und Lacroix für die Studenten des zweiten Kurses: Integration der Funktionen, für die des dritten Kurses: Integration der Differentialgleichungen mit einer Veränderlichen, und für die des vierten Kurses: Inte-

*) [Charles Pineau Duclos, 1704—1772, französischer Schriftsteller.]

gration der partiellen Differentialgleichungen und Variationsrechnung; diese Kurse behielt er bis zum Ende seiner Professorenthätigkeit bei.

S. 391, Z. 20—25. Wassiljef S. 229.

S. 391, Z. 9 v. u. — 392, Z. 9. Nach Mittheilungen Wassiljefs.

Zu Kapitel VIII.

S. 394, Z. 3—16. Vgl. hierzu S. 256, Z. 3—36.

S. 395, Z. 3—5. Einige Stellen aus der Vorrede bei Wassiljef S. 231.

S. 396, Z. 18—7 v. u. Man findet die Aeusserungen über jene Recension in den K. G. S. von 1835, Heft I, S. 5 und 78 f., in den G. A. I, S. 72 und 114.

S. 397, Z. 20—17 v. u. In der russisch geschriebenen „Imaginären Geometrie" von 1835 spricht Lobatschefskij von einer Abhandlung mit dem Titel „Géométrie imaginaire", die er nach Berlin an Herrn Crelle zur Aufnahme ins Journal geschickt habe, das kann keine andre als die 1837 erschienene sein; s. K. G. S. 1835, I, S. 87 und G. A. I, S. 119.

S. 397, Z. 5 v. u. Schon die „Neuen Anfangsgründe" mochten wenigstens bis zu einem gewissen Grade einem solchen Gefühle ihre Entstehung verdanken, vgl. S. 68, Z. 1—10.

S. 398, Z. 13—1 v. u. Der im Gaussarchive befindliche Brief an Encke ist datirt: Göttingen, 1. Februar 1841. Die ganze Stelle lautet im Zusammenhange:

„Ich fange an das Russische mit einiger Fertigkeit zu lesen, und finde dabei viel Vergnügen. H. Knorre hat mir eine kleine in russischer Sprache geschriebene Abhandlung von Lobatschefski (in Kasan) geschickt und dadurch so wie durch eine kleine Schrift über Parallellinien in deutscher Sprache (wovon eine höchst alberne Anzeige in Gersdorfs Repertorium steht) bin ich recht begierig geworden mehr von diesem scharfsinnigen Mathematiker zu lesen. Wie mir Knorre sagte, enthalten die (in russischer Sprache geschriebenen) Abhandlungen der Universität Kasan eine Menge Aufsätze von ihm."

Ich füge hierzu zwei Bruchstücke aus Briefen von Gauss an Gerling. Der eine, von Stäckel entdeckte, in den Göttinger Nachrichten von 1896, S. 2—3 veröffentlichte Brief ist datirt Göttingen den 4. Februar 1844. Auf eine Anfrage von Gerling theilt Gauss darin zunächst die ausführlichen Titel des Tentamens von W. Bolyai und des Appendix von J. Bolyai mit und fährt dann fort:

„Uebrigens hat in den letzten Decennien ein Russe (Lobatschefski, Staatsrath u. Prof. in Kasan) einen ähnlichen Weg eingeschlagen. Er nennt die Nicht-Euklidische die imaginäre Geometrie (wie Ihr ehemaliger Kollege*)   Astralgeometrie) und hat darüber in russischer Sprache viele sehr ausgedehnte Abhandlungen gegeben (meistens in den Записки казанскаго университета, Memoiren der Kasanschen Universität zum Theil auch in besondern Brochurn die ich, glaube ich alle besitze, aber ihre genauere Lectüre noch verschoben habe, bis ich mich einmahl mit Musse wieder in das Fach werfen kann, und das Lesen russischer Bücher mir

*) Der Name ist nicht ausgefüllt, gemeint ist Schweikart.

noch geläufiger ist als jetzt. Irre ich nicht, so ist auch ein Aufsatz des p. Lobatschefsky, vielleicht eine Uebersetzung aus den Записки in Crelles Journal, was ich aber in diesem Augenblicke nicht nachsehen kann.“

Der zweite Brief gehört zu der grossen Sammlung Gaussischer Briefe an Gerling, die im Gaussarchive enthalten ist, er ist eine Fortsetzung des ersten, stammt vom 8. Februar 1844, und es heisst darin:

„Lobatschefskis Aufsatz in Crelles Journal steht Band 17 pag. 295 ff. Ich finde, dass derselbe nur eine freie Uebersetzung des russischen Aufsatzes im Jahrgang 1835 der Gelehrten Schriften der Kasanschen Universität ist*), wo man eben da auch anstossen wird, wo dies in dem deutschen**) Aufsatze der Fall ist. In diesem stossen Sie an S. 296 Zeile 10 bei den Worten J'ai démontré etc. womit dem Leser der weiter nichts hat wie diesen Aufsatz wenig gedient ist. Eben so S. 303 oben J'ai prouvé ailleurs etc., wozu man dieselbe Bemerkung machen muss. Der frühere Aufsatz worauf sich dies zu beziehen scheint, wird wohl derselbe sein, der in einer Note des erwähnten Russischen Aufsatzes angeführt wird als***) stehend im Казанскомъ вѣстникѣ (Kasanschen Boten) für 1828 und 1829. Zugleich wird dabei bemerkt, dass eine sehr kränkende Kritik dieser Abhandlung in N 41 eines andern russischen Journals†) Сынъ отечества, Sohn des Vaterlandes von 1834 stehe, wogegen Lobatschefski eine Antikritik eingeschickt hat, die aber bis Anfang 1835 nicht aufgenommen sei.

„Mit diesen literarischen Notizen ist uns nur freilich auch wenig geholfen, da in Deutschland schwerlich ein Exemplar des Kasanschen Boten von 1828, 1829 zu finden sein möchte. Dagegen aber kann ich Ihnen den Titel einer andern Schrift nachweisen, die Sie ohne Zweifel sehr leicht durch den Buchhandel erhalten können, und die nur 4 Bogen stark ist.

„Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, Berlin 1840 in der Finckeschen Buchhandlung.

„Ich erinnere mich, in Gersdorfs Repertorium damals eine sehr wegwerfende Recension dieses Buches gesehen zu haben, die (nemlich die Recension) übrigens für jeden etwas kundigen Leser das Gepräge hatte von einem ganz unwissenden Menschen herzurühren. Seitdem ich Gelegenheit gehabt habe diese kleine Schrift selbst einzusehen, muss ich ein sehr vortheilhaftes Urtheil darüber fällen. Namentlich hat sie vielmehr Concinnität und Präcision, als die grösseren Aufsätze des Lobatschefski, die mehr einem verworrenen Walde gleichen, durch den es, ohne alle Bäume erst einzeln kennen gelernt zu haben, schwer ist, einen Durchgang und Uebersicht zu finden.

„Ueber die Crelle 17 p. 303 angeführte experimentelle Begrenzung habe ich aber nichts in der Schrift von 1840 gefunden und ich werde mich daher wohl entschliessen müssen, einmahl deswegen an H. Lobatschefsky selbst zu schreiben, dessen Aufnahme als Correspondent unserer Societät ich vor einem Jahre veranlasst habe. Vielleicht schickt er mir dann den Kasanschen Boten. Doch wäre es möglich dass sich in den

---

*) Vgl. jedoch hierzu S. 397, Z. 22—27 und 432, Z. 12—16.

**) Soll wohl heissen: in einer deutschen Zeitschrift erschienenen.

***) „Unter dem Titel Ueber die Anfänge oder Principe der Geometrie. (Gauss.)

†) „Wie ich vermuthe in Petersburg erscheinenden. (Gauss.)

folgenden Jahrgängen der Kasanschen gelehrten Schriften von 1836—1838, wo auch lange Aufsätze von Lobatschefsky stehen, etwas darüber findet. Ich besitze diese zwar habe aber bisher, aus dem in meinem vorigen Briefe erwähnten Grunde, mich bisher nicht näher mit ihnen bekannt gemacht.

„In seinem Danksagungsschreiben wegen Aufnahme in der Societät schrieb mir übrigens Lobatschefsky damals, dass seine vielen administrativen Geschäfte (er scheint rector perpetuus der Universität zu sein) ihn jetzt aus den wissenschaftlichen Arbeiten ganz herausgebracht hätten."

Zu diesen Briefstellen sind einzelne Erläuterungen nöthig.

Die zweimal erwähnte Recension der „Geometrischen Untersuchungen" steht in Gersdorfs „Repertorium der gesammten deutschen Literatur" in Bd. 25, dem dritten Bande des Jahrgangs 1840, und zwar auf S. 147 f. Dieses Repertorium erschien damals im Verlage von F. A. Brockhaus in Leipzig am 1. und 15. jedes Monats, das uns hier angehende Heft also wahrscheinlich am 15. Juli 1840. Die Recension selbst hat folgenden Wortlaut:

„Nach des Vfs. Behauptung kann man, ohne auf Widersprüche zu gerathen, annehmen, dass sich durch einen gegebenen Punct zu einer gegebenen graden Linie zwei nicht zusammenfallende Parallelen ziehen lassen (vgl. S. 10) und zwischen diesen beiden Parallelen sollen grade Linien durch denselben Punct gehen können, die die gegebene Grade nicht schneiden und doch nicht parallel zu ihr sind, obgleich sie in derselben Ebne liegen. Auf eine solche Grundlage will der Vf. unter dem Namen der „Imaginären Geometrie" eine eigne Wissenschaft gründen. Die Grundzüge derselben liegen in diesem Schriftchen vor, jedoch wird dieses Princip und der dadurch erklärliche Satz S. 21: „Je weiter Parallellinien auf der Seite ihres Parallelismus verlängert werden, desto mehr nähern sie sich einander", wohl hinreichend das Schriftchen charakterisiren, um den Ref. jeder weiteren Beurtheilung zu überheben."

Unterzeichnet ist die Recension mit „140" und es wäre recht erwünscht zu wissen, welcher Name sich hinter dieser Ziffer verbirgt, leider sind aber bis jetzt alle meine Versuche, das zu ermitteln, vergeblich gewesen. Erwähnt sei nur, dass auch noch in dem ganzen Jahrgange 1841 des Repertoriums Besprechungen mathematischer Schriften enthalten sind, die mit 140 unterzeichnet sind, vom Jahrgange 1842 ab tritt dagegen an die Stelle der 140 die ebenso räthselhafte Zahl 11.

Welches ist nun aber die „kleine in russischer Sprache geschriebene Abhandlung von Lobatschefski", die Gauss von Knorre geschickt bekommen hatte, und woher hatte Gauss die „Memoiren der Kasanschen Universität" und die „besondern Brochurn" erhalten, die er 1844 besass?

In der von Gauss hinterlassenen Bibliothek befinden sich zwei Exemplare*) der „Geometrischen Untersuchungen" und ausserdem folgende russische Schriften, die Arbeiten Lobatschefskijs enthalten: Erstens ein mit eigens dazu gedrucktem Titelblatte versehener Sonderabdruck der „Anwendung der

---

*) Das eine hatte sich Gauss wahrscheinlich kommen lassen, nachdem er durch die Recension in Gersdorfs Repertorium (s. S. 432 f.) auf das Schriftchen aufmerksam geworden war, das andre Exemplar hatte ihm später O. Struve zugeschickt.

imaginären Geometrie auf einige Integrale", die im 1. Hefte des Jahrgangs 1836 der Kasaner Gelehrten Schriften erschienen ist; zweitens eine beträchtliche Anzahl von einzelnen Heften dieser Gelehrten Schriften aus den Jahren 1835—41; endlich drittens zwei Hefte des Kasaner Boten aus dem Jahre 1830, enthaltend die beiden letzten Stücke der Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe", während die drei ersten Stücke dieser Abhandlung nur in einer sehr saubern Abschrift vorhanden sind.

Die „Kleine in russischer Sprache geschriebene Abhandlung" ist höchst wahrscheinlich die „Anwendung der imaginären Geometrie"; einzelne Randbemerkungen und ein darin liegender Zettel mit Notizen zeigen deutlich, dass Gauss in dieser Arbeit gelesen hat, es scheint ihm aber entgangen zu sein, dass auch sie aus den Kasaner Gelehrten Schriften stammt.

Die einzelnen Hefte aus den Kasaner Gelehrten Schriften, die Gauss besass, hat ihm O. Struve verschafft. Dieser sagt nämlich in seinem schon auf S. 381 und 429 erwähnten Briefe an mich: „Ende August 1844 besuchte ich Gauss zum letzten Mal und traf ihn bei der Lecture einer kleinen Lobatschewskischen Schrift, welche ihn, wie er sagte, sowohl wegen ihres Inhalts wie auch wegen der Russischen Sprache, die er damals eifrig betrieb, interessirte. Eine Folge unseres Geplauders war es dass ich Ende desselben Jahres eine Sammlung Lobatschewskischer Schriften, so viel ich deren in Petersburg auftreiben konnte, an Gauss sandte." Andrerseits schreibt Gauss selbst*) am 11. December 1846 an Wilhelm Struve: „Gleichermassen bin ich für die übrigen Zusendungen zu dem verbindlichsten Danke verpflichtet; für die russischen Sachen von Lobatschewsky wahrscheinlich zunächst Ihrem Herrn Sohne, gegen den ich vor einigen Jahren bei seinem Hiersein meinen Wunsch ausgesprochen hatte; ich lasse mich seinem freundlichen Andenken angelegentlichst empfehlen. Mit meiner russischen Sprachkenntniss werde ich wohl etwas zurückgekommen sein, da ich seit länger als einem Jahre nicht dazu habe kommen können, auch nur einen russischen Buchstaben anzusehen, ich hoffe jedoch in der ersten freien Zeit das Versäumte schnell nachzuhohlen, und werde dann der Lecture jener interessanten Aufsätze meine besondere Aufmerksamkeit widmen. Die kleine deutsche Schrift von Lobatschewsky besass ich schon vorher selbst." Hier stimmt allerdings die Zeitangabe O. Struves „August 1844" nicht mit der Thatsache, dass Gauss die betreffenden Schriften bereits im Februar 1844 besass; jener Besuch bei Gauss muss also in Wirklichkeit schon früher stattgefunden haben: wie wir nachher sehen werden, vermuthlich im August 1843.

Unerklärt bleibt nur, wie Gauss in den Besitz der Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe" gelangt ist, denn diese hatte er im Februar 1844 augenscheinlich noch nicht. Sollte er den Gedanken, an Lobatschefskij selbst zu schreiben, ausgeführt und von diesem den Kasaner Boten und die ergänzende Abschrift bekommen haben? Vielleicht wird sich mit der Zeit auch dieser Punkt noch aufklären.

Einige nicht unwichtige Ergänzungen zu dem bisher Mitgetheilten

---

*) Diese Briefstelle verdanke ich Stäckel, durch dessen Vermittelung O. Struve sechs an seinen Vater Wilhelm Struve gerichtete Briefe von Gauss der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften geschenkt hat.

liefert der Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher, namentlich giebt er über die Anfänge und den ursprünglichen Zweck der russischen Studien von Gauss Aufschluss und liefert auch noch die Möglichkeit festzustellen, wann der vorhin erwähnte Besuch O. Struves bei Gauss stattgefunden hat.

Am 17. Aug. 1839 schreibt Gauss von Göttingen: „Im Anfange des vorigen Frühjahrs hatte ich, Aneignung irgend einer neuen Fertigkeit als eine Art Verjüngung betrachtend, angefangen mich mit der russischen Sprache zu beschäftigen, . . ., und fand schon viel Interesse daran" (Briefwechsel III, 242). Er erwähnt ferner, dass er früher zu demselben Zwecke das Sanskrit angefangen, diesem aber keinen Geschmack abgewonnen habe und dass sein Studium des Russischen seit dem Mai 1839 durch gewisse Arbeiten fast ganz unterbrochen gewesen sei, bittet aber jetzt Schumacher um Besorgung russischer Bücher, da er es wieder anfangen wolle. Schumacher schickt ihm am 22. Aug. 1839 einen russischen Kalender und Gauss dankt dafür am 8. Sept. (Briefwechsel III, 247 und 269). Am 8. Aug. 1840 (Briefwechsel III, 394) berichtet Gauss, er besitze drei Bände der poetischen Werke von Puschkin, wünsche aber auch russische Prosalektüre zu haben, und bittet daher Schumacher, der nach Petersburg reisen will, ihm Romane mitzubringen. Am 7. Okt. 1840 schreibt Schumacher (III, 403) er habe die Werke von Bestúscheff gekauft und bringe als Geschenk Schuberts fünf Bände Memoiren des russischen Topographischen Bureaus mit. Gauss dankt ihm am 9. Okt. und 21. Dec. 1840 (III, 405 und 430). Am 29. Dec. 1841 (IV, 45) schreibt Gauss, ass er wenig zum Russischen komme. Am 13. Juni 1845 (V, 12) empfiehlt ihm Schumacher einen gewissen Bolotoff zur Aufklärung über die Aussprache des Russischen. Der Name Lobatschefskijs kommt in keiner dieser Briefstellen vor.

Mit Stäckel, dem ich die Zusammenstellung dieser Briefstellen verdanke, schliesse ich hieraus, dass der Wunsch, Lobatschefskĭjs russische Werke lesen zu können, nicht die ursprüngliche Veranlassung zu Gaussens russischen Studien gewesen ist. Ferner halten wir es für ziemlich sicher, dass Gauss am 8. Aug. 1840 die kleine von Knorre übersandte Abhandlung in russischer Sprache noch nicht besessen hat, denn sonst würde er sie gewiss erwähnt haben. Er wird diese also zwischen dem 8. Aug. 1840 und dem 1. Febr. 1841 erhalten haben.

O. Struve wird in zwei Briefen Schumachers erwähnt. Am 24. Juli 1843 (IV, 162) heisst es da: „Der junge Struve ist Sonnabend . . . nach Bonn gegangen, und kehrt über Göttingen, Gotha, Leipzig und Berlin zurück", und am 10. Aug. 1844 (IV, 281): „Der junge Struve und . . . wollen Sie gegen Ende dieses Monats in Göttingen besuchen. Struve kennen Sie . . . ." Da Gauss im Febr. 1844 die von Struve übersandten Schriften schon besass, wird also der auf S. 435, Z. 15 f. erwähnte Besuch O. Struves bei Gauss der erste von diesen beiden Besuchen gewesen sein.

Ueber Knorre endlich vgl. man S. 437 f.

S. 399, Z. 5—9. Nach einer Mittheilung F. Kleins (vgl. Gött. Nachr. 1896, S. 4) hat Gauss am 23. November 1842 den Kaiserlich Russischen Staatsrath Nicolaus Lobatschefski zum Korrespondenten der Göttinger Societät vorgeschlagen, mit der Begründung, dieser sei einer der aus-

gezeichnetsten Mathematiker des russischen Reiches. Dass Gauss die Uebersendung des Diploms mit einem eigenhändigen Briefe begleitet hatte, geht aus Lobatschefskijs Dankschreiben hervor, das folgenden Wortlaut hat:

„Ihr gütiges Schreiben erhielt ich zugleich mit dem Diplom als Mitglied der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Ich ersuche Sie ergebenst der Königl. Gesellschaft meinen Dank zu bezeugen und derselben zu versichern, dass ich mir es für eine grosse Ehre schätze, zu den correspondirenden Mitgliedern derselben zu gehören, und ich wünsche, dass jede meiner Arbeiten im gelehrten Fache würdig seyn möchte, mit den ausgezeichneten Schriften der Gesellschaft vereinigt zu werden, ich werde wenigstens alle meine Bemühungen dahin richten.

„Verzeihen Sie mir, dass ich so lange zögerte Ihnen zu antworten, der unglückliche Brand der Stadt trägt die Schuld davon; dieser hatte sowohl meine Gesundheit als auch meine persönlichen Angelegenheiten etwas zerstört, und mich ausserdem noch mit einer Menge besonderer Dienstgeschäfte überhäuft.

„Empfangen Sie bey dieser Gelegenheit zugleich die Versicherung meiner ausgezeichnetsten Hochachtung, mit welcher ich für immer verbleibe

Ewr. Hochwohlgeboren

ergebenster

N. Lobatschewsky."

Die noch folgenden Titel lasse ich ebenso wie die Anrede als überflüssig weg. Wie schon im Texte erwähnt, ist in diesem Briefe nur die Unterschrift N. Lobatschewsky eigenhändig.

S. 399, Z. 10—2 v. u. Diese Notizen entnehme ich der Abhandlung: „Ueber den Gang der Temperatur zu Kasan während des Jahres 1833" von E. Knorr, s. S. 647 ff. des 42. Bandes von Poggendorffs Annalen, Leipzig 1837. Danach wurden übrigens die angestellten Beobachtungen regelmässig im Kasaner Boten veröffentlicht, so lange dieser erschien.

S. 400, Z. 2—13. Wassiljef S. 226.

S. 400, Z. 14—27. Auf die Vermuthung, dass E. Knorr (1805—1879) und nicht K. F. Knorre (1801—1883) es gewesen sei, dem Gauss die „Kleine in russischer Sprache geschriebene Abhandlung" (vgl. S. 398 und 432, Z. 24 f.) verdankte, hat mich Stäckel gebracht. In der That spricht dafür schon der Umstand, dass jene „Kleine Abhandlung" aller Wahrscheinlichkeit nach der mit eignem Titel versehene Sonderabdruck der „Anwendung der imaginären Geometrie" war (s. S. 435), denn einen solchen Abdruck konnte Gauss doch wohl nur von einem Manne bekommen haben, der zu Lobatschefskij in persönlichen Beziehungen stand: während nun bei K. F. Knorre solche Beziehungen höchst unwahrscheinlich sind, erklären sie sich bei E. Knorr auf die natürlichste Weise von der Welt aus dem langen Zusammenwirken beider in Kasan. Andrerseits kann man sich auch sehr gut erklären wie Gauss dazu kam, Knorre für Knorr zu schreiben: K. F. Knorre war, was schon sein Vater (1759—1810) gewesen war, Astronom, der Name Knorre war daher Gauss viel geläufiger als der des wenig bekannten Physikers Knorr.

Uebrigens habe ich jetzt wenigstens dafür den sichern Beweis, dass K. F. Knorre nicht der Uebersender jener „Kleinen Abhandlung" gewesen sein kann. Der Knorre nämlich, von dem Gauss in dem Briefe vom

1. Februar 1841 spricht (s. S. 432), muss vor diesem Zeitpunkte in Göttingen oder anderswo mit Gauss zusammengetroffen sein; in dem Briefe heisst es ja: „Wie mir Knorre sagte . . .“. Nun aber erfahre ich soeben (Oktober 1898) von K. F. Knorres Sohn, Herrn Professor V. Knorre, Observator an der Berliner Sternwarte, dass sein Vater in der Zeit vor 1841 nur einmal in Deutschland gewesen ist und damals Gauss nicht angetroffen hat. Damit ist also die Möglichkeit, dass Gauss ihn gemeint habe, ausgeschlossen, und es wird immer wahrscheinlicher, dass E. Knorr gemeint ist. Freilich habe ich dafür bis jetzt nur die hier und im Texte angegebenen Wahrscheinlichkeitsgründe, keine wirklich zwingenden Beweise*).

Wassiljef, dem ich im Januar 1898 die Stäckelsche Vermuthung mittheilte, konnte mir sofort bestätigen, dass E. Knorr mit Lobatschefskij befreundet gewesen ist, er verwies mich auf die Veröffentlichung Knorrs von 1841, zu der Lobatschefskij seine Abhandlung über unendliche Reihen beigesteuert hat (s. S. 399), gab mir ferner Nachricht von der grossen Reise, die Knorr 1840 gemacht hat**), und theilte mir endlich die im Texte wiedergegebenen Stellen aus dem 1849 in Kijef erschienenen Buche Knorrs mit. Ueber die weiteren Schicksale des Mannes wusste er allerdings nur, dass dieser 1858 in den Ruhestand getreten und nach Kötzschenbroda bei Dresden übergesiedelt war.

Nach verschiedenen vergeblichen Versuchen ist es mir dann gelungen festzustellen, dass E. Knorr einen einzigen Sohn Alexander hinterlassen hat, der in St. Petersburg als Inspektor der Kaiserlich Russischen Staatsbank lebt. Dieser hat mir, als ich mich an ihn wendete, auf das Bereitwilligste Alles mitgetheilt, was er selbst wusste, und namentlich nach den mündlichen Erzählungen seines Vaters dessen freundschaftliche Beziehungen zu Lobatschefskij bestätigt. Nach diesen Erzählungen habe sich Lobatschefskij im Privatleben beständig von allen andern Professoren der Universität Kasan fern gehalten und nur mit E. Knorr in freundschaftlichem Verkehr gestanden. Briefe Lobatschefskijs an E. Knorr sind leider nicht vorhanden, auch erinnert sich Herr A. Knorr nicht, gehört zu haben, dass sein Vater Gauss persönlich gekannt habe, und ebensowenig hat er in den Papieren seines Vaters Hindeutungen darauf finden können, nur dessen neunmonatliche Reise von 1840 steht auch nach ihm fest.

Den Mittheilungen des Herrn A. Knorr über den Lebensgang seines Vaters entnehme ich Folgendes:

Ernst Knorr ist geboren am 23. November 1805 in Herzberg in

*) Bei dieser Gelegenheit möchte ich noch eine andre Vermuthung aussprechen, die jedenfalls Manches für sich hat, die Vermuthung nämlich, dass auch das Erscheinen der „Geometrischen Untersuchungen“ bei einem Berliner Verleger (G. Fincke) durch Knorr vermittelt worden ist. Jedenfalls war Knorr vermöge seiner alten Berliner Beziehungen sehr gut dazu in der Lage, auch ist es auffallend, dass er in der Vorrede zu seinem „Versuche einer Darstellung der Elemente der Geometrie“ nur die „Geometrischen Untersuchungen“, sonst aber keine Schriften Lobatschefskijs erwähnt. Etwas sicheres wird sich freilich über diesen Punkt kaum feststellen lassen, zumal da, wie Stäckel schon vor längerer Zeit ermittelt hat, der Finckesche Verlag in andre Hände übergegangen ist und der jetzige Inhaber (Kampffmeyer) keine Auskunft zu geben vermag.

**) Aus dem auf S. 426 erwähnten Tagebuche Littrows hat Stäckel festgestellt, dass Knorr auf dieser Reise Wien berührt und dort im „Schwan“ gewohnt hat.

der Provinz Sachsen und gestorben am 30. Mai 1879 in Kötzschenbroda bei Dresden als Kaiserlich Russischer Staatsrath und Professor emeritus. Studirt hat er*) vom Herbst 1823 bis Ende des Sommerhalbjahrs 1828 zu Berlin und zwar vorzugsweise Mathematik und Physik und erhielt 1827 von der philosophischen Fakultät eine goldene Preismedaille. Von Alexander v. Humboldt wurde er dann zum Amanuensis bei dessen Vorlesungen gewählt und erwarb im April 1830 in Berlin den philosophischen Doktorgrad mit einer Arbeit: Disquisitiones quaedam de aestu maris, gedruckt Berlin 1830. Nachdem er zeitweilig Hülfsarbeiter an der Königlichen Bibliothek und Lehrer der Physik am Joachimsthalschen Gymnasium gewesen war, folgte er im December 1832 einem Rufe als ordentlicher Professor der theoretischen und Experimentalphysik an der Universität Kasan. Aus Gesundheitsrücksichten wurde er 1846 nach Kijef versetzt als Professor der Physik und der physikalischen Geographie, wo er bis 1858 blieb.

An gedruckten Arbeiten E. Knorrs sind nach den Angaben seines Sohnes zu erwähnen:

1) Die Dissertation. 2) Ueber Frasers Höhenmessungen, siehe Oltmanns, Fundamente der Geographie. 3) Ueber den Gang der Temperatur zu Kasan im Jahre 1833 (vgl. S. 437, Z. 26 ff.). 4) Bemerkungen in Bezug auf die von Prof. A. Erman gegebene Bestimmung der absoluten Höhe von Kasan (im Bulletin de la soc. imp. des naturalistes de Moscou). 5) Kurzer Bericht über eine wissenschaftliche Reise unternommen in den Monaten Juli, August, September und October 1836 (ebenda). 6) Notiz über einige Apparate zu hydrometrischen Messungen in Strömen (Bull. de la classe phys.-math. de l'Acad. Imp. des Sciences de St. Petersbourg). 7) Meteorologische Beobachtungen aus dem Lehrbezirk der Kaiserlich-Russischen Universität Kasan. Heft I, 1841, dazu als Anhang Lobatschefskijs Aufsatz „Ueber die Convergenz der unendlichen Reihen“ und ein Aufsatz von E. Knorr selbst: „Allgemeine Bemerkungen über den Vortrag der Physik auf Gymnasien“, der letztere ist datirt: Kasan im März 1838. Manuskript und Abzüge des zweiten Heftes dieser Beobachtungen gingen am 24. August (5. September) 1842 bei dem grossen Brande von Kasan mit der Universitätsbuchdruckerei zu Grunde. 8) Untersuchungen über das von Prof. Moser zu Königsberg entdeckte dunkle Licht uud über die Erzeugung von Wärmebildern (Bull. de St. Petersbourg). 9) Aufsätze über Thermodynamik in den Pariser Comptes Rendus und in Poggendorffs Annalen von Band 68 an. 10) Ueber Photographie (in Poggendorffs Annalen und in Dinglers polytechnischem Journale). 11) Versuch einer Darstellung der Elemente der Geometrie. Kiew 1849. 12) Der Tastengyrotrop (in Poggendorffs Annalen). 13) Beobachtungen eines Irrlichts (ebenda). 14) In russischer Sprache: „Beitrag zur Geschichte der Automaten“ (in den Kasaner Gelehrten Schriften) und: „Korrespondenz mit L. Breguet über einen von letzterem nach Prof. Knorrs Ideen konstruirten stündlichen Thermographen (im Journal des Kaiserlich Russischen Ministe-

---

*) Vorher war er 1820 nach Dresden gegangen, um auf der dortigen Akademie die Baukunst zu studiren, 1822 aber war er nach Berlin übergesiedelt und hatte sich da im Laufe eines Jahres für das Universitätsstudium vorbereitet (s. seine nachher erwähnte Dissertation).

riums für Volksbildung). 15) Ueber die Messung der Gehörweite und die Ungleichheit derselben für das rechte und linke Ohr. Dresden April 1861. 16) Ueber die tägliche Variation des Barometers und die athmosphärische Lunar-Fluth. Vgl. auch Poggendorffs biogr. Wörterbuch, Bd. I u. III, Artikel Knorr, sowie den Catalogue der Royal Society of London.

S. 401, Z. 4—6. Der genaue Titel des Buches, von dem ich ein Exemplar Herrn A. Knorr verdanke, lautet: „Versuch einer Darstellung der Elemente der Geometrie bis zum 29-sten Satze des 1-sten Buches der Elemente Euclids, von Ernest Knorr, D-r. phil. Prof. ord. der Physik an der Universität des Heil. Wladimir u. s. w. Kiew. In der Universitäts-Druckerei. 1849." Das Buch enthält V und 51 Seiten Oktav mit einer Figurentafel. Der Beweisversuch steht im Kapitel III, S. 33 ff.

Den unendlichen Flächenraum, der eingeschlossen wird von einer begränzten Geraden AB und von zwei dazu senkrechten unbegränzten Geraden AC und BD nennt E. Knorr ebenso wie Legendre (vgl. S. 317 f.) ein rechtwinkliges Zweieck, AB nennt er die Grundlinie, AC und BD die Seiten des Zweiecks. Er zeigt, dass rechtwinklige Zweiecke mit gleicher Grundlinie kongruent sind und dass von zwei Zweiecken mit verschiedenen Grundlinien das, dessen Grundlinie grösser ist, das andre in sich enthalten kann, woraus er schliesst, dass jenes Zweieck grösser ist als dieses und dass zwei gleiche rechtwinklige Zweiecke gleiche Grundlinien haben. Ferner bemerkt er, dass der unendliche Flächenraum, der von den Schenkeln eines rechten Winkels begränzt wird, unendlich gross ist im Vergleiche zu jedem rechtwinkligen Zweiecke, weil nämlich das Zweieck unendlich oft in diesem Winkelraume Platz hat.

Es folgt ein vollkommen strenger Beweis für den Satz, dass die Winkelsumme im Dreiecke nicht grösser ist als zwei Rechte, doch unterscheidet sich dieser Beweis kaum von dem Legendreschen (vgl. S. 330, Z. 10—12). Sodann wird, wieder ganz richtig, der Satz bewiesen: „Fällt man von beliebigen Punkten einer Seite eines rechtwinkligen Zweyecks Perpendikel auf die andere Seite, so ist keiner dieser Perpendikel kleiner als die Grundlinie, und jeder folgende Perpendikel nicht kleiner als ein vorhergehender" und hieraus folgt sofort: „Fällt man von irgend einem Punkte einer Seite eines rechtwinkligen Zweyecks einen Perpendikel auf die zweyte Seite, so ist die dadurch entstehende vierseitige Figur unvergleichbar klein in Bezug auf das rechtwinklige Zweyeck", weil sie nämlich unendlich oft in diesem Zweiecke Platz hat.

Aber nun kommt der Fehler. Es sei $CABD$ ein rechtwinkliges Zweieck mit der Grundlinie AB; auf den Seiten BD und AC mögen die Punkte I und K so liegen, dass IK senkrecht zu AC ist. Wäre nun IK nicht gleich AB sondern grösser, so wäre der Winkel BIK spitz, sein Nebenwinkel KID stumpf. Machte man daher $KL = AB$, wo L zwischen K und I fiele, und errichtete man auf KI in L und I nach der Seite von C und D hin die beiden Senkrechten LN und IP, die beide ganz im Innern des Zweiecks $CABD$ lägen, so hätte man drei rechtwinklige Zweiecke: $CABD$, $PIKC$, $NLKC$. Jedes dieser Zweiecke enthielte das darauf folgende in sich und wäre daher nach Knorr grösser als dieses, aber das erste und dritte hätten gleiche Grundlinien und wären folglich einander gleich, worin ein Widerspruch liegen würde.

Der Fehler liegt offenbar darin, dass Knorr die Begriffe der Gleichheit, des Grösser- und Kleinerseins ohne Weiteres auf unendliche Grössen, wie seine Zweiecke es sind, anwendet, ein Verfahren, das durchaus unzulässig ist. Es ist genau derselbe Fehler wie ihn Legendre begangen hat, nur dass dieser blos den Begriff der Gleichheit anwendet. Die Knorrschen Betrachtungen sind daher viel lehrreicher als die Legendreschen.

S. 401, Z. 15—12, 6—1 v. u. Näheres bei Wassiljef S. 226 f., 229 f.

Zu Kapitel IX.

S. 402, Z. 7 v. o. — 1 v. u. Janischefskij S. 260 f.

S. 403, Z. 1 — 13. Nach Janischefskij S. 261 und nach Mittheilungen Wassiljefs. Nach diesen waren Lobatschefskijs Kinder: 1) der im Texte erwähnte, Alexej, 2) Nikolaj, geboren 1835, jetzt in Sibirien im Gouvernement Tomsk, 3) Alexander, gestorben 1892 als Oberst in Petersburg, 4) Wárwara verehelichte Achlópkof, lebt noch in Petersburg.

S. 403, Z. 14 — 19 vgl. G. A. I, S. VII und II, S. 7, ferner den Aufsatz von Popof, Wospominánije o slúschbje i trudách Lobatschéfskawa (Erinnerung an die Wirksamkeit und die Bemühungen Lobatschefskijs) in den K. G. S. 1857, IV, S. 153—159.

S. 403, Z. 17 — 13 v. u. Janischefskij S. 260.

S. 403, Z. 2, 1 v. u. Popof a. a. O. und G. A. I, S. VII und II, S. 7.

S. 404, Z. 2—5. Wassiljef S. 233. Von Bunjakofskij sind hier folgende Arbeiten zu nennen: „Considérations sur les démonstrations principales de la théorie des parallèles", lu le 27. oct. 1843 und „Nouvelle théorie des parallèles", lu le 12. dec. 1845, erschienen in den Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, 6. série, Sciences math. et phys., Bd. IV, Petersburg 1850, S. 87 — 107 und 207 — 232. Endlich die selbständige Schrift: Параллельныя линіи (Die Parallellinien), 77 S., 8^{0}, Petersburg 1853, Verlag der Akademie.

S. 404, Z. 8 — 10. Janischefskij S. 260. Das geschah im Jahre 1855.

S. 404, Z. 12 v. o. — 5 v. u. Wassiljef S. 232 f. Ein Bild, das Lobatschefskij als kräftigen Mann darstellt, ist dem zweiten Bande der G. A. beigegeben, es ist nach einem Oelgemälde im Besitze der Universität Kasan photographisch vervielfältigt. Das Bild, das den ersten Theil des vorliegenden Buches schmückt, stellt ihn in höherem Lebensalter dar.

S. 405, Z. 1 v. o. — 4 v. u. Popof a. a. O.

S. 405, Z. 3 v. u. — 406, Z. 5. Janischefskij S. 261.

S. 406, Z. 7 — 14. Janischefskij S. 260.

S. 406, Z. 15 v. o. — 1 v. u. Wassiljef S. 231 f.

Zu Kapitel X.

S. 407, Z. 5 — 1 v. u. So schreibt Gauss in dem auf S. 433 angeführten Briefe, aber man vergesse nicht, dass Gauss jedenfalls zu dieser Zeit die Neuen Anfangsgründe noch nicht gelesen hatte, wenn er überhaupt jemals dazu gekommen ist, das zu thun.

S. 411, Z. 8 — 14. Die auf S. 254 f. aus der Pangeometrie mitgetheilte Ableitung einiger Gleichungen für ein Viereck mit drei rechten Winkeln kann schon in gewissem Sinne als Beleg hierfür dienen. Noch

auffälliger ist es aber bei der Bestimmung der Winkelsumme eines geradlinigen Dreiecks aus dessen Seiten, man vergleiche nur die aus der „Imaginären Geometrie“ entnommene Ableitung dieser Winkelsumme mit der in der „Pangeometrie“ gegebenen, G. A. I, S. 536 ff., II, S. 666 ff.

S. 411, Z. 19—24. Wassiljef S. 225, 240—242 und in dem Bulletin of the New-York mathematical society, Bd. III, 1894, S. 231—235.

S. 411, Z. 8—1 v. u. Mittheilung Wassiljefs.

S. 412—417. Einzelne Bruchstücke aus diesen Betrachtungen hat auch schon Wassiljef mitgetheilt, vgl. die Z. 5 f. angeführten Stellen.

S. 415, Z. 20—10 v. u. Lobatschefskij spricht nur von stetigen Funktionen, die „für gewisse x“ unterbrochen sind, dagegen erwähnt er es nicht als eine wenigstens denkbare Möglichkeit, dass eine Funktion an jeder Stelle eines Intervalls, innerhalb dessen sie stetig ist, unterbrochen sein könne. Man darf daher auch nicht ohne Weiteres behaupten, dass er den Begriff einer stetigen, überhaupt nicht differentiirbaren Funktion wirklich gehabt habe, so nahe es uns auch heute liegt, dies aus seinen Worten herauszulesen. Immerhin ist es sehr wohl möglich, dass er den Wesensunterschied zwischen Stetigkeit und Differentiirbarkeit in seinem ganzen Umfange erkannt hatte, aber aus dem Wortlaute seiner Aeusserungen geht das jedenfalls nicht mit Sicherheit hervor. Uebrigens wäre es vielleicht besser, für „ununterbrochen“ (непрерывный) und „unterbrochen“ (ломаный) zu sagen: „ungebrochen“ und „gebrochen“. Das russische Wort für stetig ist постепенный.

S. 417, Z. 16—14 v. u. Hier befindet er sich in einem Irrthume, denn sobald eine Funktion innerhalb eines Intervalls stetig ist, ist sie in diesem Intervalle bekanntlich auch integrirbar.

S. 420, Z. 9—20. Der Brief steht auf S. 246 dieses fünften Bandes; die ganze Stelle findet man P. Th. S. 235. Es unterliegt keinem Zweifel, dass diese Erwähnung Lobatschefskijs dessen Namen zuerst in weiteren Kreisen bekannt gemacht hat, jedoch ist der Briefwechsel Gauss-Schumacher nicht die erste gedruckte Veröffentlichung, in der Lobatschefskijs Leistungen gewürdigt werden. Wassiljef hat mich auf ein noch früher erschienenes Buch aufmerksam gemacht, in dem das geschehen ist, nämlich auf die Prolégomènes philosophiques de la Géométrie et solution des postulats par J. Delboeuf, Docteur en philosophie et en sciences physiques et mathématiques suivis de la traduction, par le même, d'une dissertation sur les principes de la géométrie*) par F. Ueberweg, Dr. en philos. et privatdocent à l'Université de Bonn. Liège, Paris et Leipzig, 1860.

In dieser Schrift liest man auf S. 75 f.: „Y aurait il possibilité, en partant d'hypothèses autres que les axiomes reconnus, de construire une science enchaînée, quoique fausse, comme il arrive dans les sciences dites naturelles? — A cet argument force nous aurait été de répondre oui sans pouvoir établir par le fait la justesse de notre réponse, s'il ne s'était pas trouvé quelqu'un qui s'est chargé de poser ce fait. Partant d'une idée qui

---

*) Es ist das die Abhandlung: „Die Principien der Geometrie, wissenschaftlich dargestellt“, Archiv für Philologie und Pädagogik, Band 17 (1851). Vgl. Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie, Bd. II, Paderborn 1898, S. 204—207.

avait été émise par Gauss, M. Lobatschewsky, recteur de l'Université de Casan, a essayé de fonder une géométrie qu'il intitule imaginaire dans la supposition que la somme des trois angles d'un triangle soit plus petite que deux droits. Il a développé ses idées dans une dissertation qu'on peut lire dans le journal de Crelle (1837, page 295); mais l'auteur y renvoie à un ouvrage publié par lui cinq ans auparavant dans le journal de Casan, que nous n'avons pu nous procurer; il nous a été impossible ainsi de juger, nous ne disons pas de la certitude de ses raisonnements qui semblent rigoureux, mais de la signification fondamentale de son hypothèse*)." Sodann theilt Delboeuf auf zwei Seiten einige Ergebnisse der Abhandlung Lobatschefskijs mit.

Wie Delboeuf auf Lobatschefskij gekommen ist, das erzählt er in dem kurz vor seinem Tode erschienenen Buche: „La géométrie euclidienne sans le postulatum d'Euclide", Paris bei Hermann, Liège bei Desoer, 1897. Er berichtet da, 1858 sei er nach Bonn gekommen und habe mit Ueberweg viel über Geometrie gesprochen. „Nous prenions souvent pour arbitre son ami Lipschitz, privat-docent comme lui, avec qui il m'avait mis en rapport. C'est même Lipschitz qui me signala, dans le Journal de Crelle, les articles de Lobatschewsky dont je donne une courte analyse dans mes Prolégomènes." Delboeuf ist bis an sein Lebensende überzeugter Anhänger der Euklidischen Geometrie als der allein wahren geblieben.

Durch diese Notizen, die mir Wassiljef hatte zukommen lassen, war festgestellt, dass Lipschitz schon vor dem Erscheinen des Gauss-Schumacherschen Briefwechsels die Ergebnisse Lobatschefskijs gekannt und gebührend gewürdigt hatte. Es schien mir daher angezeigt, bei Lipschitz selbst anzufragen, um zu erfahren, wodurch er auf Lobatschefskij aufmerksam geworden sei. Für seine, Bonn d. 7. October 1898 datirte, sehr eingehende Beantwortung meiner Anfrage möchte ich ihm auch hier meinen besonderen Dank aussprechen. Ich theile daraus mit, was sich unmittelbar auf unsre Angelegenheit bezieht:

„In dem letzten Jahre, in dem ich in Berlin studirte, Michael 1852 bis 1853, beschäftigte ich mich zum ersten Male mit Kants Kritik der reinen Vernunft. Dirichlet, in dessen Hause ich eingeführt war, und der von meinem Studium des Kantischen Werkes wusste, pflegte sich, wenn ich hinkam, genau zu erkundigen, wie ich in meiner Beschäftigung weiterrückte. An den Abschnitt Kants vom Raume anknüpfend sagte er zu mir, dass das elfte Euklidische Axiom nicht bewiesen werden könnte. Dies sei dadurch festgestellt, dass man eine Geometrie bilden könne, bei welcher dieses Axiom nicht vorausgesetzt werde. Es gebe zwei solcher Geometrien, die eine von Gauss, die andere von Lobatschefskij. Für die Geometrie von Lobatschefskij nannte er mir die Abhandlung, die im 17. Bande des Crelleschen Journals erschienen ist, als Quelle. Auf welche Weise er die imaginäre Geometrie von Gauss kennen gelernt hatte, gab er nicht an.

„In dem Winter 1852—53 hörte ich bei Dirichlet die Vorlesung über die Theorie der Anziehung nach dem Newtonschen Gesetze zum

---

*) „Peut-être le triangle est-il projeté sur une surface particulière, ce qui expliquerait comment ses angles deviennent rigoureusement égaux à deux droits quand il est infiniment petit . . . ."

zweiten Male; ich hatte sie 1850 zum ersten Male gehört, war aber durch Krankheit gehindert worden, bis zum Ende zu folgen. Bei Gelegenheit eines Gesprächs über die Vorlesung, die ich in dem Winter 1852—53 hörte, sagte mir Dirichlet, er habe untersucht, wie sich die Theorie der Anziehung nach dem Newtonschen Gesetze gestalte, wenn dabei die Gaussische Theorie des imaginären Raumes zu Grunde gelegt wird, ohne jedoch irgend welche Einzelheiten hinzuzufügen. Diese letzte Aeusserung Dirichlets habe ich bei Veranlassung der Abhandlung: Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist, Borchardts Journal Bd. 74, S. 117 [1872] in einer Anmerkung mitgetheilt."

Lipschitz bestätigt sodann aus eigner Erinnerung die Angaben Delboeufs und bemerkt noch, dass dessen Aeusserung „Partant d'une idée qui avait été émise par Gauss" für ihn etwas auffallendes habe. „Es wird hier zwar nicht gesagt, dass L. von einem Gedanken ausgegangen sei, der ihm als ein Gedanke von Gauss bekannt war, aber der Leser kann doch bei diesen Worten sehr leicht voraussetzen, dass L. von einem Gedanken ausgegangen sei, von dem er wusste, dass ihn Gauss gehabt hatte. In der That aber ist mir niemals irgend eine Mittheilung gemacht worden, aus der zu schliessen wäre, dass L. durch Kenntnissnahme von Gauss' Forschungen auf seine eigenen Gedanken gekommen sei."

Uebrigens sagt Lipschitz, er habe damals Lobatschefskijs Arbeit im Crelleschen Journale nur äusserlich gekannt, von den „Geometrischen Untersuchungen" habe er erst viel später Kenntniss erhalten.

Zu alledem möchte ich noch bemerken, dass die Aeusserung Delboeufs „Partant d'une idée . . ." in der That um so auffallender ist, als sie aus der Zeit vor dem Erscheinen des Gauss-Schumacherschen Briefwechsels stammt, doch erklärt sie sich wohl ungezwungen dadurch, dass Delboeuf von Lipschitz Einiges über die Aeusserungen Dirichlets erfahren und das missverständlich aufgefasst hat; vielleicht liegt aber auch nur eine Nachlässigkeit im Ausdrucke vor.

Dirichlet endlich hatte, wenigstens soweit es sich um Ideen von Gauss handelt, seine Kenntniss aus dessen eignem Munde; denn er hat, als er in den zwanziger Jahren Gauss in Göttingen besuchte, mit diesem ein Gespräch über nichteuklidische Geometrie gehabt. Das beweist ein Brief von Gauss an Olbers vom 3. Mai 1827 (im Gaussarchive), vgl. auch einen Brief Dirichlets an Gauss vom April 1828, Dirichlets Werke Bd. II, S. 377 (Mittheilung von Stäckel).

S. 421, Z. 1—4. Baltzer, Elemente der Mathematik, Bd. II, 2. Auflage, Leipzig 1867, S. III, 13—17, 146. Die Frage, wodurch Baltzer auf Lobatschefskij aufmerksam geworden ist, harrt noch der Beantwortung. Lipschitz schreibt, er habe Baltzer in Dirichlets Hause kennen gelernt, aber keinen wissenschaftlichen Verkehr mit ihm gehabt und ihn also auch nicht auf Lobatschefskij hinweisen können. Dirichlet könnte das gethan haben, doch steht dem entgegen, dass Baltzer in Bd. II der 1. Ausgabe seiner Elemente (1862) weder Lobatschefskij noch J. Bolyai erwähnt. Vielleicht stammt daher seine Kenntniss doch aus dem 5. Bande des Briefwechsels Gauss-Schumacher (1863), nur wird in diesem Briefwechsel der Appendix J. Bolyais nirgends erwähnt.

S. 421, Z. 4—7. In der Vorrede zu seinem Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire, Paris 1867, sagt Hoüel, er verdanke die Kenntniss der Arbeiten von Lobatschefskij und J. Bolyai dem Dr. Baltzer in Dresden. Seine französische Uebersetzung der G. U. hat den Titel: Études géométriques sur la théorie des parallèles par J. N. Lobatschewsky, traduit de l'Allemand. Suivie d'un extrait de la Correspondance de Gauss et Schumacher. Paris 1866, sie ist ein Sonderabdruck aus den Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Tome IV. S. 83—128. Bordeaux 1866.

S. 421, Z. 7—9. Hoüel schreibt am 29. Mai 1867 aus Bordeaux an den Baumeister Franz Schmidt, damals noch in Temesvár: „Le professeur Battaglini, de Naples, s'occupe activement de la géométrie non-euclidienne, ... Il va publier, d'après la copie que je lui ai procurée, une traduction italienne de la Pangéométrie de Lobatschewsky.“ Am 30. Juli 1867 erzählt er, dass er von den zwei Exemplaren des Bolyaischen Tentamens, die er durch Baltzer und F. Schmidt erhalten hatte, das eine an Battaglini geschickt habe. Endlich schreibt er am 27. November 1867: „J'ai reçu un gros volume de Mémoires de Lobatschewsky écrits en russe, il est vrai, mais que je fais traduire par un de mes anciens élèves, jeune polonais très intelligent . . . . Le Giornale di Matematiche de Naples publie en ce moment une traduction italienne de la Pangéométrie de Lobatschewsky. Il donnera bientôt la traduction de l'Appendice de Bolyai.“ Auf diese Briefe hat mich Stäckel aufmerksam gemacht, und F. Schmidt hat mir dann auf meine Bitte die Originalbriefe zugesandt, denen die angeführten Stellen entnommen sind.

Battaglinis Uebersetzung der Pangeometrie steht im Giornale di Matematiche Bd. V, S. 273—336, Neapel 1867 und hat den Titel: „Pangeometria o sunto di geometria fondata sopra una teoria generale e rigorosa delle parallele, per N. Lobatschewsky. (Versione dal Francese.)“

S. 421, Z. 9—11. Vgl. den eben erwähnten Brief Hoüels an F. Schmidt vom November 1867. Zu den „Mémoires de Lobatschewsky écrits en russe“, von denen Hoüel darin spricht, müssen jedenfalls die „Neuen Anfangsgründe“ gehört haben, denn Frischauf erzählt in der Vorrede zu seinen „Elementen der absoluten Geometrie“, dass ihm Hoüel das Manuskript seiner Uebersetzung des in russischer Sprache erschienenen Hauptwerkes von Lobatschefsky „Neue Principien der Geometrie . . .“ zur Verfügung gestellt habe.

S. 421, Z. 12—9 v. u. J. Frischauf, „Absolute Geometrie nach Johann Bolyai“, Leipzig bei Teubner, 1872 und „Elemente der absoluten Geometrie“, ebenda 1876.

S. 421, Z. 7—5 v. u. Halsteds Uebersetzung der „Geometrischen Untersuchungen“ hat den Titel: „Geometrical Researches on the theory of parallels, by N. Lobatschewsky, translated from the Original by G. B. Halsted, Austin, Texas. Die Vorrede zur ersten Ausgabe ist datirt vom 1. Mai 1891, die zur vierten vom 1. Januar 1892.

S. 421, Z. 4 v. u. — 422, Z. 17. Vgl. „Compte rendu du bureau local du comité Lobatschefsky, 1893—1895. Kasan 1895.“

Verzeichniss

der gedruckten Werke Lobatschefskijs nach der Zeitfolge ihres Erscheinens.

Die Abkürzungen K. B.; K. G. S. und G. A. haben die auf S. 237 erklärte Bedeutung.

---

1. О резонансѣ, или взаимномъ колебаніи воздушныхъ столбовъ (Ueber die Resonanz oder wechselseitige Schwingung von Luftsäulen).

K. B. Theil 24: November und December 1828, S. 213—224.

Ein Auszug aus der Abhandlung von Wheatstone: „On the resonances or reciprocated vibrations of columns of air", Quarterly Journal of Science, Literature and Arts. New Series, I, 175—183, London 1828. Einen von Wilhelm Weber herrührenden deutschen Auszug aus derselben Abhandlung findet man in Schweiggers Journal für Chemie und Physik, Bd. 53 (= Bd. 23 des Jahrbuchs der Chemie und Physik), S. 327—333, Halle 1828.

2. О началахъ геометріи (Ueber die Anfangsgründe der Geometrie).

K. B. Theil 25: Februar und März 1829, S. 178—187; April 1829, S. 228—241.

K. B. Theil 27: November und December 1829, S. 227—243 (Tafel I, Fig. 1—9).

K. B. Theil 28: März und April 1830, S. 251—283 (Tafel II, Fig. 10—17); Juli und August 1830, S. 571—636.

Wieder abgedruckt in den G. A. I, S. 1—67; ins Deutsche übersetzt hier S. 1—66. Vgl. auch S. 371, 392—394, 408.

3. Рѣчь о важнѣйшихъ предметахъ воспитанія (Rede über die wichtigsten Gegenstände der Erziehung). Geh. am 5. (17.) Juli 1828.

K. B. Theil 35: August 1832, S. 577—596. Vgl. hier S. 388, 430.

4. Алгебра или вычисленіе конечныхъ (Algebra oder die Rechnung mit endlichen Grössen).

Selbständiges Werk, Kasan 1834, X und 528 S. 8^0. Die Druckerlaubniss der Censur ist von 1832. Vgl. hier S. 370, 411.

5. Пониженіе степени въ двучленномъ уравненіи, когда показатель безъ единицы дѣлится на 8 (Erniedrigung des Grades einer zweigliedrigen Gleichung, wenn der um eins verminderte Grad durch acht theilbar ist).

K. G. S. 1834, I, S. 3—32; vgl. hier S. 412.

6. Объ изчезаніи тригонометрическихъ строкъ (Ueber die Konvergenz der trigonometrischen Reihen).

K. G. S. 1834, II, S. 167—226; vgl. hier S. 412—415.

7. Условныя уравненія для движенія и положенія главныхъ осей обращенія въ твердой системѣ (Die Bedingungsgleichungen für die Bewegung und die Lage der Hauptdrehungsaxen eines starren Systems).

Gelehrte Schriften der Moskauer Universität, Februar 1835, Nr. VIII, S. 169—190.

8. Воображаемая геометрія (Imaginäre Geometrie).

K. G. S. 1835, I, S. 3—83, Tafel mit Fig. 1—8; wiederabgedruckt in den G. A. I, S. 71—120. Russische Bearbeitung von Nr. 12; vgl. hier S. 395.

9. Способъ увѣряться въ изчезаніи безконечныхъ строкъ и приближаться къ значенію функцій отъ весьма большихъ чиселъ (Ein Verfahren um sich von der Konvergenz unendlicher Reihen zu überzeugen und sich dem Werthe von Funktionen sehr grosser Zahlen anzunähern).

K. G. S. 1835, II, S. 211—342; vgl. hier S. 415—417.

10. Новыя начала геометріи съ полной теоріей параллельныхъ (Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallellinien).

K. G. S. 1835, III, S. 3—48, Einleitung und Kapitel I, 1 Tafel: Fig. 1—20.

K. G. S. 1836, II, S. 3—98, Kapitel II, III, IV, V, 3 Tafeln: Fig. 21—41, 42—60, 61—75.

K. G. S. 1836, III, S. 3—50, Kapitel VI, VII, 2 Tafeln: Fig. 76—91; 92—106.

K. G. S. 1837, I, S. 3—97, Kapitel VIII, IX, X, XI, 2 Tafeln: Fig. 107—120, 121—134.

K. G. S. 1838, I, S. 3—124, Kapitel XII.

K. G. S. 1838, III, S. 3—65, Kapitel XIII.

Wiederabgedruckt in den G. A. I, S. 219—486; Einleitung und Kapitel I—XI in deutscher Uebersetzung hier S. 67—235; Ueber Kapitel XII und XIII vgl. S. 236 und 410 f. Vgl. auch S. 395—397.

11. Примѣненіе воображаемой геометріи къ нѣкоторымъ интеграламъ (Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale).

K. G. S. 1836, I, S. 3—166, 1 Tafel: Fig. 1—20.

Wiederabgedruckt in der G. A. I, S. 121—218. Vgl. hier S. 395, 409 f.

12. Géométrie imaginaire (Par Mr. N. Lobatschewsky, recteur de l'Université de Cazan).

Crellesches Journal Bd. 17, Heft 4, S. 295—320, 1 Tafel: Fig. 1—8. Berlin 1837.

Wiederabgedruckt in den G. A. II, S. 581—613. Geschrieben vor Nr. 8 und schon 1834 oder 1835 nach Berlin geschickt; vgl. S. 397.

13. Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien von Nicolaus Lobatschewsky, kaiserl. russ. wirkl. Staatsrathe und ord. Prof. der Mathematik bei der Universität Kasan.

Selbständiges Werk: Berlin 1840. In der F. Fincke'schen Buch handlung. (Weidle'sche Buchdruckerei.) 61 S. Kleinoktav, 2 Tafeln: Fig. 1—15, 16—35. Ladenpreis ½ Rℓ. Vgl. S. 397 f., 433 f.

Wiederabgedruckt in den G. A. II, S. 553—578. In Faksimiledruck von Neuem herausgegeben von Mayer und Müller, Berlin 1887. Ueber die französische und die englische Uebersetzung vgl. S. 421, 445.

14. Ueber die Convergenz der unendlichen Reihen.

Erschienen als Beilage zu dem Grossquarthefte: „Meteorologische Beobachtungen aus dem Lehrbezirk der Kaiserlich Russischen Universität Kasan. Auf Kosten der Universität herausgegeben von Ernest Knorr. Heft I, 1835—36. Kasan in der Universitäts-Buchdruckerei. 1841." Die besonders paginirte Beilage enthält auf S. 1—48 die Arbeit Lobatschefskijs und auf S. 49—61 einen „Kasan im März 1838" datirten Aufsatz von E. Knorr: „Allgemeine Bemerkungen über den Vortrag der Physik auf Gymnasien." Vgl. hier S. 399 f.

15. Sur la probabilité des résultats moyens, tirés des observations répétées (Par Mr. Lobatschefsky, recteur de l'université de Cazan).

Crellesches Journal Bd. 24, Heft 2, S. 164—170, Berlin 1842. Grösstentheils eine Uebersetzung einiger Seiten aus dem Kapitel XII der „Neuen Anfangsgründe", vgl. K. G. S. 1838, I, S. 87—105; G. A. I, S. 428—438; vgl. auch hier S. 401 und 410.

16. Полное затмѣніе солнца въ Пензѣ 26. іюня 1842 г. (Die totale Sonnenfinsterniss in Pensa, am 26. Juni [8. Juli] 1842).

K. G. S. 1842, III, S. 51—83, auch abgedruckt im Журналъ Министерства Народнаго Просвѣщенія (Journal des Ministeriums für Volksbildung) 1843, Bd. XXXIX, Abth. II, S. 65—96.

17. Подробный разборъ разсужденія представленнаго магистромъ А. Θ. Поповымъ подъ названіемъ: „Объ интегрированіи дифференціалныхъ уравненій гидродинамики, приведенныхъ къ линейному виду" на степень доктора математики и астрономіи (Ausführliche Analyse der von dem Magister A. F. Popof zur Erlangung des Doktorgrades in der Mathematik und Astronomie vorgelegten Dissertation, betitelt: „Ueber die Integration der Differentialgleichungen der Hydrodynamik, wenn diese auf lineare Form gebracht sind").

Gedruckt als Anhang zu der Doktordissertation Popofs, Kasan 1845, 4°, 13 besonders paginirte Seiten; datirt vom 11. (23.) April 1845. Vgl. hier S. 401.

18. Значеніе нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ (Der Werth einiger bestimmter Integrale).

K. G. S. 1852, IV in 4⁰, und zwar: Abhandlung I, S. 1—26, Abhandlung II, S. 27—34. Dieselbe Arbeit ist auch in deutscher Sprache erschienen in dem von Georg Adolph Erman herausgegebenen „Archiv für wissenschaftliche Kunde von Russland“, Berlin 1855, Bd. 14, S. 232—272, unter dem Titel: „Ueber den Werth einiger bestimmten Integrale. Nach dem Russischen von Herrn Lobatschefskji, Prof. emerit. in Kasan.“ Die Uebersetzung rührt nicht von Lobatschefskij her. Vgl. hier S. 418.

19. Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles, par N. Lobatscheffsky, Professeur émérite de l'université de Kasan et membre honoraire de l'université de Moscou.

Сборникъ ученыхъ статей, написанныхъ профессорами Императорскаго Казанскаго Университета, въ память пятидесятилѣтняго его существованія (Sammlung gelehrter Abhandlungen, verfasst von Professoren der Kaiserlichen Universität Kasan zur Erinnerung an deren fünfzigjähriges Bestehen), Bd. I, Kasan 1856, S. 279—340. Wiederabgedruckt in den G. A. II, S. 617—680. Vgl. hier S. 403 und 411, wegen der italienischen Uebersetzung vgl. S. 421, 445.

20. Пангеометрія, заслуженаго Профессора Н. И. Лобачевскаго (Pangeometrie, von dem emeritirten Professor N. J. Lobatschefskij).

K. G. S. 1855, I, in 4⁰, S. 1—56; Kasan, in der Universitätsbuchdruckerei, 1856; unveränderte Uebertragung von Nr. 19. Wiederabgedruckt in den G. A. I, S. 489—550.

Die geometrischen Arbeiten Lobatschefskijs sind vereinigt in dem Werke:

Полное собраніе сочиненій по геометріи Н. И. Лобачевскаго. Изданіе Императорскаго Казанскаго Университета (Vollständige Sammlung der geometrischen Arbeiten N. J. Lobatschefskijs. Ausgabe der Kaiserlichen Universität Kasan).

Theil I, Kasan 1883, in 4⁰, S. I—VIII und 1—550 enthält die vorstehenden Nrn. 2, 8, 11, 10 und 20.

Theil II, Kasan 1886, in 4⁰, S. 3—8 und 551—680, mit einem Bildnisse und russischen Faksimile Lobatschefskijs, trägt auch die Bezeichnung: Collection complète des oeuvres géométriques de N. J. Lobatcheffsky. Édition de l'Université Impériale de Kasan, und enthält die vorstehenden Nrn. 13, 12 und 19.

Berichtigungen und Nachträge.

S. 6, Z. 1 v. u., 7, Z. 1 v. o. setze man nach „berühren" ein Komma.

S. 20, Z. 18 v. u. hätte (11) in (12) umgeändert werden sollen.

S. 25, Z. 10. Die [*257* gehört an die Zeile 12.

S. 34, Z. 10: s. S. 265 Z. 21—17 v. u.

S. 36, Z. 2 lies: [gleiche].

S. 42, Z. 10 v. u.: s. S. 278 Z. 7—11.

S. 57, Z. 11. Die [*602* gehört an die Zeile 13.

S. 73, Z. 17 v. o. — 8 v. u. In seinen Réflexions sur la théorie des parallèles (vgl. S. 311, Z. 18—15 v. u.) giebt Legendre auf S. 397—399 eine etwas abgeänderte Dartellung des hier auf S. 71—73 kritisirten Beweises, den Louis Bertrand in Bd. II, S. 19 f. seines Werkes: Développement nouveau de la partie élémentaire des mathematiques, prise dans toute son étendue, Genf 1778, veröffentlicht hat. Sodann folgt auf S. 399 f. der Reflexions der hier S. 73, Z. 18 v. o. — 8 v. u. wiedergegebene Beweis, und Legendre schliesst mit den Worten: „On ne peut disputer à ces démonstrations le mérite d'être simples et rigoureuses. M. Bertrand, de Genève, est le premier qui en ait fait mention dans son ouvrage intitulé: Développement de la partie élémentaire des mathématiques: mais jusqu'à présent*) personne ne les a introduites dans les livres élémentaires."

Hierdurch wird der Anschein erweckt, als ob auch der zweite Beweisversuch von Bertrand herrühre. Lobatschefskij, der jedenfalls das Bertrandsche Werk nicht zu Gesicht bekommen hat, war offenbar dieser Meinung, und ich selbst habe erst jetzt nach Einsicht jenes Werkes bemerkt, dass sich der zweite Beweisversuch nicht darin findet. Es müsste daher auf S. 73, Z. 17 f. eigentlich heissen: „Ein andres Ansehen giebt Legendre dem Bertrandschen Beweise, indem er unendliche Flächenräume in Winkeln allein betrachtet." Ebenso sollte auf S. 75, Z. 18 v. u. gesagt werden: „in dem von Legendre umgestalteten Bertrandschen Beweise", auch müssen die von mir zu diesen Stellen gemachten Anmerkungen auf S. 315 und 317 geändert werden, s. S. 451—453. Allerdings wäre es möglich, dass der zweite Beweisversuch in Bertrands Elémens de Géometrie, Paris 1812 (P. Th. S. 305) enthalten wäre, aber dieses Buch haben weder Stäckel noch ich bis jetzt einsehen können.

S. 74, Fig. 5. Auf der Verlängerung von AB soll B' stehen, nicht B''.

---

*) Das ist unrichtig, denn das Beweisverfahren findet sich schon 1803 bei Ide und bei Lacroix (P. Th. S. 305, 306), ferner auch in den Elémens de Géométrie von Develey, Lausanne 1816, die in der P. Th. nicht angeführt sind. Vgl. überdies P. Th. S. 231. Stäckel.

S. 75, Z. 12—6 v. u. Hier ist nicht recht klar, wie Lobatschefskij dazu kommt, gerade das aus den Legendreschen Betrachtungen herauszulesen; Legendre beweist nämlich, dass das unendliche Zweieck $CABD$ gleich ist dem Zweiecke, das begränzt wird von ED, EF und von der auf EF in E nach der Seite von D und C hin errichteten Senkrechten, oder richtiger, er beweist, dass jenes Zweieck in dieses verwandelt werden kann (vgl. S. 317 f.); da aber, wenn AFE ein spitzer Winkel ist, der Winkel EFC stumpf ausfällt, so ist das erste Zweieck keineswegs der Flächenraum, der aus dem Zweiecke $DBAC$ durch Abschneiden des Vierecks $ABEF$ entsteht.

S. 97, Fig. 25. Die Punkte zwischen E und B' sollen G' (nicht G) und F (nicht F) heissen.

S. 111, Z. 4 und 141, Z. 18 v. u. setze man vor „und“ ein Komma.

S. 189, Z. 13—15. Statt BC lies AB. Der Urtext lautet: Въ такомъ случаѣ содержаніе, хордамъ AC, BC соотвѣтственныхъ угловъ при центрѣ круга, будетъ еще менѣе разниться, нежели дробь $\frac{1}{m}$; . . . . Es fehlt aber eine Angabe darüber, wovon sich dieses Verhältniss um weniger als $\frac{1}{m}$ unterscheidet. Vgl. S. 336, Z. 17—12 v. u.

S. 196, Z. 5 lies: Die beiden Linien a und a'.

S. 302, Z. 3—16, 305, Z. 21—6 v. u. Die Mittheilungen über das Legendresche Supplément verdanke ich Stäckel.

S. 313, Z. 9 v. u. lies: 378 statt: 377.

S. 315, Z. 24, 22 und 21 v. u. lies: „seinen Beweisversuch“, „1778“ statt „1774“, „diesen Beweisversuch“ und: „Der Versuch beruht“.

S. 315, Z. 9, 8 v. u. sind die Worte: „Den zweiten . . .“ zu tilgen.

S. 315, Z. 22—9 v. u. Wie ich mich jetzt überzeugt habe, ist der Bericht Legendres nicht ganz treu. Bertrand braucht 1778 weder das Wort biangle noch die Ausdrücke: unendlich gross von erster oder zweiter Ordnung. Es ist wohl das Beste, den Wortlaut des Bertrandschen Beweises wiederzugeben (Développement nouveau, Bd. II, S. 19 f.). Die Figuren kann sich der Leser selbst leicht zeichnen.

„**Proposition VIII.** Deux droites AB, CD, qui font sur une troisieme GH des angles intérieurs BKL, DLK égaux ensemble à deux droits, remferment entr'elles une portion du plan telle qu'il en contient une infinité de pareilles.

„En effet, puisque par supposition, la somme des angles BKL, DLK est égale à deux angles droits; que d'ailleurs, la somme des angles de suite DLK, DLM est aussi égale à deux angles droits; il s'ensuit que $DLM = BKL$: que par conséquent, si l'on prend sur HG la longueur $LM = KL$, et qu'imaginant la droite EF tirée par le point M de manière que $FML = DLK$, on fasse glisser la bande $ACDB$, le long de HG, jusqu'à ce que le point L vienne en M et le point K en L, la ligne KL coïncidera avec LM, la ligne LD avec MF, et la ligne KB avec LD; parce que les angles égaux, de même que les droites égales, peuvent convenir. Mais la bande $ACDB$ convenant ainsi avec la bande $CEFD$, à cause qu'on a pu prendre sur HG une longueur $LM = KL$, il est clair qu'on feroit autant de bandes égales à $ACDB$ qu'on pourroit prendre sur HG de longueurs égales à KL, c'est-à-dire, qu'on en feroit une infinité; et partant, que deux droites, qui font sur une troisieme des angles intérieurs égaux à deux droits, renferment entr'elles une portion du plan telle qu'il en contient une infinité de pareilles.

„**Proposition IX.** Lorsque deux droites font sur une troisieme des angles intérieurs dont la somme n'est pas égale à deux droits, ces droites se rencontrent.

„Rappellons-nous dabord la remarque qui a été faite plus haut, que si deux droites AB, CD font, d'un côté d'une troisieme KL, des angles intérieurs BKL, DLK dont la somme surpasse deux angles droits, ces mêmes droites font, de l'autre côté de KL, des angles intérieurs AKL, CLK dont la somme est moindre que deux droits: Puis supposé qu'ici $AKL + CLK < 2$ droits, et que LM fasse l'angle CLM du nombre de degrés, minutes, secondes etc. qui manquent à $AKL + CLK$ pour faire deux angles droits; l'on ne pourra nier, que par la proposition précédente, le plan ne contienne une infinité de bandes pareilles à $MLKA$: que par conséquent, si LC ne rencontroit pas KA du côté de A, il ne s'ensuivît cette absurdité, que $MLKA$ renfermeroit l'angle MLC, duquel, loin de pouvoir dire que le plan en contient une infinité de semblables, on peut dire au contraire qu'il n'en contient qu'un nombre fini, savoir 360, si c'est un degré; 21600, si c'est une minute; 1296000, si c'est une seconde etc. Donc il est impossible que LC ne rencontre pas KA du côté de A: Donc en général, il est impossible que deux droites ne se rencontrent pas lorsque la somme des angles intérieurs qu'elles font sur une troisieme n'est pas égale à deux angles droits.

„Pour faire encor mieux sentir la force de cette démonstration j'observerai, qu'un angle petit ou grand, placé au centre d'un cercle décrit avec un rayon fini quelconque, insiste sur un arc de quelque grandeur ou sur un arc de nulle grandeur: que s'il insiste sur un arc de nulle grandeur, il faut que ses jambes coïncident, et conséquemment que ce ne soit pas un angle: que s'il insiste sur un arc de quelque grandeur; comme toute la circonférence est elle-même une grandeur finie; il faut que le rapport de cet arc à toute la circonférence soit un rapport de quantité finie à quantité finie: que par conséquent, l'angle qui insiste sur cet arc soit aussi à toute la quantité angulaire autour du centre, comme une grandeur finie à une autre; parce qu'enfin les angles au centre sont à toute la quantité angulaire autour du centre, comme les arcs sur lesquels ils insistent sont à toute la circonférence. Mais une portion de plan contenue entre deux droites qui font sur une troisieme des angles intérieurs égaux à deux droits n'est pas à toute la surface plane comme une quantité finie est à une autre quantité finie, mais comme une quantité finie à une quantité infinie: La bande $ACDB$ par exemple*) est à tout le plan dont elle fait partie, comme la droite finie KL est à la droite infinie KG: Donc un angle, quelque petit qu'il soit, est toujours plus grand qu'une de ces parties du plan que nous avons qualifiées de bandes: Donc il implique contradiction qu'une bande contienne un angle: Donc il implique contradiction que deux droites qui font sur une troisieme des angles intérieurs dont la somme n'est pas égale à deux droits ne se rencontrent pas, du côté où cette somme est moindre que deux droits."

Sonst habe ich in dem Bertrandschen Werke keine Stelle weiter finden können, an der die hier behandelte Frage gestreift wäre: nur in der Vorrede wird wenigstens darauf angespielt, es heisst da (Bd. I, S. XXI): „Donc l'attachement scrupuleux à la rigueur géométrique conduit à la clarté et à la netteté, et réciproquement la netteté mene à la rigueur géométrique. C'est à la recherche, c'est

---

*) Gemeint ist die in Proposition VIII betrachtete.

à l'ambition de cette netteté que je dois par exemple, les définitions de l'angle et de la ligne droite qui m'ont fait éviter le défaut connu des Eléments d'Euclide sur la rencontre des paralleles. Défaut qui ne vient que de ce qu'il n'a défini ni l'angle ni la ligne droite; car on ne qualifiera pas de définition une dénomination différente de la dénomination ordinaire d'un objet."

Den Winkel definirt Bertrand übrigens in Bd. II auf S. 7 so: „Un angle est une portion de superficie plane contenue entre deux lignes droites, qui se coupent, et sont terminées à leur point de section." Seine Erklärung der Geraden ist dagegen für uns nicht von Belang.

S. 317, Z. 11, vgl. S. 450, Z. 12—6 v. u.

S. 321, Z. 1 ff. Auch Steiner hat sich mit diesem Orte beschäftigt, jedoch ohne dessen einfache Definition zu bemerken, wie sie Lobatschefskij gegeben hat; s. die Abhandlung: „Verwandlung und Theilung sphärischer Figuren durch Construction", Crelles Journal Bd. 2, S. 45—63 (1827), Werke Bd. I, S. 101—120.

S. 326, Z. 18—9 v. u. Zu derselben Beziehung zwischen zwei rechtwinkligen sphärischen Dreiecken ist schon Gauss bei Untersuchungen über das Pentagramma mirificum gelangt, vgl. die Ges. Werke III, S. 487—490, und Dziobek, Ueber eine Erweiterung des Gauss'schen Pentagramma mirificum auf ein beliebiges sphärisches Dreieck, Grunerts Archiv II. Reihe, Bd. 16 (1898), S. 320—326.

S. 335, Z. 1. In seinem Exemplare der G. U. (vgl. S. 434 f.) hat Gauss zu den Worten „welcher vergrössert wurde" die Randbemerkung gemacht: „was wohl näher nachgewiesen zu werden verdient hätte." In der That ist man nur dann sicher, dass $\angle CBQ$ grösser ist als $\angle CBA$, wenn $AC > BC$. Sollte dagegen $AC < BC$ sein, so mache man $\angle ACQ = \Pi(a) + \Pi(b)$ und $CQ = CB$ und kann dann wieder die Lobatschefskijsche Schlussweise anwenden. Der Fall $AC = BC$ endlich braucht wohl nicht noch besonders behandelt zu werden.

S. 338, Z. 9, 8 v. u. Man vgl. hierzu S. 424 Z. 23—11 v. u.

S. 362, Z. 15—19. Es sind drei verschiedene Hefte über Geometrie, die mit Nachschriften von Vorlesungen über Algebra so zusammengebunden sind, dass Algebra und Geometrie abwechseln. Die geometrischen Hefte enthalten keine Angaben über die Zeit der Niederschrift; eines trägt die Bezeichnung: Heft über Geometrie des Schülers Temnikof. Auf den algebraischen Heften steht geschrieben: Vorlesungen von 1815 bis 1816 und: Vorlesungen von 1816 bis 1817. Daher stammt die Zeitangabe des Textes.

S. 362, Z. 17 v. u. Vgl. auch den Beweisversuch von E. Knorr, S. 440 f.

S. 369, Z. 7 v. u. Vgl. auch S. 450—453.

S. 377, Z. 17—20. In einem Briefe an Gauss, vom 10. Februar 1829, erwähnt Bessel, er sei durch das, was Lambert gesagt habe, und durch Schweikarts mündliche Aeusserungen zur Klarheit über die Parallelenfrage gekommen (s. P. Th. S. 227). Es ist etwas auffallend, dass Gauss in seiner Antwort auf diese Bemerkungen Bessels gar nicht eingeht; da er über Schweikart Bescheid wusste, möchte man hieraus fast schliessen, dass auch der Hinweis auf Lambert für ihn nichts Neues enthielt. Gauss kann auf die Arbeit von Lambert durch den 1824 erschienenen Euklidkommentar von Camerer aufmerksam geworden sein, vgl. P. Th. S. 248 und 319.

S. 381, Z. 20—25. Zu dieser Auffassung sind Stäckel und ich auf Grund des jetzt vorliegenden Materials gelangt. Die Mittheilungen, die Gauss selbst 1799 (s. S. 379) und in späterer Zeit über die Anfänge seiner Untersuchungen gemacht hat, sind damit durchaus vereinbar.

An Taurinus schreibt er 1824 (s. P. Th. S. 249), er habe sich seit über dreissig Jahren mit der Annahme beschäftigt, dass die Winkelsumme im Dreiecke kleiner sei als zwei Rechte. In einem Briefe an Bessel von 1829 (P. Th. S. 226) spricht er davon, dass das Thema der ersten Gründe der Geometrie bei ihm schon fast vierzig Jahre alt sei. Im Jahre 1831 schreibt er an Schumacher (s. P. Th. S. 230), dass seine Meditationen über die Parallelentheorie zum Theil schon gegen vierzig Jahre alt seien, und seinem Jugendfreunde W. Bolyai gegenüber äussert er 1832: „der ganze Inhalt der Schrift*), der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehends mit meinen eigenen, zum Theil schon seit 30—35 Jahren angestellten Meditationen überein" (s. Math. Ann. Bd. 49, S. 162 und Briefwechsel zwischen Gauss und W. Bolyai S. 109).

Aus allen diesen Angaben geht aber nur hervor, dass Gauss bereits vor 1808 sehr eingehend untersucht hatte, welche Folgen sich aus der Annahme ergeben, die Winkelsumme sei kleiner als zwei Rechte, ähnlich wie Saccheri aus seiner Hypothese des spitzen Winkels ein ganzes System von Folgerungen und Sätzen abgeleitet hatte und wie es Lambert bei seiner dritten Hypothese gethan hatte (vgl. P. Th. S. 50—135, 192—207). Dagegen lässt sich aus den angeführten Briefstellen gar nichts darüber schliessen, wann Gauss sich ganz von den Fesseln Euklids befreit und sich zur vollen Ueberzeugung von der Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms durchgerungen hat. Aus den im Texte angeführten Gründen scheint das jedenfalls nicht vor 1808 gewesen zu sein.

S. 380, Z. 17—13 v. u. Die wichtigsten Stellen aus diesem Briefe Wachters sollen in Bd. VIII der Gaussischen Werke veröffentlicht werden. Stäckel.

S. 381, Z. 7 f. statt: „und 16" lies: „bis 1817"; vgl. S. 453, Z. 22—16 v. u.

S. 381, Z. 3, 2 v. u. Der Einfluss Legendres hätte hier stärker betont werden sollen; verrathen doch schon die geometrischen Vorlesungen, die Lobatschefkij 1815—1817 gehalten hat (s. S. 362 f.) ein eingehendes Studium der Legendreschen Untersuchungen. Auch hätte darauf verwiesen werden sollen, dass Lobatschefskij später, in der Einleitung zu seinen „Neuen Anfangsgründen" (hier S. 68—76), sich sehr ausführlich mit Legendre auseinandergesetzt hat.

S. 382, Z. 16 v. u. — 383, Z. 2. Der Leser könnte hier den Eindruck gewinnen, als ob ich Schweikart überschätzte, da ich ihn mit Gauss, Lobatschefskij und J. Bolyai in eine Linie stelle. Er bedenke jedoch, dass es sich bei dieser Gelegenheit nicht darum handelt, was die genannten vier Männer für die Ausbildung der nichteuklidischen Geometrie geleistet haben, sondern nur um das gewiss nicht gering zu schätzende Verdienst, den Bruch mit der zweitausendjährigen Autorität Euklids vollzogen und die Möglichkeit und Widerspruchsfreiheit der nichteuklidischen Geometrie klar erkannt zu haben. In dieser Beziehung sind alle vier entschieden als gleichberechtigt zu betrachten, während allerdings Schweikart, so viel wir wissen, für die eigentliche Ausbildung der neuen Geometrie wenig geleistet hat und demnach insofern mit den drei andern überhaupt nicht verglichen werden kann. Dagegen können die Untersuchungen seines Neffen Taurinus auch neben denen von Gauss, Lobatschefskij und J. Bolyai mit Ehren genannt werden.

S. 397, Z. 17 statt: „Ueber die" lies: „Die".

S. 420, Z. 5—9. Dass sich Gauss sehr früh mit Parallelentheorie beschäftigt

*) nämlich des Appendix von J. Bolyai.

und eine anti-euklidische Geometrie entwickelt hatte, war allerdings schon durch die 1856 erschienene Schrift: „Gauss zum Gedächtniss“ von Sartorius von Waltershausen bekannt geworden, aber der Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher brachte doch zum ersten Male Mittheilungen darüber aus Gaussens eigner Feder, und zwar aus dem Jahre 1831, während Sartorius auf Grund viel späterer mündlicher Aeusserungen von Gauss berichtet hatte. Vgl. P. Th. S. 216.

S. 438, Z. 5 f., nämlich in der zweiten Hälfte der zwanziger Jahre.

S. 438, Z. 9 f. Herr Professor Brendel in Göttingen, der derzeitige Verwalter des Gaussarchivs, hat auf meine Bitte den Briefwechsel zwischen Gauss und Encke daraufhin durchgesehen, ob der Name Knorr noch an andern Stellen vorkommt, hat jedoch den Namen weder in diesem noch auch sonst in einem andern Briefwechsel finden können, abgesehen von dem uns bekannten Briefe an Encke vom 1. Februar 1841. Dagegen hat er festgestellt, dass in der Gaussischen Bibliothek zwei Abhandlungen von Knorr, Physiker in Kasan, vorhanden sind, nämlich (vgl. S. 439): „Bestimmung der Höhe von Kasan“ und „Bericht über eine wissenschaftliche Reise 1836“ (Inspektion der meteorologischen Stationen an der Wolga). Daraus geht hervor, dass E. Knorr wirklich zu Gauss Beziehungen gehabt hat, und Stäckels Vermuthung erhält eine neue Stütze.

S. 441, Z. 21 ff. Zur Vervollständigung führe ich noch die nachstehenden Arbeiten Bunjakofskijs an: „Nouvelle théorie des parallèles“, lu le 12. dec. 1847, Bulletin de l'Ac. Imp. de St. Pétersb. V, 1847, Spalte 81—85, ein Auszug aus der 1850 in den Mémoires erschienenen Abhandlung. Ferner: „Note sur la théorie des parallèles et sur d'autres points fondamentaux de la géométrie élémentaire“, lu le 16. août 1850, Bull. IX, 1851, Sp. 49—59. „Nouvelles considérations sur la théorie des parallèles“, lu le 22. août 1862, Bull. V, 1863, Sp. 387—393. Endlich: „Considérations sur quelques singularités qui se présentent dans les constructions de la Géométrie non-euclidienne“, lu le 4. avril 1872, Mémoires, VII série, tome 18, no. 7. Petersburg 1872, 16 S. 4°.

Lobatschefskij wird nur in der letzten dieser Arbeiten erwähnt, und zwar sehr anerkennend. Aber auch hier ist Bunjakofskij immer noch Anhänger der Euklidischen Geometrie und sucht diese zu retten.

S. 442, Z. 15—11 v. u. Wassiljef hat mich nachträglich noch auf eine von Ueberweg herrührende Besprechung des Buches aufmerksam gemacht. Diese steht in der Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, herausgeg. von Fichte, Ulrici und Wirth, Neue Folge, Bd. 37, Halle 1860, S. 148—167. Auf S. 164 f. heisst es da:

„Es ist ferner dem Mathematiker wichtig, zu wissen, wie viel aus einer bestimmten Zahl von Axiomen ohne die übrigen folge, insbesondre, was ohne das eilfte Axiom des Euklid, und was nur mit Hülfe von diesem sich feststellen lasse. Auf diese Frage antwortet in gewissem Masse schon Euklid selbst durch die Anordnung seiner Sätze. . . . Eine vollständigere Antwort gibt die 'Géométrie imaginaire', welche Lobatschewski aufgestellt, und deren Grundgedanken auch schon Gauss, obschon vielleicht nur mündlich, ausgesprochen hat, eine hypothetische Geometrie, die mit Hülfe der analytischen Rechnung auf Grund der Gültigkeit der früheren Axiome, aber zugleich der Ungültigkeit des eilften, also der Gültigkeit seines contradictorischen Gegentheils, entworfen wird und eine Reihe von Sätzen enthält, welche untereinander widerspruchlos zusammenstimmen, aber der Wirklichkeit nicht entsprechen.“

S 442, Z. 11 v. u., 443, Z. 14 lies: Liége.

S. 442, Z. 3 v. u. Diese Zeitschrift erschien in Leipzig als Supplement zu den „Neuen Jahrbüchern für Philologie und Pädagogik". Die Ueberwegsche Arbeit steht auf S. 20—56.

S. 446, Z. 7 v. u. Das Jahr des Erscheinens der Algebra ist auf S. 318, Z. 20, 370, Z. 9 v. u., 397, Z. 14 unrichtig angegeben. Das Citat auf S. 205, Z. 10 v. u. bezieht sich selbstverständlich auch auf dieses Buch.

S. 446—449. Erwähnt sei hier ein mathematisches Schriftchen, das von einem andern Lobatschefskij verfasst und 1833 in Petersburg erschienen ist:

Programma geometricum. Continens clavem quadraturae lunularum inaequalium (3 : 4), (1 : 4) et segmenti 60 graduum. Auctore Ioanne Lobatschevsky.

Der Verfasser war, wie er sagt: Adjunctus Praefecti Bibliothecae Imperatoriae medicochirurchicae Academiae Petropolitanae. Ein Exemplar des Schriftchens besitzt die Bibliothek der Kais. Sternwarte zu Pulkowo. (Nach einer durch Vermittelung von N. Sonin in Petersburg erhaltenen Mittheilung von Fräulein M. Shilowa in Pulkowo.)

Sachregister

zur Uebersetzung und zu den Anmerkungen.

Seitenzahlen, die sich auf die Anmerkungen beziehen, sind mit einem * versehen.

Namenregister
zur Uebersetzung und zu den Anmerkungen.

Namen, die nur in den Anmerkungen vorkommen, sind mit einem * versehen.

Namenregister
zur Lebensbeschreibung Lobatschefskijs und zu den Nachweisungen.

L. bedeutet Lobatschefskij.

Nachwort.

Zwei der wichtigsten Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie, die, in russischer Sprache geschrieben, bisher so gut wie unbekannt waren, lege ich hiermit den Mathematikern in deutscher Uebersetzung vor. Es sind das die beiden Lobatschefskijschen Abhandlungen: „Ueber die Anfangsgründe der Geometrie“, erschienen 1829—30 im Kasaner Boten, und „Neue Anfangsgründe der Geometrie“, erschienen 1835 und in den folgenden Jahren in den Gelehrten Schriften der Universität Kasan. Erst wer diese Abhandlungen gelesen hat, kann sich einen Begriff von dem machen, was Lobatschefskij auf dem Gebiete der nichteuklidischen Geometrie erstrebt und geleistet hat: die bisher allein bekannten, deutsch oder französisch geschriebenen Arbeiten Lobatschefskijs sind dazu nicht ausreichend. Ausserdem bilden die von mir übersetzten Abhandlungen zusammengenommen ein vollständiges Lehrbuch der nichteuklidischen Geometrie, ein Lehrbuch, wie wir es bisher noch nicht besassen, das nicht blos eine systematische Darstellung der Elemente enthält, sondern auch eine sehr beträchtliche Anzahl von Beispielen für die Berechnung von Bogenlängen, Flächenräumen und Körperinhalten.

Für den Leser, der aus diesen Schriften die nichteuklidische Geometrie kennen lernen will, möchte ich gleich hier bemerken, dass er am Besten mit den „Neuen Anfangsgründen“ beginnt, und auch von diesen möge er die Einleitung, S. 67—83, zunächst ganz überschlagen. Hat er sich mit dem Inhalt der „Neuen Anfangsgründe“ vertraut gemacht, so wird ihm die Einleitung dazu keine Schwierigkeiten mehr machen, und er wird dann auch die Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe“ ziemlich leicht lesen können, wenn er die von mir beigegebenen Anmerkungen zu Rathe zieht. Solche Leser, die mit der höhern Mathematik gar nicht vertraut sind, werden sich mit dem Studium der „Neuen Anfangsgründe“ begnügen müssen.

Den auch sonst von mir befolgten Grundsätzen getreu, habe ich meiner Uebersetzung die Seitenzahlen der von mir benutzten russischen Ausgaben beigefügt, und zwar sind die Seitenzahlen der Origi-

nalausgaben, also des Kasaner Boten und der Kasaner Gelehrten Schriften, kursiv gesetzt, die Seitenzahlen der „Vollständigen Sammlung der geometrischen Arbeiten Lobatschefskijs“, Band I, Kasan 1883, in Antiqua. Von mir herrührende Zusätze im Texte sind durch Einschliessung in eckige Klammern kenntlich gemacht. Das Datum am untern Rande der ersten Seite jedes Bogens bezeichnet den Tag, an dem ich den Bogen für druckfertig erklärt habe.

In der Uebersetzung habe ich mich dem Wortlaute des Urtextes möglichst genau angeschlossen, auch wenn dadurch die Uebersetzung, dem ziemlich schwerfälligen Stile Lobatschefskijs entsprechend, zuweilen etwas Ungeschicktes, ja Undeutsches bekommen hat. Solche Unebenheiten hätte ich nur auf Kosten einer treuen Wiedergabe der Lobatschefskijschen Gedanken vermeiden können, und ich hätte mich dann leicht dem Vorwurfe ausgesetzt, etwas Andres gesagt zu haben, als was Lobatschefskij hat sagen wollen. Es ist eben zweierlei, ob man ein poetisches oder ein prosaisches Kunstwerk aus einer Sprache in eine andre übertragen will, oder ob man diese Aufgabe bei einem wissenschaftlichen Werke zu lösen hat. Im ersten Falle muss sich der Uebersetzer bestreben, mit den Mitteln seiner Sprache ein ähnliches Kunstwerk zu schaffen, und darf sich deshalb grosse Freiheiten nehmen. Im zweiten Falle ist es seine vornehmste Pflicht, sich vor jeder Entstellung der Gedanken des Originals zu hüten: die Form, in der er diese Gedanken wiedergiebt, kommt erst in zweiter Linie, und er wird oft in der Lage sein, die Schönheit seiner Uebersetzung der Treue opfern zu müssen.

Erwähnt seien noch einige Aeusserlichkeiten: An vielen Stellen habe ich Absätze angebracht, wo der Urtext keine hatte; die Uebersichtlichkeit des Ganzen wird dadurch wesentlich erhöht. Aus demselben Grunde habe ich die Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe“ in Paragraphen eingetheilt. Alles in Sperrdruck Gesetzte war fast durchweg schon von Lobatschefskij selbst durch den Druck hervorgehoben. Die beiden ausführlichen Inhaltsverzeichnisse auf Seite VII—IX und IX—XVI sind von mir neu hinzugefügt, während bisher etwas Derartiges gänzlich fehlte.

Durch zahlreiche und eingehende Anmerkungen das Verständniss der Lobatschefskijschen Abhandlungen möglichst zu erleichtern, habe ich mir ganz besonders angelegen sein lassen. Durchaus geboten schien mir das namentlich bei der Arbeit „Ueber die Anfangsgründe“, in der die Zwischenrechnungen meist weggelassen und nur die Endergebnisse mitgetheilt sind. In den Anmerkungen habe ich überall diese Zwischenrechnungen vollständig ausgeführt, so dass der Leser

nicht erst nöthig hat, mühsam die Wege aufzusuchen, auf denen Lobatschefskij zu seinen Resultaten gelangt ist.

Wenn die übrigen Abhandlungen Lobatschefskijs etwas enthielten, was zur Ergänzung der hier übersetzten dienen konnte, so habe ich das in den Anmerkungen verwerthet, indem ich es entweder auszugsweise oder nach dem Wortlaute des Originals wiedergab. Den Schluss der Anmerkungen bildet eine kurze Zusammenstellung einiger wichtiger Formeln der nichteuklidischen Geometrie, Seite 345—348: auf diese möchte ich noch ausdrücklich aufmerksam machen.

Wirklich benutzbar werden jedoch meine Anmerkungen nur dann, wenn man sie neben die Uebersetzung legen und also lesen kann, ohne erst umschlagen zu müssen. Deshalb ist das ganze Werk in zwei Theile zerlegt, die einzeln einbinden zu lassen ich nicht dringend genug empfehlen kann.

Hinter den Anmerkungen folgt eine Lebensbeschreibung Lobatschefskijs, in der ich auch dessen geometrische und sonstige Leistungen zu würdigen versucht habe; in den Nachweisungen zu dieser Lebensbeschreibung findet man noch allerhand ergänzende Mittheilungen sowie auch genaue Angaben über die von mir benutzten Quellen, sodass der Leser jederzeit ersehen kann, worauf sich meine Angaben stützen. Ein Sachregister und zwei Namenregister sind beigefügt, um die Benutzung des Buches so bequem wie möglich zu machen.

Soviel über Plan und Inhalt meines Buches; jetzt noch Einiges über dessen Entstehung.

Als Stäckel und ich im Jahre 1894 unser Buch ankündigten: „Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie“, da behielten wir uns vor, dieses Unternehmen fortzusetzen und auch für die Geschichte der nichteuklidischen Geometrie selbst eine ähnliche Urkundensammlung zu schaffen, soweit sich das als thunlich erweisen möchte. Selbstverständlich dachten wir hierbei zunächst an die Schriften Lobatschefskijs und der beiden Bolyai, in denen die nichteuklidische Geometrie ihre erste systematische Begründung und Darstellung gefunden hat; jedoch waren wir damals noch weit entfernt, einen bestimmten Plan gefasst zu haben. Dazu ist es erst Anfang 1897 gekommen, wo Stäckel und ich verabredeten, er solle die beiden Bolyai übernehmen und in seinem Namen herausgeben, ich aber ebenso den Lobatschefskij in meinem Namen, jedoch solle Beides unter dem gemeinsamen Titel: „Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie“ erscheinen.

Zur Uebernahme des Lobatschefskij bestimmte mich vor allen

Dingen der Umstand, dass ich einigermassen mit der russischen Sprache vertraut war, da ich diese schon 1888—89 durch meinen Leipziger Kollegen Scholvin kennen gelernt hatte. Es gereicht mir zu besonderer Genugthuung, ihm jetzt durch Widmung dieses Buches einen wenn auch etwas verspäteten Beweis meiner Dankbarkeit zu liefern.

Meine Bekanntschaft mit den russischen Schriften Lobatschefskijs stammt aus dem Jahre 1895. Wassiljef schenkte mir nämlich damals ein Exemplar des vollständig vergriffenen ersten Bandes der gesammelten geometrischen Arbeiten Lobatschefskijs, der die Arbeiten in russischer Sprache enthält (Kasan 1883). Schon eine flüchtige Durchsicht dieser Arbeiten überzeugte mich, dass die deutsch oder französisch geschriebenen Abhandlungen nur ein sehr unvollkommenes Bild von den geometrischen Untersuchungen Lobatschefskijs gewähren, dass erst die russischen den ganzen Lobatschefskij zeigen, und dass man ihm Unrecht thut, wenn man ihn nur nach jenen beurteilt. Infolgedessen reifte in mir der Entschluss, die wichtigsten der russischen Arbeiten durch eine Uebersetzung den deutschen und damit auch den andern Mathematikern zugänglich zu machen. Doch hielt ich es für nöthig, mich auf diese umfangreiche und auch nicht ganz leichte Arbeit erst etwas vorzubereiten, indem ich zuvor ein paar kleinere russische Schriften übersetzte. Ich wählte dazu eine Rede von Wassiljef über Lobatschefskij (vgl. S. 423) und eine bisher gänzlich unbeachtet gebliebene Abhandlung von N. Sonin über partielle Differentialgleichungen 2. O. (s. die Math. Ann., Bd. 49, S. 417—447).

Anfänglich hatte ich geglaubt, mich zunächst mit einer Uebersetzung der „Neuen Anfangsgründe“ begnügen zu können. Allein mein historisches Gewissen erlaubte mir nicht, die erste Veröffentlichung Lobatschefskijs über nichteuklidische Geometrie bei Seite zu lassen, die 1829—30 im Kasaner Boten erschienene Arbeit „Ueber die Anfangsgründe der Geometrie“. Diese Abhandlung war zwar sehr oft genannt worden, war aber doch bisher eigentlich Niemandem bekannt; selbst in Russland hat sie kaum jemand wirklich durchgearbeitet, und ausserhalb Russlands wusste man von ihr weiter nichts als den Titel. Freilich war ich mir auch von vornherein darüber klar, dass grade diese Arbeit nur durch Hinzufügung sehr ausführlicher Anmerkungen den Mathematikern schmackhaft gemacht werden konnte.

So entschied ich mich denn dafür, die beiden eben genannten Abhandlungen, die den Hauptinhalt des vorliegenden Werkes bilden, herauszugeben. Bei der Lösung dieser Aufgabe haben mich Stäckel und Wassiljef auf das Wirksamste unterstützt, wofür ihnen auch öffentlich meinen Dank auszusprechen mir wirkliches Bedürfniss ist.

Stäckel hat einzelne Theile meines Werkes, namentlich die Anmerkungen und die Nachweisungen zur Lebensbeschreibung Lobatschefskijs, schon im Manuskript durchgesehen; verschiedene grössere Zusätze, die von ihm herrühren, habe ich als solche durch Hinzufügung seines Namens kenntlich gemacht.

Von dem Ganzen hat er alle Korrekturen mitgelesen, und äusserst zahlreich sind in allen Theilen des Werks die Stellen, die durch ihn Verbesserungen und Berichtigungen erfahren haben. Dabei ist es ihm sehr zu Statten gekommen, dass er von der Kasaner Universität durch Vermittelung Wassiljefs ein Exemplar des ersten Bandes der geometrischen Werke Lobatschefskijs zum Geschenke erhalten hat. Auf seinen Wunsch bringe ich seinen Dank hierfür öffentlich zum Ausdruck.

Ausdrücklich erwähnen möchte ich noch eins. Stäckel hat alle die Rechnungen, die in der Arbeit „Ueber die Anfangsgründe“ und in den Anmerkungen dazu enthalten sind, nachgeprüft. Ich bin ihm dafür ganz besonders dankbar. Da nämlich der Urtext jener Arbeit durch eine beträchtliche Anzahl von Druckfehlern entstellt ist, so war es für mich keine geringe Mühe gewesen, überall die fehlenden Zwischenrechnungen zu ergänzen und die richtigen Formeln herzustellen. Einem Manne wie Lobatschefskij gegenüber kann man aber nicht misstrauisch genug gegen sich selbst sein: zuweilen fand ich schliesslich doch heraus, dass eine Formel, die ich zuerst für unrichtig gehalten hatte, in Ordnung war, oder dass eine anscheinend nicht passende Verweisung sich rechtfertigen liess. Man kann sich demnach denken, dass die von Stäckel durchgeführte Kontrole der Rechnungen mir eine grosse Beruhigung war.

Wie gross die Dankesschuld ist, in der ich mich Wassiljef gegenüber befinde, das habe ich, soweit es sich um meine Biographie Lobatschefskijs handelt, schon in der Einleitung zu dieser ausgesprochen. Ich will das hier nicht wiederholen, möchte aber noch einmal ausdrücklich hervorheben, dass ich ohne Wassiljefs Hülfe diese Biographie gar nicht geschrieben hätte, nicht hätte schreiben können. Aber auch sonst habe ich mich bei meiner ganzen Arbeit jederzeit der Unterstützung Wassiljefs erfreut. Eine Menge Notizen, die ich mir gar nicht zu verschaffen gewusst hätte, verdanke ich ihm, zum Beispiel für mein Verzeichniss der Lobatschefskijschen Schriften (S. 446—449). Auf einiges Andre will ich näher eingehen.

Schon während ich die beiden Abhandlungen Lobatschefskijs übersetzte und noch mehr, als ich sie wiederholt genau durcharbeitete, überzeugte ich mich, dass die Kasaner Ausgabe seiner geometrischen Arbeiten — milde ausgedrückt — an Korrektheit viel zu wünschen übrig

liess. Es galt daher auf die Originalausgaben zurückzugehen. Bei den „Neuen Anfangsgründen“ war das nicht schwer: aus der Berliner Königlichen Bibliothek erhielt ich in dankenswerther Weise die betreffenden Bände der Kasaner Gelehrten Schriften und fand dann auch, dass die Kasaner Gesammtausgabe an recht vielen Stellen den fehlerfreien Urtext entstellt, ja dass sie zuweilen ganze Zeilen einfach ausgelassen hatte. Nirgends aber war der Kasaner Bote aufzutreiben; es blieb mir daher nichts andres übrig, als alle die vielen Stellen, an denen der Text der mir vorliegenden Ausgabe fehlerhaft zu sein schien, einzeln aufzuschreiben und Wassiljef zu bitten, mir die Fassung der Originalausgabe mitzutheilen. Das hat er auf das Bereitwilligste und Sorgfältigste ausgeführt, so dass sich mir die Unzugänglichkeit des Kasaner Boten verhältnissmässig nicht sehr fühlbar gemacht hat.

Bei dieser Gelegenheit hat Wassiljef auch noch einen Sonderabdruck der Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe“ verglichen, der sich im Besitze des Professors Petrofskij in Kasan befindet und der aus zwei Gründen merkwürdig ist. Erstens ist es das Exemplar, das Lobatschefskij dem damaligen Kurator der Kasaner Universität, Mussin-Puschkin (vgl. S. 384 ff.), überreicht hat; die eine der beiden Figurentafeln ist sogar von Lobatschefskij eigenhändig gezeichnet. Zweitens aber ist der Abdruck fortlaufend paginirt und an einer bestimmten Stelle sind sogar einige Seiten anders umbrochen als im Kasaner Boten. Mehrfach zeigt dieser Abdruck bemerkenswerthe Abweichungen vom Texte des Kasaner Boten. Druckfehler, die der eine enthält, fehlen im andern und umgekehrt. Es ist daher auch noch nicht ganz ausgemacht, in welcher Beziehung diese beiden Abdrücke, der im Kasaner Boten und der Petrofskijsche, zu einander stehen.

Für mich haben die Beziehungen Wassiljefs zu Petrofskij noch die äusserst angenehme Folge gehabt, dass Herr Professor Petrofskij mir im Sommer 1897 eine ganze Anzahl Hefte der Kasaner Gelehrten Schriften zum Geschenk gemacht hat, so dass ich jetzt glücklicher Besitzer eines vollständigen Exemplars der „Neuen Anfangsgründe“ in der Originalausgabe bin, sowie auch der Abhandlung Lobatschefskijs über die trigonometrischen Reihen (1834). Für dieses werthvolle Geschenk kann ich dem Geber nicht dankbar genug sein.

Endlich muss ich noch erwähnen, dass ich durch Wassiljef auch in den Stand gesetzt worden bin, meinem Werke ein bisher unbekanntes Bild von Lobatschefskij beizugeben. Wassiljef schickte mir eine Photographie, der ein nach dem Leben gemachtes Daguerrotyp zu Grunde liegt. Hierfür spricht, ausser der Ueberlieferung, auch noch der Umstand, dass das Bild den Orden auf der rechten Brust zeigt.

Allerdings war die Photographie, die ich erhalten hatte, nicht scharf genug, um eine unmittelbare photographische Vervielfältigung zu gestatten; aber ich habe mir geholfen, indem ich nach der Photographie eine Kreidezeichnung in etwa halber Lebensgrösse ausführen liess, und nach dieser Kreidezeichnung hat die Verlagsbuchhandlung die beigegebene Heliogravüre herstellen lassen. Die Heliogravüre giebt die Eigenthümlichkeiten jener Photographie vollkommen treu wieder, und wenn man sie mit dem Bilde vergleicht, das dem zweiten Bande der geometrischen Arbeiten Lobatschefskijs (Kasan 1886) beigegeben ist und das allerdings Lobatschefskij in jüngeren Lebensjahren darstellt, so wird man wohl keinen Augenblick darüber im Zweifel sein, welches von beiden Bildern sich durch grössere Lebenswahrheit auszeichnet.

Das Faksimile unter dem Bilde stammt aus Göttingen; entnommen ist es einem Bande von Dankschreiben, die an die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen von den neu erwählten Korrespondenten und auswärtigen Mitgliedern gerichtet worden sind (vgl. S. 399 und 436 f.). Die Königliche Universitätsbibliothek zu Göttingen, auf der dieser Band aufbewahrt wird, hat ihn mir in dankenswerther Weise zur Herstellung des Faksimiles zugänglich gemacht.

Schon hierdurch fühle ich mich auch der Göttinger Gesellschaft selbst zu Danke verpflichtet. Aber auch noch aus andern Gründen.

Im Stillen hatte ich immer noch die Hoffnung gehegt, dass im Gaussischen Nachlasse, der von der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften verwaltet wird, der Kasaner Bote vorhanden sein möchte. Veranlasst war ich dazu hauptsächlich durch gewisse Mittheilungen, die ich Anfang 1896 von Excellenz Otto Struve in Karlsruhe erhalten hatte (s. S. 381, 429, 435). Im November 1897 hatte ich durch das Entgegenkommen Felix Kleins Gelegenheit, mich zu überzeugen, dass ich mich nicht getäuscht. Klein machte mir nämlich den Nachlass von Gauss zugänglich, damit ich die vorhandenen Schriften Lobatschefskijs und etwaige auf diesen bezügliche Notizen für mein Buch verwerthen könnte. Da fand ich denn in der That ausser andern Lobatschefskijschen Abhandlungen auch die „Ueber die Anfangsgründe der Geometrie", zum Theil zwar nur in Abschrift, einen Theil aber auch im Originaldrucke, in zwei Heften des Kasaner Boten. Was ich bei der Vergleichung dieses Exemplars gefunden habe, ist den Anmerkungen zu meiner, damals schon gedruckten, Uebersetzung zu Gute gekommen. Ausserdem durfte ich auch die ungemein reichhaltige Sammlung von Briefen an und von Gauss für meine Zwecke benutzen, namentlich die Briefe von Gauss an Encke, Gerling und Olbers, sowie die Briefe von Bartels, Taurinus und Wachter an

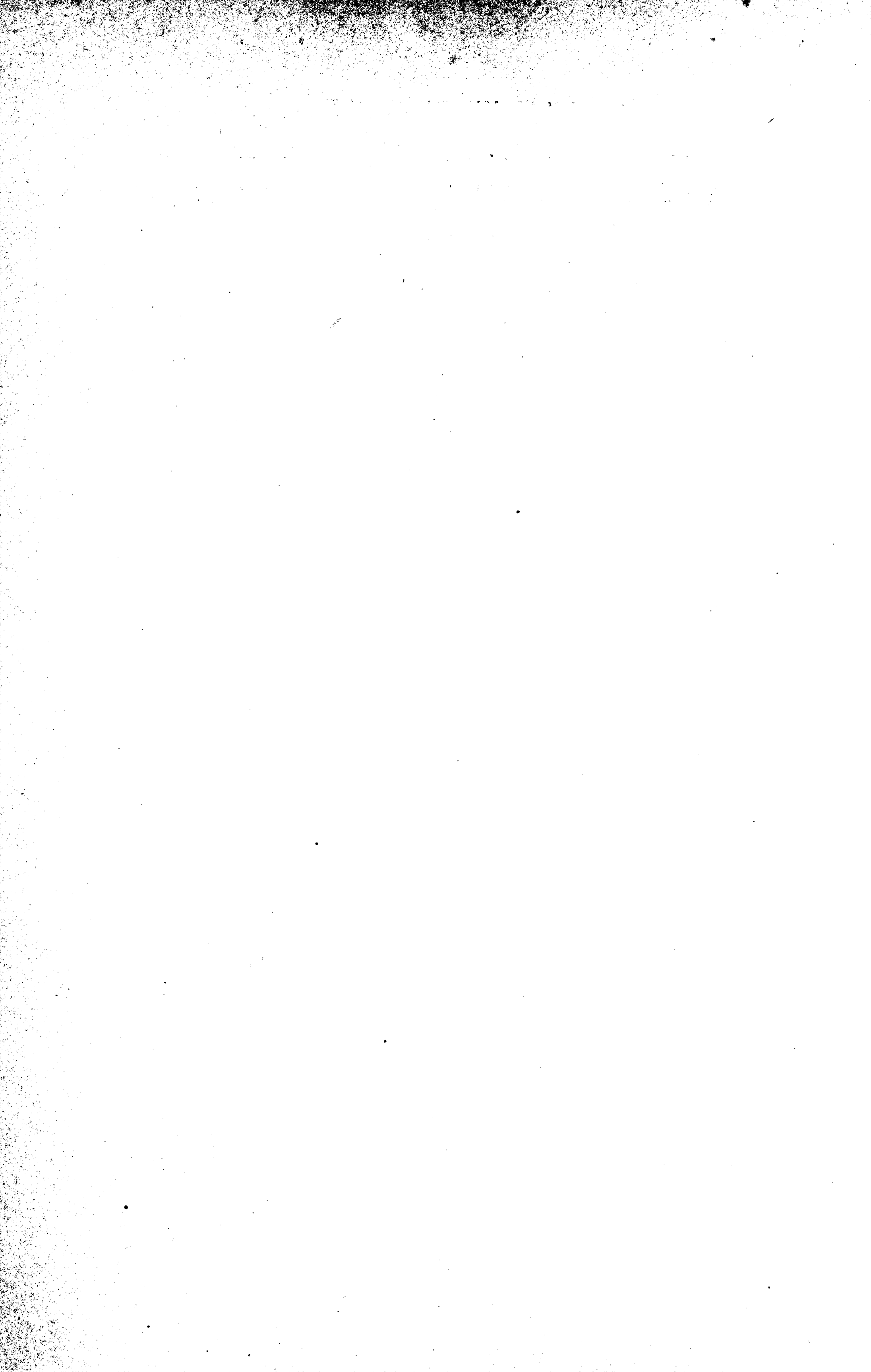
Gauss, und bin auf diese Weise in den Stand gesetzt worden, genauen Bericht darüber zu erstatten, was Gauss über Lobatschefskij geäussert hat (s. S. 398f., 407, 432—434). Ich schmeichle mir, durch meine Nachforschungen, bei denen mich übrigens auch Stäckel wieder unterstützt hat, zur Beantwortung der Frage beigetragen zu haben, wie Gauss in den Besitz der Arbeiten von Lobatschefskij gekommen ist (s. S. 434—436, 437—440), und möchte diesen bescheidenen Beitrag zur Biographie von Gauss als einen kleinen Zoll des Dankes angesehen wissen, den ich der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen und Felix Klein insbesondere für die mir in liberalster Weise gestattete Benutzung des Gaussischen Nachlasses schulde. Dieser Beitrag ist allerdings sehr bescheiden, wenn ich damit vergleiche, welchen Nutzen ich selbst für meine Arbeit über Lobatschefskij aus dem Göttinger Material gezogen habe. Die Persönlichkeit Lobatschefskijs musste in den Augen der Mathematiker ganz wesentlich gewinnen, wenn ich von der Werthschätzung erzählte, die ihr Gauss hatte zu Theil werden lassen. In Gaussens Leben dagegen ist das Ganze nur eine ziemlich untergeordnete Episode, denn Gaussens eigne Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie liegt ja lange vor der Zeit, in der er mit Lobatschefskijs Arbeiten bekannt wurde, sogar noch vor der Zeit, die Lobatschefskij selbst zu dieser Entdeckung geführt hatte. Bewunderungswürdig aber bleibt es, wie neidlos Gauss hier und bei andern Gelegenheiten die Leistungen andrer anerkennt, bei denen er seine eignen, unveröffentlichten Entdeckungen wiederfindet!

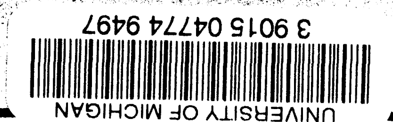
Noch gar Manchem habe ich zu danken. Mein Freund H. Grassmann in Halle a. S. ist so liebenswürdig gewesen, die Figuren zu den Anmerkungen zu zeichnen. Einzelne Beiträge und Mittheilungen verdanke ich ferner den Herren M. Brendel in Göttingen, A. Knorr in Petersburg, V. Knorre in Berlin, R. Lipschitz in Bonn, F. Schmidt in Buda-Pest, A. Tresse in Paris. Bei meinen Nachforschungen nach der Familie E. Knorrs, weiland Professors in Kasan, haben mich unterstützt die Herren: Oberpfarrer Höppner in Mittweida i. S., Hofrath von Larisch in Kötzschenbroda bei Dresden, Pastor E. Gelderblom in Petersburg. Endlich haben meine Leipziger Kollegen Scholvin und Wollner mir über allerhand sprachliche und sachliche Fragen Auskunft ertheilt.

Die Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner ist, wie immer, auch diesmal in Bezug auf die Einrichtung und Ausstattung des Buches allen meinen Wünschen entgegengekommen.

Leipzig, im Januar 1899.

Friedrich Engel.




3 9015 04774 9497
UNIVERSITY OF MICHIGAN

